24534502

同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

硕士学位论文

（专业学位）

基于物理信息神经网络的薄板结构分布式参数识别

国家自然科学基金项目（52378184）
和上海市级科技重大专项-人工智能基础理论与关键核心技术(2021SHZDZX0100)资助

姓　　名：丁　宁

学　　号：2132246

学　　院：土木工程学院

学科门类：工学

专业学位类别：土木水利

专业领域：土木工程

研究方向：防灾减灾工程及防护工程

指导教师：唐和生　副教授

二〇二四年九月

24534502

同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

A thesis submitted to
Tongji University in partial fulfillment of the requirements for
the degree of Master of Engineering

Distributed Parameter Identification of Thin Plate Structures Based on Physics-Informed Neural Networks

Supported by the National Natural Science Foundation of China(52378184) and the Shanghai Municipal Science and Technology Major Project (2021SHZDZX0100)

Candidate: Ning Ding

Student Number: 2132246

School/Department: College of Civil Engineering

Categories: Engineering

Degree: Civil and Hydraulic Engineering

Degree's Field: Civil Engineering

Research Fields: Disaster Prevention and Mitigation Engineering

Supervisor: Associate Professor Hesheng Tang

September, 2024

摘要

薄板结构是工程领域中最基本的构件单元之一，其应用场景极为广泛，包括建筑工程、航空工程和海洋工程等领域。薄板的结构安全与内部损伤、边界服役状态密切相关。当前，针对薄板的结构损伤检测已开展大量的理论和实验研究，并取得一系列成果。然而，绝大多数方法依赖于固定、离散的损伤参数作为识别指标。因此，对于结构的连续性损伤（如材料参数在空间上呈现分布性退化等），传统方法失去了适用性。近年来，随着计算机技术的飞速发展，物理信息神经网络被证明可用于解决许多复杂的偏微分方程问题，尤其是在反问题求解领域有突出表现。而对于分布式参数的反演，其本质是求解函数空间反问题。基于此，本文建立一种基于物理信息的深度学习模型对薄板力学反问题进行求解，旨在通过反演系统中未知的分布性参数，实现对薄板结构空间、连续性损伤的识别。本文的主要内容如下：

（1）建立一种具有自适应激活函数的物理信息神经网络模型，用于分析薄板力学正、反问题。通过将弹性支承薄板力学控制方程和弹性边界方程内嵌入深度学习模型中，使得该模型具有解释性，并引入自适应激活函数，以提高深度学习模型的非线性表征能力。

（2）以弹性边界支撑矩形薄板为研究对象，引入空间分布边界约束，并将边界刚度折减定义为边界损伤。建立物理信息多网络模型，利用子网络表征空间坐标-边界刚度函数，从而建立边界约束刚度空间非均匀连续变化的代理模型。利用少量的标签数据，结合大量的内部自由配置点，实现了针对具有空间分布参数（边界约束刚度）变化的薄板力学反演问题。

（3）以四边固支矩形薄板为研究对象，假定抗弯刚度为空间连续性函数，面内刚度折减表征为结构损伤，从而将损伤识别问题转化为连续空间分布函数（抗弯刚度）反演问题。嵌入空间连续变刚度薄板弯曲基本控制方程和边界条件，建立基于物理信息神经网络的空间连续参数变化薄板力学反演模型，实现薄板平面内空间连续分布抗弯刚度的识别。

关键词：物理信息神经网络，薄板力学正反问题，空间连续分布参数识别，弹性支承边界，自适应激活函数

ABSTRACT

Thin plate structures are one of the most fundamental components in the field of engineering, with applications spanning across building engineering, aerospace engineering, and marine engineering, among others. The structural safety of thin plates is closely related to internal damage and boundary service conditions. Currently, extensive theoretical and experimental research has been conducted on the structural damage detection of thin plates, yielding a series of results. However, the majority of methods rely on fixed, discrete damage parameters as identification indicators. Therefore, traditional methods lose their applicability for continuous damage in structures (such as spatially distributed degradation of material parameters). In recent years, with the rapid development of computer technology, physics-informed neural networks have been proven to solve many complex partial differential equation problems, especially excelling in solving inverse problems. The essence of the inversion of distributed parameters is solving inverse problems in function space. Based on this, this paper establishes a physics-informed deep learning model to solve the mechanical inverse problem of thin plates, aiming to identify spatial, continuous damage in thin plate structures by inverting unknown distributed parameters in the system. The main contents of this paper are as follows:

(1) Establish a physics-informed neural network model with adaptive activation functions to analyze both the forward and inverse mechanical problems of thin plates. By embedding the mechanical control equations of elastically supported thin plates and the elastic boundary equations into the deep learning model, the model gains interpretability, and adaptive activation functions are introduced to enhance the nonlinear representation capability of the deep learning model.

(2) Using elastically boundary-supported rectangular thin plates as the research object, spatially distributed boundary constraints are introduced, and the reduction of boundary stiffness is defined as boundary damage. A physics-informed multi-network model is established, using sub-networks to represent the spatial coordinates-boundary stiffness function, thereby establishing a surrogate model for the non-uniform continuous variation of boundary constraint stiffness in space. With a small amount of labeled data, combined with a large number of internal freely configurable points, the mechanical inversion problem of thin plates with spatially distributed parameters (boundary constraint stiffness) variations is realized.

(3) Using a rectangular thin plate with fixed supports on all sides as the research object, assuming that the bending stiffness is a spatially continuous function, and the reduction of in-plane stiffness represents structural damage, the damage identification problem is transformed into an inversion problem of continuous spatial distribution functions (bending stiffness). By embedding the basic control equations and boundary conditions for the bending of thin plates with spatially continuous variable stiffness, a physics-informed neural network model for the mechanical inversion of thin plates with spatially continuous parameter variations is established, achieving the identification of the in-plane spatially continuous distribution of bending stiffness in thin plates.

Key words: Physics-informed neural network, Forward and inverse mechanical problems of thin plates, Spatially continuous parameter identification, Elastically supported boundary, Adaptive activation function

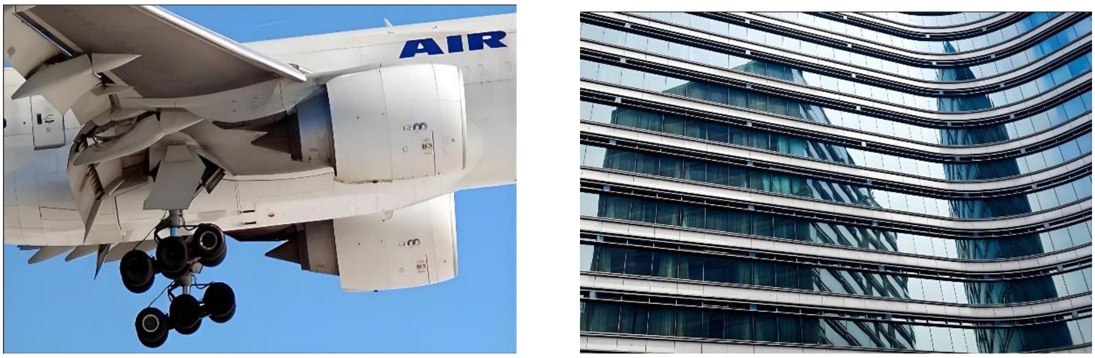
目录

第1章　绪论

1.1 研究背景及意义

薄板结构广泛存在于实际工程中，常用于建筑工程、航空工程和海洋工程等领域。薄板结构是指其平面的宽度和长度方向都远远大于其厚度的结构，在工程中，一般认为厚度小于短边方向的 1/5 的板结构可看成是薄板。

薄板结构在承受外部荷载作用或受环境侵蚀时可能会引发裂纹、缺陷、锈蚀或刚度减弱等结构损伤，从而使得其物理性能如刚度、质量或阻尼等发生变化。当这些损伤在使用过程中逐渐拓展、加剧时，将会降低结构承载力，甚至可能造成重大事故。此外，薄板的结构安全还与边界的服役状态紧密相关[1]。当边界的连接材料发生老化或劣化时，可能会引发边界松动甚至失效，对薄板结构安全造成严重威胁[2-4]。因此，如何有效地识别薄板结构的损伤和薄板边界的实际服役状态，对确保薄板结构的安全性和可靠性具有重大意义。



（a）飞机外壳　　　　（b）高层建筑玻璃幕墙

图 1.1 工程应用中常见的薄板结构

目前，已有大量的理论研究和实验方法用于检测、确定和量化薄板的结构损伤。但对于大多数的研究，仍然存在一些局限性，总结为以下两点：（1）大部分针对薄板内部结构的损伤检测主要用于识别离散的损伤，如孤立的孔洞缺陷、锈蚀或局部刚度锐减等在某个特定点或局部区域上材料参数发生突变。而对于由于材料分布式退化引起的损伤，如由于环境侵蚀引起的材料老化导致整个结构材料的强度或刚度在空间上逐渐降低等连续性、非均质性的损伤，目前研究仍不足。（2）针对薄板边界条件的识别，大多数研究都假定边界的约束是均匀分布的，因此将整个边界的状态简化为一个固定的参数去识别。其结果忽略了非理想情况下边界约束的不均匀性。

薄板结构的损伤识别本质是求解力学反问题。力学反问题是指当力学模型中存在部分未知的物理信息，通过部分已知的系统响应数据，逆向推导出缺失的参数或边界信息的问题。研究表明，近年来已成为研究热点的物理信息神经网络（Physics-Informed Neural Networks，PINN）通过将物理约束嵌入到神经网络模型中，显著增强了网络从数据中学习非线性关系的能力，使得其在处理病态问题、反问题或稀疏数据情境时都展现出了突出的优势[5]。

因此，本文选取矩形薄板为研究对象，采用基于 PINN 的深度学习模型对其力学反问题进行进一步研究，旨在从传统的固定参数反演转变为分布式参数反演，进而实现对薄板一般性损伤状况高精度的辨识。这将有助于获取薄板结构的实际服役状态，为薄板结构的健康监测提供理论支持。

1.2 相关领域研究现状

1.2.1 薄板结构损伤识别研究现状

（1）薄板结构内部损伤识别研究现状

传统的薄板结构损伤识别利用感知接口获取的振动响应信号来确定系统的动力参数，如振动响应、固有频率、自振振型、模态曲率、柔度曲率和模态应变能等，通过比较结构的未损伤动态参数与损伤参数来定位结构损伤位置和受损程度。

尹永亮[6]通过削弱弯曲刚度构造损伤区域，以薄板结构的模态参数为基础，对振型和频率进行组合构造损伤标示量，实现对弹性薄板刚度薄弱区域的损伤定位。徐宏文等[7]提出一种基于模态曲率曲线拟合的板结构损伤识别方法。通过对损伤弹性薄板的模态曲率进行多项式曲线拟合，基于拟合值与未损伤原始值的差值构造损伤参数，成功识别了不同程度和位置的薄板刚度损伤。周奎等[8]以四边固定支承薄板作为研究对象，通过对柔度曲率进行多项式曲线拟合来构造损伤参数，实现了对平板结构局部损伤区域的准确定位。相比于基于模态曲率的方法，基于柔度曲率的损伤识别不需要用到损伤前的模态数据，更适合用于难以获取无损结构模态信息的结构损伤识别中。刘文光等[9]通过比较弹性薄板损伤前后的模态应变能变化率构造损伤参数，识别了弹性薄板在不同位置的抗弯刚度损失。结果表明，基于模态应变能的方法不仅对损伤单元更为敏感，还具有对边界信息的敏感性，除了定位损伤，还能对板的约束形式做出判断。

对于某些对振动特性不敏感的微小尺寸损伤，难以通过动力特性的变化对损伤进行识别时，基于振动响应的兰姆波检测则是一种有效的方法。兰姆波是一种

特殊的超声波，由于其具有波形稳定、传播距离远、衰减小、对损伤反应敏感等特点[10]，尤其适用于薄板或薄壁结构的损伤定位及成像。基于兰姆波的薄板结构损伤识别主要通过定义损伤指数来量化结构损伤大小，再利用超声波成像算法对损伤进行定位。

王月敏[11]使用压电陶瓷片同时作为激励器和传感器，基于兰姆波识别了四点固支薄板中的孔状损伤。鲁光涛[12]通过在铝板上粘贴附加质量来模拟结构损伤，提出一种基于混合时间和逻辑运算的时间延时叠加算法来减轻兰姆波的边界反射效应，提高损伤定位的精度。万陶磊和常俊杰[13]利用空气耦合超声探头在含有缺陷的铝板同侧激励和接收兰姆波，再对不同扫描点处的接收信号进行小波变换，最后利用提取的小波变换系数包络信号对铝板的缺陷损伤进行幅值包络成像。

当损伤发生在薄板结构的边缘或边角附近时，由于兰姆波在结构边界处的传播特性，边界反射信号可能会掩盖或混淆损伤反射信号，使得无法准确识别和定位损伤位置，这种现象被称为兰姆波的边界效应[14]。由于边界效应的存在，使得基于兰姆波的方法难以识别边界区域的损伤。为了改进这一缺点，綦磊等[14]提出了一种通过改进 STMR（单发射-多接收（Single Transmitter Multi Receiver,STMR））阵列的布置和相应的信号收发策略，利用“对称相消”对边界反射效应进行控制。结果表明，该方法对于发生在常规 STMR 阵列有效检测区域范围之外的损伤缺陷,仍然能够比较准确地识别与定位。在此基础上，李骏明等[15]通过设计不同类型和相对于边界不同损伤位置的薄板实验对该方法进行了进一步的量化研究。结果表明，基于改进的矩形 STMR 阵列检测方法能够大幅降低距离边界较近的损伤误差，有效解决了检测盲区问题。

随着计算机技术不断进步更新，机器学习和深度学习也被相继应用于薄板结构损伤检测领域。机器学习算法以损伤结构的动力响应数据作为输入，通过优化训练，挖掘出数据中的内在模式和抽象关系，提取出结构的损伤信息，从而实现对结构损伤的量化分析。赵林鑫等[16]将比例边界元法和机器学习相结合，提出一中缺陷反演模型来建立结构动力响应和损伤参数之间的映射关系。该文以带裂纹缺陷的薄板为研究对象，将观测点的动位移作为神经网络的输入，通过输出裂纹信息的反演参数，实现对缺陷位置及尺寸的精确识别和量化。裴振伟[17]利用反向传播神经网络和极限学习机对特征数据流进行处理，实现对薄板不同缺陷信号的识别和损伤分类。江守燕等[18]将基于比例边界有限元法获得的数据集和深度学习模型，建立薄板结构内多裂纹的反演模型，对裂纹状缺陷数量进行分类及对缺陷参数进行回归预测，实现在未知缺陷数量的情况下对缺陷的数量、位置和大小进行准确反演。Yao 等[19]利用卷积神经网络针对船舶领域中的船体结构板腐蚀损伤进行检测和识别。

尽管目前已有丰富的理论研究和实验方法对薄板内部的结构损伤进行检测、定位和量化，但大多数研究主要用于识别离散的结构损伤。无论是通过降低局部薄板的抗弯刚度，或是在某点采用附加质量损伤来模拟结构损伤，还是通过实际改变薄板厚度来构造穿透性或凹陷性的损伤，这些损伤都属于孤立的、离散的“点状”损伤，即默认仅在板中的几个局部区域存在明显的损伤，其他区域无任何损伤发生。而在实际情况中，我们不仅关注显著的“点状”损伤，我们还关心由结构分布式参数退化引起的“带状”或“面状”等连续性结构损伤，而目前对于此类损伤的研究仍较少。

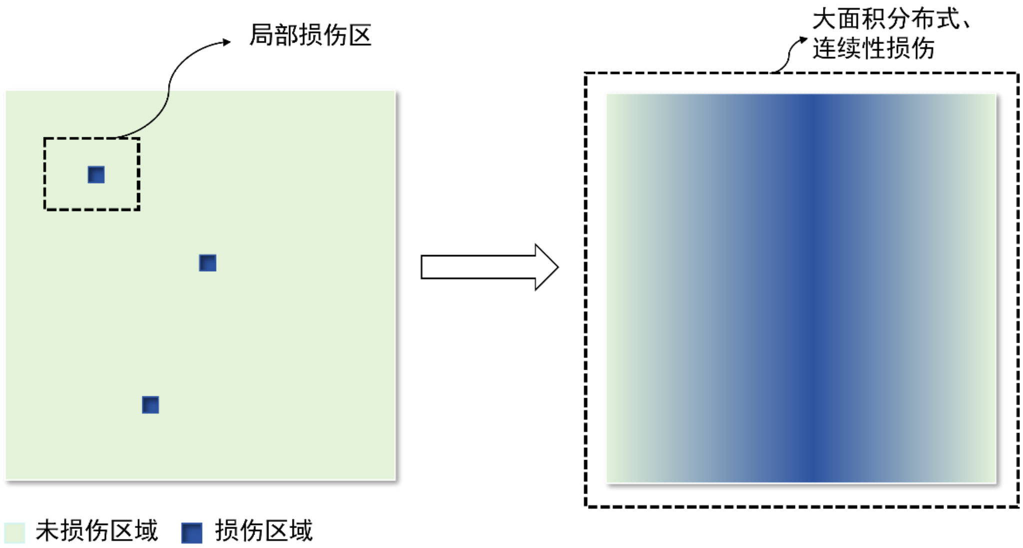


图 1.2 局部损伤与分布性损伤示意图

（2）薄板结构边界条件识别研究现状

边界条件的识别在薄板力学的研究中是一个关键难题。受施工质量、连接材料和环境因素等因素影响，实际薄板结构的边界条件常常是处于简支或固支等理论边界之间的弹性支承状态。当薄板的边界约束状态发生松弛或失效时，将极大地影响结构的承载能力和振动特性，危害结构安全。因此，准确估计薄板实际使用状态下的边界条件是薄板力学问题的重点研究方向之一。

朱继梅和相小宁[20]提出一种结合边界元数值计算和动态测试的方法对板类结构的边界条件进行识别。首先通过边界元法中的边界积分方程，建立边界离散点上的未知参数和薄板域内动力响应的映射关系。之后利用在板域内测得的有限点的响应数据，反求边界积分方程，从而确定边界上的刚度、阻尼等边界条件的参数。文中以弹性简支支承的悬臂矩形薄板为研究对象，悬臂端设置均布转动弹簧作为弹性约束，施加集中力作为外激振。通过提取板中有限点的响应值，准确估计了悬臂端弹簧的支承弯曲刚度值，实现对弹性约束边界的识别。之后，该学

者又对这一方法拓展到四边弹性支承板[21]。设置弹性支承边的边界转动刚度为均匀分布，通过联立求解包含边界未知参数的线性代数方程组，解出边界未知量，即可得到边界转动刚度的估计值。该方法仅用少量几个点的响应数据，就能准确反演出弹性边界的转动刚度，且误差很小。Ahmadian 等[22]提出了一种基于降阶特征方程解的方法，识别了弹性支承钢板的边界支承刚度。该方法利用模态测试获得结构在边界受约束时的自然频率数据，再结合有限元模型建立一组降阶特征方程，通过求解该方程组来确定边界刚度矩阵，实现边界参数的识别。Ahmadian 等[23]使用灵敏度优化算法来识别边界参数。文中使用均布分布的侧向弹簧和扭转弹簧模拟矩形板的弹性约束。构建薄板自由振动的特征方程用以表示边界参数与结构模态属性之间的映射关系。首先为未知边界参数设置一组初始化值，再使用特定的优化算法，通过最小化实验与预测模态特性之间的差异来估计边界参数，包括边界弹簧侧向刚度系数、扭转刚度系数和结构阻尼系数。

上述边界条件识别方法的本质是通过建立边界参数与结构响应或模态属性之间的关系，再求解方程组或使用优化算法求得边界参数或边界参数最优值，从而实现对边界条件的识别。然而不足之处在于，此类方法通常假设边界的约束是均匀分布的，也就是将整个边界的约束刚度简化为一个固定的参数进行计算，而忽略了空间上边界刚度的差异性。而处于实际服役状态的薄板边界，可能由于各种现实因素存在局部边界松弛、失效、或边界约束在空间上渐变式减弱等情况。对于此类更一般情况下的非均匀约束边界的问题，上述方法并不能提供有效的解决方案。

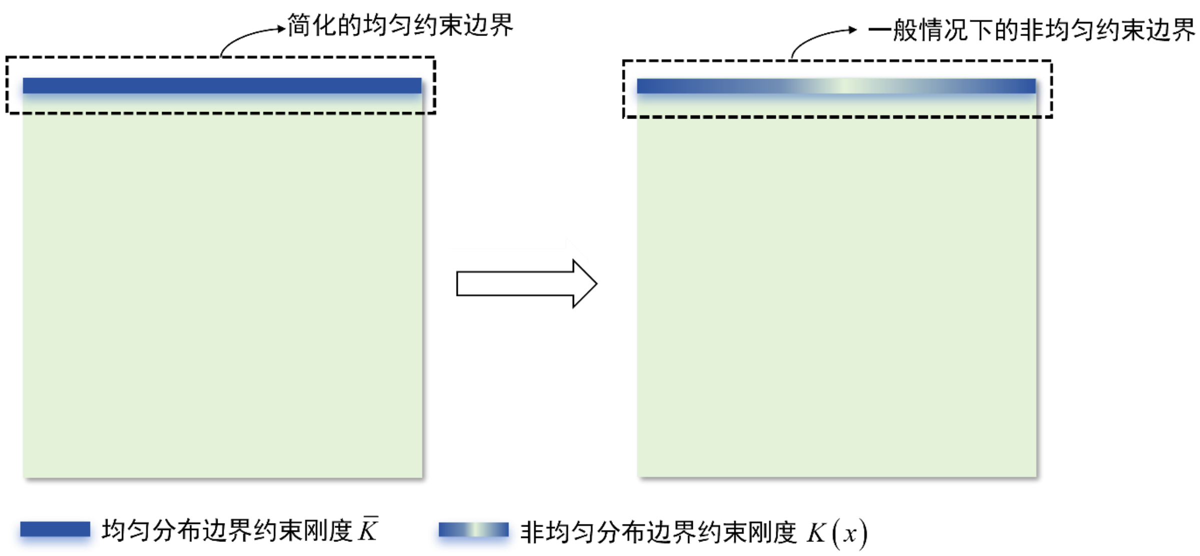


图 1.3 均匀分布与非均匀分布边界约束刚度示意图

1.2.2 力学反问题研究现状

固体力学的研究可分为正问题和反问题两个方面[24]。力学正问题是指系统的力学模型、初始条件和边界条件为明确已知的情况下，求解系统的响应或行为的问题。而力学反问题则是指当力学模型中存在部分未知的物理信息，通过部分已知的系统响应数据，逆向推导出缺失的参数或边界信息的问题。在本文的研究中，薄板力学正问题是指已知薄板的材料属性、边界条件和荷载分布，求解薄板结构的位移或振动响应。薄板力学反问题则是在部分边界条件为未知的情况下，通过结构响应数据反向推导出与该响应对应的薄板边界参数。

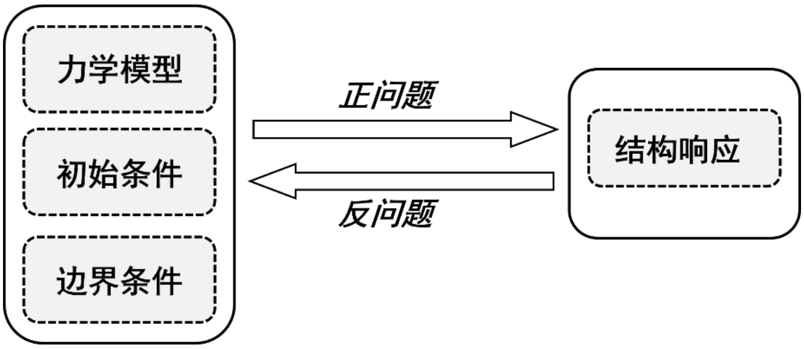


图 1.4 力学正反问题示意图

不管是薄板内部的损伤识别，还是边界条件的识别，本质都是薄板力学中的反问题。在工程领域，力学反问题可分为控制方程反问题、边界条件反问题、初始条件反问题、材料参数反问题或载荷条件反问题等类型。

反问题在数学上的一般描述为：给定算子 A：$X \to Y$，其中 X 和 Y 是度量空间，A 将模型空间 X 中的变量映射到数据空间 Y。反问题可以表达为，在给定观测数据 $g \in Y$ 的情况下，找到一个解 $f \in X$，使得 $A(f)$ 尽可能地接近观测数据 g，即

$$A(f) \approx g \tag{1.1}$$

式中：f 是模型空间 X 中的解，g 是数据空间 Y 中的观测数据，A 可以是积分算子、微分算子或者是代表物理系统的某种数学描述。

相比于力学正问题，求解力学反问题通常要困难的多。求解正问题主要涉及根据给定的参数集确定唯一的系统响应。而求解反问题，我们通常也希望系统的解是唯一的，即通过观测数据能够确定一个唯一的逆问题解。但在实际工程中，能获得的观测数据通常是有限的，而这些数据往往不包含足够的信息去唯一确定所有的参数。这导致反问题通常是不适定的，这意味着问题的解不连续依赖于初始值或输入数据，问题可能存在多个解，或者解在微小扰动下非常敏感，甚至有时无法找到唯一解。不适定性是反问题研究中的一个核心挑战[25,26]。其次，许多力学反问题都是非线性的。非线性会增加问题的复杂性，使得寻找精确的解变得

更加困难。此外，实际观测数据中通常包含噪声和测量误差，这些误差也会对反问题的解产生影响。

为了确保反问题解的唯一性，可以通过施加额外约束来实现。正则化是解决反问题的一种经典理论途径。正则化通过在目标函数中引入一个正则化项来限制解的空间，利用一系列与多解问题的解相近的适定稳定的解，来逼近原问题的真实解[27]。目前，以正则化为基础的理论分析方法主要包括 Tikhonov 正则化[28]、截断奇异值分解[29]、变分正则化[30]和迭代正则化[31,32]等。另外，还可以使用数值优化算法来求解反问题。数值优化算法的本质是通过最小化模型预测值与实际观测值之间的误差函数，以实现对观测数据的准确重建或模型参数的精确估计，常用的数值方法有梯度下降法[33-37]、牛顿法[38]、遗传算法[39]和最小二乘法[26]等。当需要对参数估计的不确定性进行量化时，还可以采用统计估计理论对反问题进行求解。常用的方法有最大似然估计和贝叶斯估计[25,40,41]，该方法在对量化参数的不确定性的同时，还能对观测数据中的不确定性和噪声进行考虑。

随着计算机技术的不断发展，物理信息神经网络（Physics-Informed Neural Networks, PINNs,）作为深度学习领域的一类特殊模型，因其出色的表征非线性的能力，被越来越多地应用于解决各类病态问题和反问题。PINN 是一种融合数据驱动和物理驱动模型的机器学习方法，本质上是将直接求解控制方程的问题转化为损失函数优化问题来寻找偏微分方程（Partial Differential Equation ,PDE）的解。其工作原理是将通过 PDE 表征的物理定律集成于神经网络的架构中，通过最小化目标函数来寻找方程的网络代理解。本质上，PINN 引入的物理定律相当于在神经网络的训练中引入一个正则化项。这个表征物理信息的正则化项会作为一个惩罚项来惩罚非物理解，限制解的空间，对问题提供额外的约束。Chen 等[42]使用深度神经网络作为反问题求解器，通过对解空间施加物理约束，根据汽车最终的损伤变形数据，成功识别了汽车碰撞前的初始条件。因此，用 PDE 表示的物理方程作为一种天然的正则化措施，使得 PINN 在求解反问题时具有较强的可行性和适用性。

在物理约束的基础上，还可以通过引入由实验或数值获得的观测数据来帮助约束解的唯一性。在这些数据上训练神经网络，可以使模型更好地理解数据背后的物理特性，挖掘出反映数据物理结构的函数、向量场和算子。在许多 PINN 求解反问题的实例中，添加域内解的观测值作为数据约束，对求解偏微分方程反问题是行之有效的[43-46]。总之，在使用 PINN 进行反问题分析时，引入物理信息或观测数据作为额外约束，对确保逆问题解的唯一性，消除问题的不适定性是至关重要的。

使用 PINN 求解反问题的能力已在多个工程领域中得到成功验证。根据反问

题的应用类型，可分为参数估计、空间场估计和时空场估计等方面。

1) 参数反演

参数估计反问题是利用 PINN 识别 PDE 中的定值参数问题，这些参数通常用于描述物理系统的局部性质。Jagtapa 等[47]提出保守型物理信息神经网络 conservative physics-informed neural network，cPINN），将计算域划分为 4 个子域，采用自适应激活函数，每个子域根据域内解的特性选择不同的网络架构和训练集。通过这种方法，该团队成功地识别了粘性 Burgers 方程中的三个常数型未知数（波速α、扩散系数β和色散系数ν）的值；Haghighat 等[48]将 PINN 应用于固体力学，建立用于参数估计的反演模型，对线弹性和非线性弹塑性问题中的两个物理参数（λ和μ）进行估计；Hamel 等[43]使用边界位移数据和全局力-位移数据作为训练数据，对超弹性本构模型的模型参数进行识别；Kadeethum 等[44]应用 PINN 来解决关于非线性 Biot 方程的逆问题，对方程中描述多孔介质物理性质的参数进行估计，并研究了不同批次大小对参数估计准确性的影响；Mao 等[45]利用 PINN 从给定的密度、压力和速度场数据中，识别参数化二维斜波问题的状态方程中表征多向性气体的绝热指数γ的值；Fang 和 Zhan[49]基于 PINN 求解频域麦克斯韦方程逆问题，识别出与给定源波数据对应的相对磁导率和介电常数。

2) 空间场反演

空间场反问题是利用 PINN 识别 PDE 中的参数分布问题，此类参数不是一个常数或者定值，而是一个与位置有关的函数，通常用于描述系统的材料分布。Chen 等[50]用赫尔姆霍兹方程来约束 PINN，利用有限元模拟的电场分布作为训练数据，对两种不对称二聚体的介电常数（$\varepsilon_0(x,y)$和$\varepsilon_1(x,y)$）的二维空间分布进行了反演；Shukla 等[51]通过引入弹性波动方程作为物理信息，利用实测波场数据，对方程中的未知参数——材料柔度系数$\hat{c}_{44}(x,y)$的空间变化进行识别；Yu 等[53]将 PDE 残差的梯度信息添加到损失函数中，对一维扩散反应系统中随空间变化的反应速率$k(x)$进行识别；Tartakovsky 等[46]同样对线性扩散方程中随空间分布的扩散系数$K(x,y)$进行了识别。他们利用局部位置的域内解和扩散系数的真实值作为数据约束，预测值与真实值的相对误差约为 1.7%；Deng 等[52]将 PINN 用于解决典型开孔板试件非均匀变形建模中的线性弹性问题。使用带噪声的域内位移数据，分别识别了开孔板内弹性模量$E(y)$和泊松比$\upsilon(x)$的函数型空间分布；Zhang 等[53]使用了两个独立的神经网络，分别用于预测正演问题的解和未知的材料参数场，添加实测位移数据作为约束，识别了非均质超弹性材料的剪切模量场$\mu(x,y)$。

3) 时空场反演

与空间场不同，求解时空场的反问题中未知参数通常是一个与空间和时间有

关的函数，常用于描述系统的动力响应场。Raissi 等[54]通过将 NavierStokes 方程编码到 DNN 中，使用随机分散的浓度场点云数据，对经典二维流体中的速度场 $v(t,x,y)$ 和压力场 $p(t,x,y)$ 进行反演；Go 等[55]使用基于 PINN 的虚拟热传感器代理模型，利用少量温度传感器测量的温度数据来估计非传感器区域的温度场 $T(t,x)$，并研究了不同程度噪声对估计结果的影响。

在求解薄板力学反问题领域，已有学者对 PINN 的有效性进行了验证。唐明健等[56]将薄板的边界条件反问题转化为二分类问题，通过估计表征边界状态的参数值对边界条件进行识别。文中利用薄板的挠度和应力数据作为 PINN 的数据约束，结合薄板的基本控制方程和边界方程，成功识别了对边简支对边固支矩形薄板的四个边界条件。在此基础上，唐和生[57]通过引入深度迁移学习对该算法进行增强。结果表明，基于迁移学习的 PINN 模型可以使用更少的训练样本对矩形薄板的边界条件进行识别，且模型的预测精度较高及泛化能力更强。

尽管上述研究为 PINN 用于求解薄板的边界条件反问题开创了先河，但仍囿于识别简支或固支等经典边界条件的范畴。且与传统识别弹性边界条件的弊端类似，其仍旧是把边界条件简化为一个固定的参数进行求解。然而，对于更一般情况下的复杂和非均匀边界条件，基于固定参数的识别方法将难以适用。为了克服以上的局限性，本文提出一种更灵活和通用的方法来实现任意分布的边界条件表征，并通过建立物理信息双子网络模型，对边界上的空间分布函数进行反演，以实现薄板连续边界条件的准确识别。此外，还将建立基于 PINN 的空间连续参数变化薄板力学反演模型，旨在通过反演二维空间分布函数，实现板全域内的连续结构损伤识别。接下来将详细讲述物理信息神经网络的研究现状。

1.2.3 物理信息神经网络研究现状

（1）物理信息神经网络的发展历程

近年来，机器学习算法被广泛应用于各种科学研究和工程领域中[58-61]。机器学习是人工智能的一个分支， 旨在设计和开发能够从数据中学习并自动改进的算法和模型，其目标是让计算机系统能够从经验中学习，并根据学习到的模式和规律做出决策或预测[62]。

深度学习是机器学习的一个子领域，其核心是具有多个隐藏层的神经网络，也被称为深度神经网络（Deep Neural Network, DNN）。DNN 相比普通神经网络具有更深的层次结构，已被证实是一种具有强大表达能力的通用函数逼近器，能用于表示复杂系统中潜在的非线性映射关系[63]。特别是在处理具有显著非线性效应、高维度或多物理场耦合等传统数值方法难以解决的偏微分方程问题时，深度学习表现出巨大的潜力。

在深度学习中，充分利用数据来驱动模型的学习和优化过程的算法类型被称为数据驱动深度学习，其强调通过收集、分析和利用大量数据来发现数据底层的规律和结构关系，以便进行预测及做出决策。数据驱动型深度学习已在计算机视觉、自然语言处理、医学影像分析等多个领域取得了巨大成功[64-67]。在数据驱动算法中，充足的高质量数据是实现深度学习成功的关键，数据越丰富模型就会表现地越好。

然而，在许多实际工程领域，数据的采集往往面临着成本高昂、技术限制和环境限制等难题，因此，可靠的、高质量的数据通常是珍贵且稀少的。在此类小样本的稀疏数据情境下，纯数据驱动模型往往难以充分学习到数据的潜在规律和内在联系。此外，在许多领域，系统行为受到守恒定律等物理规律的约束，而纯数据驱动模型只是对数据进行直接拟合，而缺乏对数据背后物理规律的理解和约束。

为了弥补以上的不足，研究人员开始探索如何将物理学的原理融入神经网络中，旨在在数据稀缺或成本高昂的情况下，提高深度学习模型预测的准确性、可解释性和鲁棒性。2017 年，Raissi[68]等基于贝叶斯机器学习技术，提出一种用于挖掘由参数线性算子表示的控制方程的数据驱动算法。该算法根据先验算子的特殊形式对高斯过程进行修改，最终成功从稀缺和包含噪声的观测数据中推断出线性方程的参数。

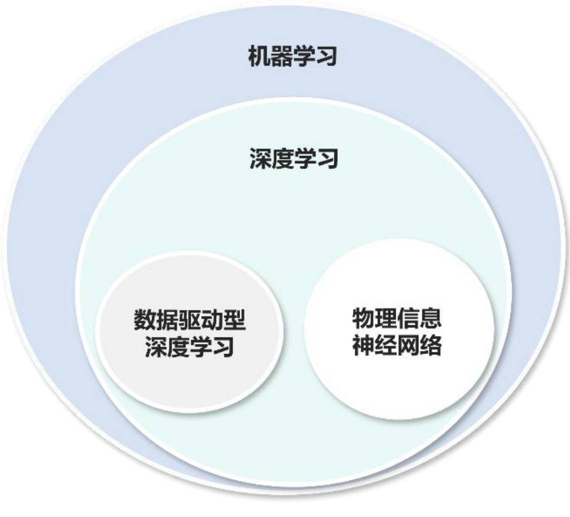


图 1.5 神经网络算法层级图

在此基础上，该团队[69]于 2018 年首次引入了由偏微分方程表示的潜在物理模型，提出了一种从少量且含有噪声的数据中学习一般参数非线性偏微分方程的计算框架，可以在数据稀缺的研究场景下有效地提取观测数据中的底层物理信息。

2019 年，Raissi 等[70]首次提出“物理信息神经网络（PINNs, Physics-Informed

Neural Networks）”的概念，将用偏微分方程表达的物理规律编码进模型中，由此构建的神经网络成为一类新的通用函数近似器，可以直接处理非线性问题，而无需进行任何先验假设、线性化或局部时间步进。PINN 通过将物理规律嵌入到神经网络的结构中，使模型能有效地学习复杂偏微分方程的解，并在相对较少的数据样本下获得高质量的解。PINN 在解决偏微分方程问题方面展现出的巨大潜力，使得它日渐成为众多学者的研究热点。

（2）物理信息神经网络的应用

PINN 在多个学术领域得到了广泛应用，主要用于处理涉及不同领域物理规律的偏微分方程。在 PINN 的基础框架上，出现了许多变体 PINN。

Pang 等[71]为求解时空域下分数对流扩散方程，提出了分数物理信息神经网络（fractional PINNs, fPINNs）；Meng 等[72]为解决实际应用中只有少量的高保真数据可用，而廉价的低保真数据可能大量存在的现状，提出了一种基于多保真度数据的复合物理信息神经网络（PINNs with Multi-fidelity data sets, MPINNs）；Dwivedi 等[73]提出了分布式物理信息神经网络（Distributed PINNs, DPINNs），研究证明该改进算法具有更高的数据效率和鲁棒性，并解决了深度 PINN 的梯度消失问题。

Jagtap 等[47]提出了一种名为保守物理信息神经网络（Conservative PINN，cPINN）的方法，用于处理非线性守恒定律在离散域上的问题。cPINN 将计算域分解为多个非重叠子域，并通过在子域之间强制保持流量的连续性来确保守恒量。该方法被证明在解决高维非线性微分方程问题上具有较高的收敛速度和灵活性。此外，cPINN 还具有并行化的能力，有望进一步降低训练成本。

Kharazmi 等[74]在 Petrov-Galerkin 方法的背景下，使用变分形式的损失函数项，构建了一个基于变分形式的物理信息神经网络（Variational PINNs, VPINNs）。该网络通过将被积函数以变分形式进行部分积分，降低了神经网络所代表的微分算子的阶数，从而有效地降低了训练成本，与 PINN 相比进一步提高了预测精度和训练速度；之后 Kharazmi 等[75]结合了 DNN 的非线性逼近和 hp 细化技术,提出了针对高阶多项式空间的变分物理信息神经网络（high-order polynomials -VPINN, hp-VPINN）。hp-VPINN 通过将计算域分解和投影到高阶多项式空间来提高求解的精度和效率，用于处理如奇点、陡峭解、急剧变化的粗糙解和输入数据。

Yuan 等[76]提出了辅助物理信息神经网络框架（Auxiliary PINNs，A-PINN）用以解决非线性积分微分方程的正向和反向问题。A-PINN 采用多输出神经网络来同时表示主要变量和方程中的积分，通过使用自动微分来替代积分操作，绕过了神经网络处理积分操作的局限性，避免了积分离散化所引入的离散化和截断误差。

Wang 和 Zhong[77]提出了自动搜索最佳神经架构物理信息神经网络（Neural architecture search-guided PINN，NAS-PINN）。NAS-PINN 通过构建混合操作并引入掩码来实现不同形状张量的加法，将架构搜索问题放宽到连续的双层优化问题中。NAS-PINN 可以在给定的搜索空间中搜索最合适的隐藏层数量和每层的神经元数量，并构建给定问题的最佳神经架构。各种数值实验证明了 NAS-PINN 的有效性，尤其对于不规则计算域和高维问题其具有强大的适应性。

（3）物理信息神经网络的优势与局限性

现有研究表明，对于较为复杂的非线性正向、适定问题，现有的基于数值网格的求解器在计算精度和效率上仍优于 PINN[78]，但对于传统方法经常遇到限制的病态问题、反问题、稀疏或含噪声的数据、量化不确定性和解决高维问题等领域，PINN 表现了显著的优势。

PINN 可以处理不完善的模型或部分信息缺失的问题。PINN 因其公式固有的平滑性和规律性，使得其在处理不完善的模型例如缺乏初始条件、边界条件，或 PDE 中存在未知参数等问题时，通过将物理规律嵌入到神经网络中，可以利用少量的观测数据来对缺失的物理信息进行正确推断。

第一，PINN 拥有在稀疏数据情境下的强泛化能力[5,79]。PINN 通过强制将物理规律嵌入到深入学习模型中，可以有效地将模型约束在一个较低维度的流形上，因而可以用少量的数据进行训练。Cai 等[79]指出 PINN 能够使用稀疏测量数据，将多重保真方法与物理方程直接编码到神经网络架构中，并准确地推断速度和温度场以及未知的热边界条件或界面；

第二，PINN 能够在存在噪声的情况下进行预测。Yang 等[80]将贝叶斯神经网络（BNN）和物理信息神经网络（PINN）相结合，用于解决涉及噪声数据的正向和反向非线性问题；Go 等[55]发现即使测量数据中存在噪声，PINN 模型也能够准确地预测温度场和输入热通量，并且跟踪地面真实数据的趋势。

第三，PINN 还能通过在神经网络模型中引入不确定性的参数或者使用概率模型，对系统的不确定性进行有效地量化和处理，以实现对多尺度和多物理场系统的演化进行可靠预测[80]。

最后，PINN 可以实现对高维数据的有效建模和预测[81,82]。通过神经网络将目标函数分解成许多局部函数的组合，这种分层组合的方法使得神经网络能够更有效地处理复杂的数据模式，解决维数灾难问题。

尽管在解决各种复杂问题时 PINN 显示出了突出的潜力，其自身仍然存在局限性，损失函数中不同项的竞争和多尺度相互作用是 PINN 所面临的挑战和局限性之一。在 PINN 中，代表物理规律的 PDE 通常以残差形式及其边界条件被引入复合目标函数（损失函数）中作为一种软惩罚参与神经网络的训练，本质是高

度非凸优化问题。这些损失函数通常由多个项组成，在训练过程中各项可能会相互竞争，训练过程不一定是鲁棒的和稳定的，因而不能保证收敛到全局最小值。因此，对于不同类型的 PDE，通常需要制定不同的目标函数，这也是 PINN 严重局限性的来源。

为了缓解这种由尺度不平衡引起的病理行为，Wang 等[83]提出了一种经验学习率退火方案。具体来说，即为损失函数各项引入权重系数（实质为对应于每个损失项的学习速率的缩放），再利用训练期间的反向传播梯度统计数据，自适应地为 PINNs 损失函数中的不同项分配权重值，目的是平衡反向传播梯度的大小。

已有研究表明，传统的全连接神经网络（PINN 使用的架构）存在“频谱偏差”（Spectral Bias），即在实践中难以学习高频函数。Rahaman 等[84]自制一个几种正弦波叠加的函数给模型进行回归训练，并对模型进行傅里叶分析，发现从一开始，模型只有低频分量，随着训练迭代的增加，高频分量才慢慢增加。这意味着神经网络更容易率先学习低频信息，随着训练的进行才逐渐学习更高频的信息。文章还在模型收敛后对每个参数添加随机扰动，发现高频分量对扰动非常敏感，表明较低的频率对网络参数的随机扰动更鲁棒，而要捕捉高频信息，则需要参数之间更精确的配合。

Wang 等[85]提出 PINN 同样存在频谱偏差，且其损失函数的不同分量的收敛速度存在显著差异。对于全连接网络，NTK 矩阵较高特征值对应的特征向量通常表现出较低的频率，这意味着损失函数中具有 NTK 矩阵较高特征值的分项将会被更快的学习，收敛速度会更快。为缓解这种病态收敛行为，文中提出了一种新的算法，即根据总训练误差中不同分量的平均收敛速度（由损失函数各项的 NTK 矩阵特征值运算得出），动态更新 PINN 损失函数中不同项的系数。

1.3 本文基本研究内容介绍

结构损伤可归因于外部荷载或环境因素等的作用，导致系统物理参数发生退化或改变的现象。传统的损伤检测方法通常基于结构参数为定值的假设，并通过反演该固定的、离散的参数来进行损伤识别。然而，对于因材料参数渐行性退化引起的空间分布性、连续性结构损伤，基于固定参数反演的传统结构损伤识别往往不适用。对于此类分布式参数的反演，本质上是求解函数空间反问题。近年来，PINN 作为一种新兴的人工智能科学计算范式，在反问题求解领域展现了突出的潜力。因此，本文将以典型薄板结构为研究对象，旨在通过建立 PINN 深度学习模型求解薄板力学反问题，实现对分布式材料参数的反演，以识别结构中连续性和非均质性损伤。具体来说，将分别对弹性支承薄板的连续边界条件和内部结构

参数的空间分布进行识别。此外，本文拟采用自适应激活函数对基本 PINN 框架进行算法改进，以增强模型的非线性表达能力和泛化性能。本文各章节的逻辑关系如图 1.6 所示，主要内容如下：

第一章为绪论，依次阐述了本研究相关领域包括薄板结构损伤识别、力学反问题和物理信息神经网络的研究现状。

第二章为物理信息神经网络理论与力学正反问题，将首先对 PINN 的基本原理和训练机制作进一步的介绍，之后分别对力学正反问题的数学定义、一般性的网络拓扑结构和相应的算法步骤进行阐述。

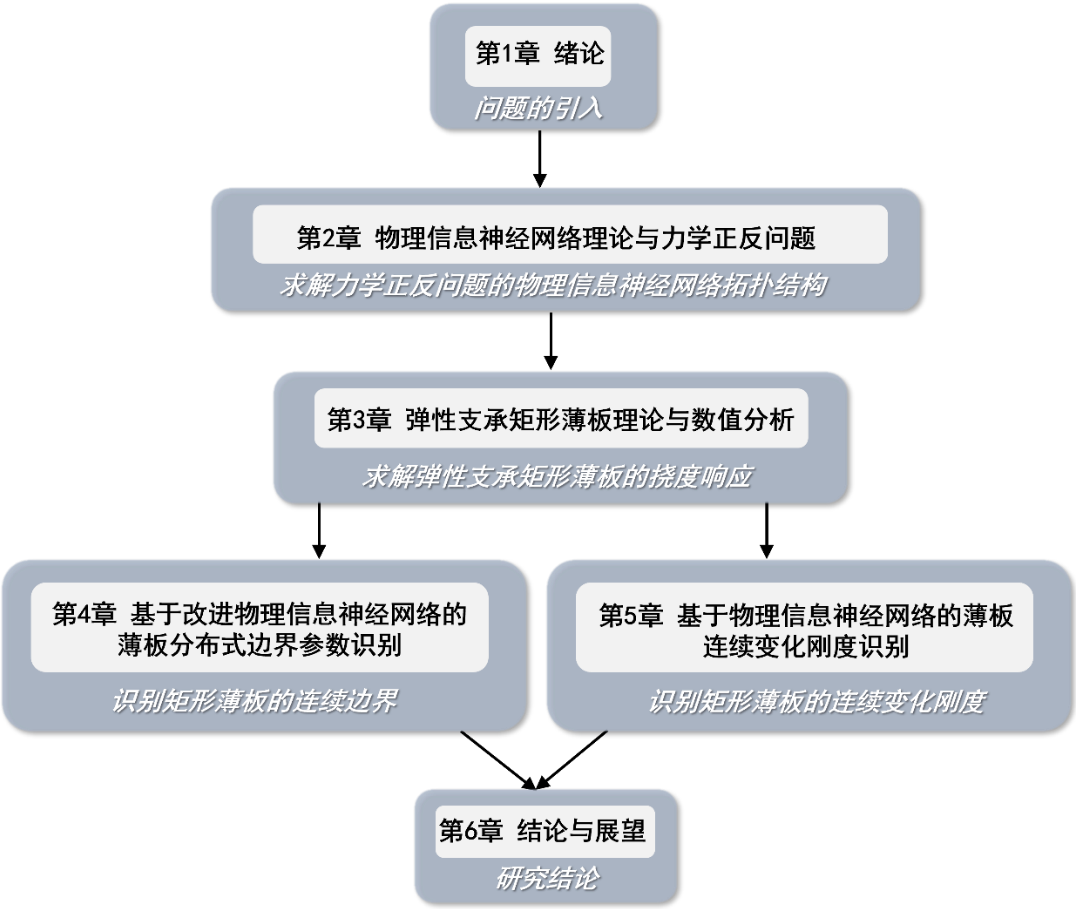


图 1.6 各章节逻辑关系示意图

第三章为弹性支承矩形薄板理论与数值分析。薄板结构边界上连续的弹性约束将被离散为边界节点上额外施加的转动约束刚度，通过设置其不同的函数分布可以模拟薄板不同的边界约束和损伤状态，并采用基于 MATLAB 的有限元编程对弹性支承薄板的力学响应进行分析。

第四章为基于改进激活函数的 PINN 识别弹性支承矩形薄板的连续边界条件。弹性支承边界的转动约束刚度将被设置为沿边界呈空间变化的函数分布形式来定义连续型的边界损伤。采用自适应激活函数对基本 PINN 框架进行算法优化，

通过构建基于改进算法的 PINN 深度学习模型求解薄板边界反问题，实现对边界上转动刚度函数空间的反演。

第五章为基于标准 PINN 框架识别矩形薄板的连续内部损伤。薄板的抗弯刚度将被设置为一个空间分布函数，并通过折减其数值引入内部结构损伤。结合响应数据、物理控制方程和边界条件，建立基于 PINN 的内部参数反演模型，通过求解薄板内部参数反问题，对薄板域内弯曲刚度的空间分布进行反演。

第六章为结论与展望，主要对本文研究内容进行归纳和总结，指出本文研究存在的问题和困境，并对未来的研究方向提出了展望。

第2章　物理信息神经网络理论与力学正反问题

2.1 引言

在传统的数据驱动机器学习中，模型通常需要大量高质量的标签数据来进行训练。而 PINN 通过引入物理方程的约束来补充和增强数据的有效性，使得其在数据稀缺的情境下仍具有优异性能。而相比于传统数值分析，PINN 作为一种端到端的学习机制，无需显式的网格划分或手动特征提取，就能直接从输入数据到输出结果进行预测。无论针对正向问还是反向问题，PINN 都能提供统一的网络架构通过调整优化参数自适应地求解。

本章将首先对 PINN 的基本原理进行介绍，包括物理信息的嵌入方式和边界条件及初始条件的添加方式等。之后将分别对用于求解力学正反问题的 PINN 基本框架进行阐述，包括力学正反问题的数学定义、PINN 网络拓扑结构和相应算法步骤。最后将对激活函数进行介绍，并阐述其对网络训练性能的影响。

2.2 物理信息神经网络基本原理

在涉及科学和工程领域中的建模和预测问题时，可以根据可用的数据量和对系统物理规律的了解程度对问题分为三类，如图 2.1 所示。第一类问题对系统行为背后的物理机制和规律有全面的理解，但可用于验证和调整模型的实际数据量相对较少。在这种情况下，主要依赖于对物理规律和数学描述的完整了解，通过建立高度精确的数学模型对系统作出预测。传统的数值方法如有限元法、有限体积法都属于这一类别。但由于这些方法对准确的物理模型的高度依赖，如果物理方程不完整，对材料性质不了解，或缺乏对系统参数和边界条件的精确描述，则可能导致模型不收敛或错误的结果；第二类问题有大量的数据可供分析，但缺乏对系统行为和背后的物理原理的深入理解。大部分传统的机器学习方法和数据驱动深度学习模型都属于这一类别，主要依赖于输入和输出之间的统计关系和模式，通过训练数据来学习输入到输出的映射关系，而不考虑数据背后的物理规律或系统的结构信息。这种数据驱动的方法在许多领域如图像识别、语音识别、自然语言处理等领域表现出色，但对于涉及复杂物理系统或工程领域的问题时，则缺乏物理解释性和可解释性。并且数据驱动的方法高度依赖于训练数据的质量和分布。如果数据存在噪声、缺失或不完整，模型的准确性和泛化能力会受到影响。

在实际工程和科学应用中，我们常常面临数据获取成本昂贵、数据稀缺或不足，但系统又遵循一定的物理规律的情况。这就是第三类问题，介于前两类问题之间，有部分观测数据可用，对系统的部分物理规律有一定了解，但可能存在数据有瑕疵或对某些参数和具体的物理行为不完全清楚。在这种情况下，纯数据驱动方法或传统的物理模型可能都无法很好地解决问题，因此需要综合利用数据和物理知识来构建全面的模型。

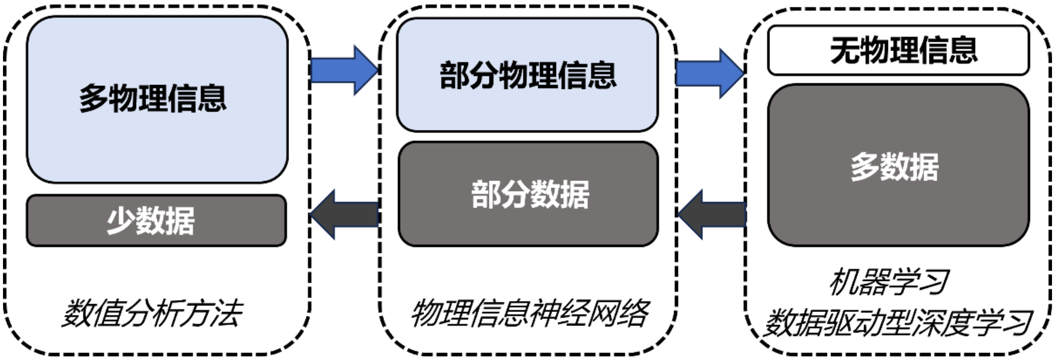


图 2.1 数据和物理信息之间的关系

PINN 的出现可以被视为一种介于传统物理建模和纯数据驱动方法之间的新方法，它通过将物理信息作为约束条件嵌入到神经网络的训练中，确保模型在正确拟合数据的同时，能够遵循和满足物理规律的约束。

物理模型通常用偏微分方程来描述，如物理学中的泊松方程（Poisson’s equation）、流体动力学中的纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程组、电磁场理论中的麦克斯韦（Maxwell）方程组和量子力学中的薛定谔方程（Schrödinger）等。在 PINN 中，物理信息的嵌入有不同的方式，最常用的是使用自动微分技术（Automatic Differentiation，AD）[86]将 PDE 添加为神经网络的损失函数。由于神经网络使用平滑的激活函数来逼近复杂的非线性函数，使得神经网络的输出 $\hat{u}_\theta$ 在输入空间中变化连续且光滑，因此可以利用 AD 技术，根据 PDE 的形式依次求网络输出 $\hat{u}_\theta$ 相对于网络输入 $\mathbf{x}$ 的导数。AD 是一种计算函数的导数的方法，通过计算图和链式法则，实现了对复杂函数导数的高效计算。AD 分为前向模式和反向模式，在 PINN 中，通常使用反向模式的 AD 来计算 PDE 项损失函数关于神经网络参数的梯度。将各阶梯度整合为方程残差项加入到模型的目标函数中，参与模型优化训练，即完成了物理信息的嵌入。

另外，还可以用变分能量的形式构造损失函数来引入物理信息。Goswami 等[87]提出一种解决脆性断裂问题的新 PINN 算法。不同于大多数 PINN 算法以 PDE 方程的残差作为优化目标函数，该文利用最小化系统的变分能量进行训练。结果

表明，变分能量函数的导数阶数比传统PINN中使用的残差形式的阶数低，因此，网络训练的速度更快，基于变分能量的 PINN 性能更好。

PINN 是通过最小化损失函数来逼近输入和输出之间的复杂非线性映射关系。PINN 的损失函数由数据拟合项和物理约束项两部分组成。数据拟合项通过最小化网络输出与真实数据的差异来确保模型能够拟合已知的数据，物理约束项通过最小化 PDE 的残差来确保模型在学习过程中满足物理规律。由于 PINN 的损失函数通常由多个非凸项组成，实际上是高度非凸优化问题，不同项的损失函数可能会相互竞争，导致训练过程不稳定或无法收敛到理想的解。在这种情况下，需要设计合适的损失函数来考虑不同项之间的相互作用以及模型在多个尺度下的表现。合适的权重设置可以缓解这种竞争关系，平衡各项损失的贡献。引入权重系数的方法可以通过手动设置，或者采用自适应调整权重。自适应算法[88]是根据模型的表现和损失函数的特性，在训练过程中动态调整权重系数。

为了确保解的存在且唯一以及正确描述物理系统在边界处的行为或状态，需要通过考虑边界条件和初始条件为模型提供额外的信息。在 PINN 中，通常会通过对网络输出在边界处或初始位置的计算来实现将边界条件和初始条件添加到损失函数中。这种将约束条件以加权损失函数的形式引入优化问题的约束形式，被称为软约束（Soft Constraint）[89]。许多现有的 PINN 框架就通过在边界的配置点上创建额外的损失分量来对约束边界。这类软约束允许在一定程度上权衡边界约束条件和目标函数，可以更灵活地处理多目标优化问题。但缺点是无法保证对边界条件的严格满足，且由于需要平衡约束条件和目标函数之间的关系，软约束问题的优化过程可能会很复杂。以软约束形式添加的边界条件，由于边界项损失分配的权重可能会影响模型的学习效率，因此需要仔细调整各项损失的权重。而对于权重系数的确定，目前仍缺乏系统的理论指导，通常依赖于人为经验的选择。Hou 等[103]给出训练建议，可以给确定性较高的、容易学习的项分配较大的权重，而对于不确定性较高的项，则适当降低其权重系数，这将有助于神经网络在训练过程中更加有效地利用先验信息，加速网络收敛并提高整体的训练效率和稳定性。

与软约束相反，在优化问题中以严格的等式或不等式条件形式强制满足约束条件的约束形式被称为硬约束（Hard Constraint）[89]。在 PINN 中，边界条件通过硬约束添加，能够确保模型输出的解满足所有边界条件，还能有效避免软约束下由于误差的不断积累导致模型逐渐偏离物理规律的问题。Goswami 等[87]通过修改网络输出使边界条件精确满足，损失函数中不存在边界损失分量。这种边界条件的施加方式相比于将边界条件添加到损失函数中要更简单和更稳健。使用硬约束可以简化优化问题的形式，对于某些问题可能带来更简单的求解模式，提高求解的稳定性和收敛性。但过于严格的硬约束也会限制模型的灵活性和泛化能力。

2.3 正问题

正问题是指在给定初始条件和边界条件的情况下，通过求解描述系统行为的PDE，得到系统的解析解或数值解的问题。利用PINN求解PDE正问题，可以理解为通过参数化的方法来逼近一个函数的过程。一个物理系统的动态行为和演化过程可由一组参数化的非线性偏微分方程来描述：

$$\mathcal{F}^{\lambda}u(\mathbf{x},t)-f(\mathbf{x},t)=0,\qquad \mathbf{x}\in\Omega,t\in[0,T] \tag{2.1}$$

边界条件为：

$$\mathcal{B}^{\lambda}u(t,\mathbf{x})=0,\qquad (t,\mathbf{x})\in(0,T)\times\partial\Omega \tag{2.2}$$

初始条件为：

$$\mathcal{IC}^{\lambda}u(t,\mathbf{x})=0,\qquad (t,\mathbf{x})\in\{0\}\times\Omega \tag{2.3}$$

式中，$\mathbf{x}$为自变量空间，Ω是欧式空间$\mathbb{R}^d$的一个子集，$\partial\Omega$是边界上的向量空间，t为时间变量，T为停止时间，$\mathcal{F}$是包含参数集合$\boldsymbol{\lambda}$的微分或积分算子，$f(\mathbf{x},t)$是系统的外部激励，$u(\mathbf{x},t)$是方程的解。

求解PDE正问题，就是用含参数$\boldsymbol{\theta}$的神经网络输出$\hat{u}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\lambda})$代替非线性偏微分方程的隐藏解$u(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\lambda})$，其中PDE的参数集合$\boldsymbol{\lambda}$为已知量。用于求解正问题的PINN拓扑结构如图2.2所示。

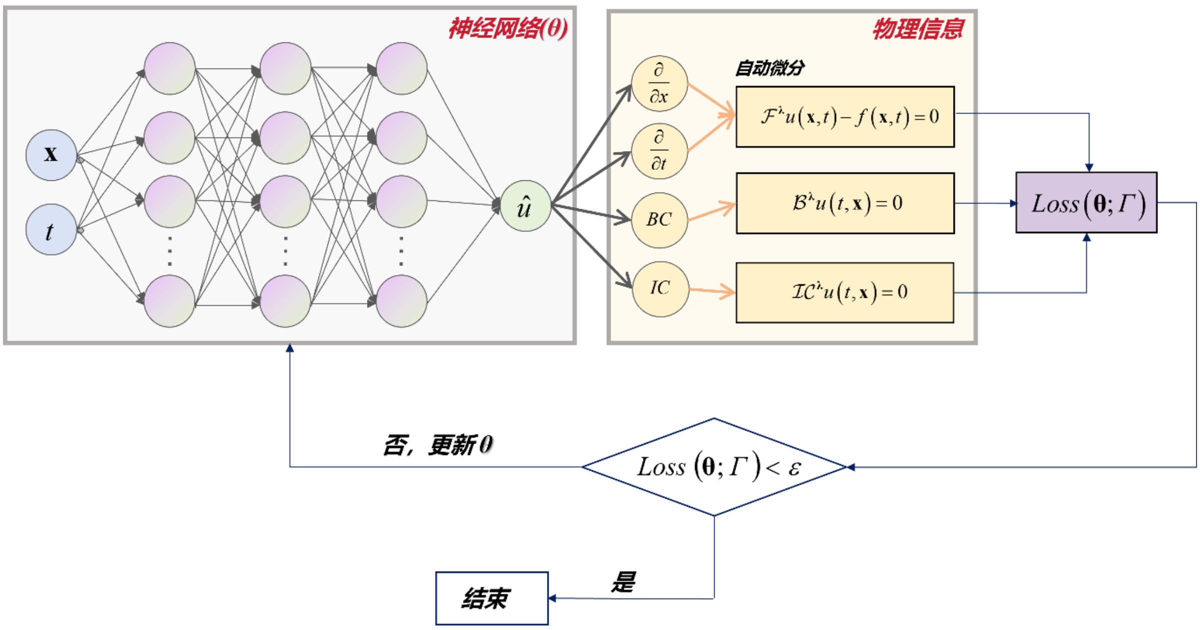


图 2.2 PINN 正向模型网络架构图

求解 PDE 正问题的算法步骤如下：

首先构造包含隐藏层和激活函数的神经网络，网络输入为空间$\mathbf{x}$和时间t，网络输出为待求 PDE 的近似解$\hat{u}\left(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\lambda}\right)$。接着，为 PDE、边界条件和初始条件指定训练集，分别为Γ_f、Γ_{BC}、Γ_{IC}，将其统称为Γ。对于不同的训练集，神经网络接收各训练集的空间$\mathbf{x}$和时间t作为输入，经过一系列隐藏层和激活函数计算网络输出$\hat{u}\left(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\lambda}\right)$，$\boldsymbol{\theta}$这里是神经网络待训练优化的参数，包含权重和偏置。之后，利用 AD 技术计算输出函数$\hat{u}\left(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\lambda}\right)$相对于输入$\mathbf{x}$和$t$的各阶梯度，可以获得 PDE 的损失项$L_{PDE}$、边界条件的损失项$L_{BC}$、初始条件的损失项$L_{IC}$，如下所示。

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}=Loss\left(\boldsymbol{\theta},\Gamma_{\mathcal{F}}\right) \tag{2.4}$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}}=Loss\left(\boldsymbol{\theta},\Gamma_{\mathcal{B}}\right) \tag{2.5}$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{IC}}=Loss\left(\boldsymbol{\theta},\Gamma_{\mathcal{IC}}\right) \tag{2.6}$$

这些损失项的加权和构成了优化问题的目标函数：

$$\mathcal{L}\left(\boldsymbol{\theta},\Gamma\right)=\omega_{\mathcal{F}}\mathcal{L}_{\mathcal{F}}+\omega_{\mathcal{B}}\mathcal{L}_{\mathcal{B}}+\omega_{\mathcal{IC}}\mathcal{L}_{\mathcal{IC}} \tag{2.7}$$

式中，$\omega_{\mathcal{F}}$、$\omega_{\mathcal{B}}$、$\omega_{\mathcal{IC}}$是对应损失项的权重系数，用来平衡不同约束条件的重要性。获得总损失函数$\mathcal{L}\left(\boldsymbol{\theta},\Gamma\right)$后，利用选择的优化算法如梯度下降法等根据总损失函数的梯度信息$\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\mathcal{L}\left(\boldsymbol{\theta},\Gamma\right)$对神经网络的参数$\boldsymbol{\theta}$进行更新。参数更新后重新计算网络输出，然后迭代这个过程，直到达到预设的迭代次数。通过以上过程，神经网络逐渐学习和优化，使得最终迭代次数输出的函数$\hat{u}(x,t;\boldsymbol{\theta})$能够逼近满足 PDE 的解。

2.4 反问题

2.4.1 反问题的不同类型

与正问题不同，反问题中 PDE 中的参数集合$\boldsymbol{\lambda}$存在未知量，即描述物理系统的部分信息不完整或缺失。求解 PDE 反问题即是根据已知的结果或数据，逆向解析出导致这些结果的缺失的物理信息或未知参数。根据未知参数的性质，反问题可分为固定参数、空间函数、时空函数和随机过程等类型。

（1）固定参数反问题

固定参数反问题是指未知参数通常为一个常量或常量的集合。该物理系统可用参数化的偏微分方程表达为：

$$\mathcal{F}^{\lambda}u(\mathbf{x},t)-f(\mathbf{x},t)=0, \qquad \mathbf{x}\in\Omega, t\in[0,T] \tag{2.8}$$

边界条件为：

$$\mathcal{B}^{\lambda}u(t,\mathbf{x})=0, \quad (t,\mathbf{x})\in(0,T)\times\partial\Omega \tag{2.9}$$

初始条件为：

$$\mathcal{IC}^{\lambda}u(t,\mathbf{x})=0, \quad (t,\mathbf{x})\in\{0\}\times\Omega \tag{2.10}$$

式中，$\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1,\lambda_2,...]$为系统待识别的未知参数集合，$\lambda_i(i=1,2,...)$通常是一个常数，用来描述某个材料参数或系统中的某个固定物理量。

（2）空间函数反问题

空间函数反问题中未知参数是空间坐标的函数。该物理系统可用参数化的偏微分方程表达为：

$$\mathcal{F}^{\lambda}u(\mathbf{x},t)-f(\mathbf{x},t)=0, \qquad \mathbf{x}\in\Omega, t\in[0,T] \tag{2.11}$$

边界条件为：

$$\mathcal{B}^{\lambda}u(t,\mathbf{x})=0, \quad (t,\mathbf{x})\in(0,T)\times\partial\Omega \tag{2.12}$$

初始条件为：

$$\mathcal{IC}^{\lambda}u(t,\mathbf{x})=0, \quad (t,\mathbf{x})\in\{0\}\times\Omega \tag{2.13}$$

式中，$\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1(\mathbf{x}),\lambda_2(\mathbf{x}),...]$为系统待识别的未知参数集合。与固定参数反问题不同，空间函数反问题的系统参数$\lambda_i(\mathbf{x})$是空间坐标$\mathbf{x}$的函数，而不是一个恒定的值。空间函数的系统参数可以用来描述空间分布的材料场或状态场，如随空间变化的材料参数（弹性模量、泊松比等），连续的边界条件或结构的损伤分布等。

（3）时空函数反问题

时空函数反问题中的未知参数是不仅是空间坐标的函数，还是时间坐标的函数。该物理系统可用参数化的偏微分方程表达为：

$$\mathcal{F}^{\lambda}u(\mathbf{x},t)-f(\mathbf{x},t)=0, \qquad \mathbf{x}\in\Omega, t\in[0,T] \tag{2.14}$$

边界条件为：

$$\mathcal{B}^{\lambda}u(t,\mathbf{x})=0, \quad (t,\mathbf{x})\in(0,T)\times\partial\Omega \tag{2.15}$$

初始条件为：

$$\mathcal{IC}^{\lambda}u(t,\mathbf{x})=0, \quad (t,\mathbf{x})\in\{0\}\times\Omega \tag{2.16}$$

式中，$\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1(\mathbf{x},t),\lambda_2(\mathbf{x},t),...]$为系统待识别的未知参数集合，其中每个未知参数$\lambda_i(\mathbf{x},t)$是时空坐标$(\mathbf{x},t)$的函数。由于引入了时间项，参数$\lambda_i(\mathbf{x},t)$可以用来

描述系统中随时空变化的物理量，如热传导方程中的温度场，流体力学中的剪切应力场、热流场或 Navier-Stokes 方程中的压力场和速度场等。

（4）物理关系反问题

物理关系反问题中未知参数是物理量的函数，该物理系统可用参数化的偏微分方程表达为：

$$\mathcal{F}^{\lambda}u(\mathbf{x},t)-f(\mathbf{x},t)=0,\qquad \mathbf{x}\in\Omega,t\in[0,T] \tag{2.17}$$

边界条件为：

$$\mathcal{B}^{\lambda}u(t,\mathbf{x})=0,\qquad (t,\mathbf{x})\in(0,T)\times\partial\Omega \tag{2.18}$$

初始条件为：

$$\mathcal{IC}^{\lambda}u(t,\mathbf{x})=0,\qquad (t,\mathbf{x})\in\{0\}\times\Omega \tag{2.19}$$

式中，$\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1(u),\lambda_2(u),...]$为系统待识别的未知参数集合，此时，未知参数$\lambda_i(u)$不是时空坐标的函数，而是系统响应$u(\mathbf{x},t)$的函数，主要用于描述力学模型中各物理量之间的制约关系如本构方程、控制方程等。在结构力学中，u可以是应力、应变、速度等物理量。

（5）随机过程反问题

随机过程反问题中未知参数是随机变量，该物理系统可用参数化的偏微分方程表达为：

$$\mathcal{F}^{\lambda}u(\mathbf{x},t)-f(\mathbf{x},t)=0,\qquad \mathbf{x}\in\Omega,t\in[0,T] \tag{2.20}$$

边界条件为：

$$\mathcal{B}^{\lambda}u(t,\mathbf{x})=0,\qquad (t,\mathbf{x})\in(0,T)\times\partial\Omega \tag{2.21}$$

初始条件为：

$$\mathcal{IC}^{\lambda}u(t,\mathbf{x})=0,\qquad (t,\mathbf{x})\in\{0\}\times\Omega \tag{2.22}$$

式中，$\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1(\varpi),\lambda_2(\varpi),...]$为系统待识别的未知参数集合，其中$\varpi$是概率空间的结果。在随机过程反问题中，系统中的材料性质或物理参数用概率分布或统计方法来描述，以考虑随机过程的不确定性。

2.4.2 物理信息神经网络反问题拓扑结构

利用 PINN 求解反问题，实际上是在一个端到端的框架中，通过观测数据和物理方程的约束，实现在求解偏微分方程的同时，对方程中未知参数进行识别。即在基于 PINN 的反问题模型中，参数估计和方程拟合能够同时进行。

对于固定参数反问题，由于此时未知参数为一个待求的固定值，则该反问题

模型可以基于求解正问题的 PINN 拓扑结构进行训练，如图 2.3 所示。与正问题不同的是，待求参数 $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$ 将被视为一个可训练的参数，被嵌入到损失函数中，并和网络参数 $\boldsymbol{\theta}$（权重和偏置）在模型训练中一起优化更新。此时，未知参数的识别问题可以表示为以下最优化问题，如式所示，其中 m 是未知参数的数量。

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\}=\arg\min_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m} Loss(\boldsymbol{\theta},\lambda,\Gamma) \tag{2.23}$$

式中，$\boldsymbol{\theta}$ 为神经网络中待优化的参数（权重和偏置），λ 为待识别的未知参数，Γ 为训练集。

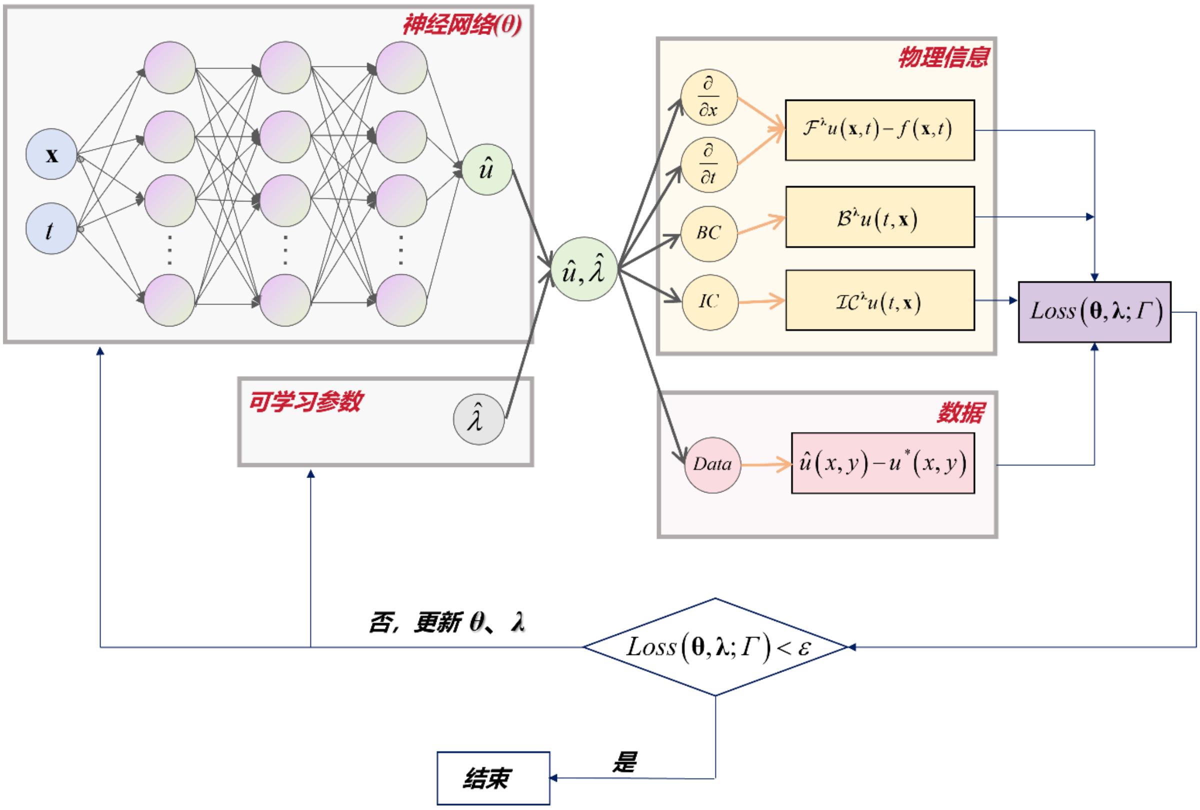


图 2.3 PINN 反向模型网络架构图（一）

由于物理信息不完备，控制方程中含有未知参数 $\hat{\lambda}(\boldsymbol{\theta})$，此时需要添加观测数据作为额外的数据约束来补充物理信息的不足。因此，网络的损失函数由 PDE 项、边界和初始条件项、以及观测数据项损失共同构成，则优化问题的目标函数为：

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta},\Gamma)=\omega_{\mathcal{F}}\mathcal{L}_{\mathcal{F}}+\omega_{\mathcal{B}}\mathcal{L}_{\mathcal{B}}+\omega_{\mathcal{IC}}\mathcal{L}_{\mathcal{IC}}+\omega_{\mathcal{D}}\mathcal{L}_{\mathcal{D}} \tag{2.24}$$

其中，$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ 是衡量网络预测值 $\hat{u}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\lambda})$ 与真实值 $u(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\lambda})$ 之间的差异的数据驱动损失项，可表示为：

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}=Loss(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\lambda},\Gamma_{\mathcal{D}}) \tag{2.25}$$

此时，反问题中待识别的参数λ将被设置为一个可学习的参数，使用优化算法与神经网络的参数$\boldsymbol{\theta}$（权重和偏置）一起在每次迭代中被更新。更新待识别的参数λ的公式如下所示：

$$\lambda_{t+1} = \lambda_t - \eta \nabla_{\lambda} L(\boldsymbol{\theta}_t, \lambda_t) \tag{2.26}$$

式中，η是学习率，$\nabla_{\lambda} L(\boldsymbol{\theta}_t, \lambda_t)$是第$t$次迭代的总损失函数相对于参数$\lambda_t$的梯度，$\lambda_t$是第$t$次迭代的待识别参数，$\lambda_{t+1}$是第$t+1$次迭代的待识别参数。经过多次迭代，神经网络的参数$\boldsymbol{\theta}$和待识别参数$\lambda$在训练过程中共同优化。经过反复迭代，模型逐渐收敛。当迭代停止时，网络找到一组最优的参数组合（$\boldsymbol{\theta}$和λ）使得损失函数达到最小，此时的λ即为模型识别出的最优参数值，同时网络输出的函数解可以同时满足物理方程和观测数据。

当未知参数为一个函数变量时（函数空间反问题、物理关系反问题等），可以用一个子网络对未知参数$\lambda(\mathbf{x})$进行拟合，子网络的输入为函数的自变量空间。该反问题的物理信息网络拓扑结构如图 2.4 所示。

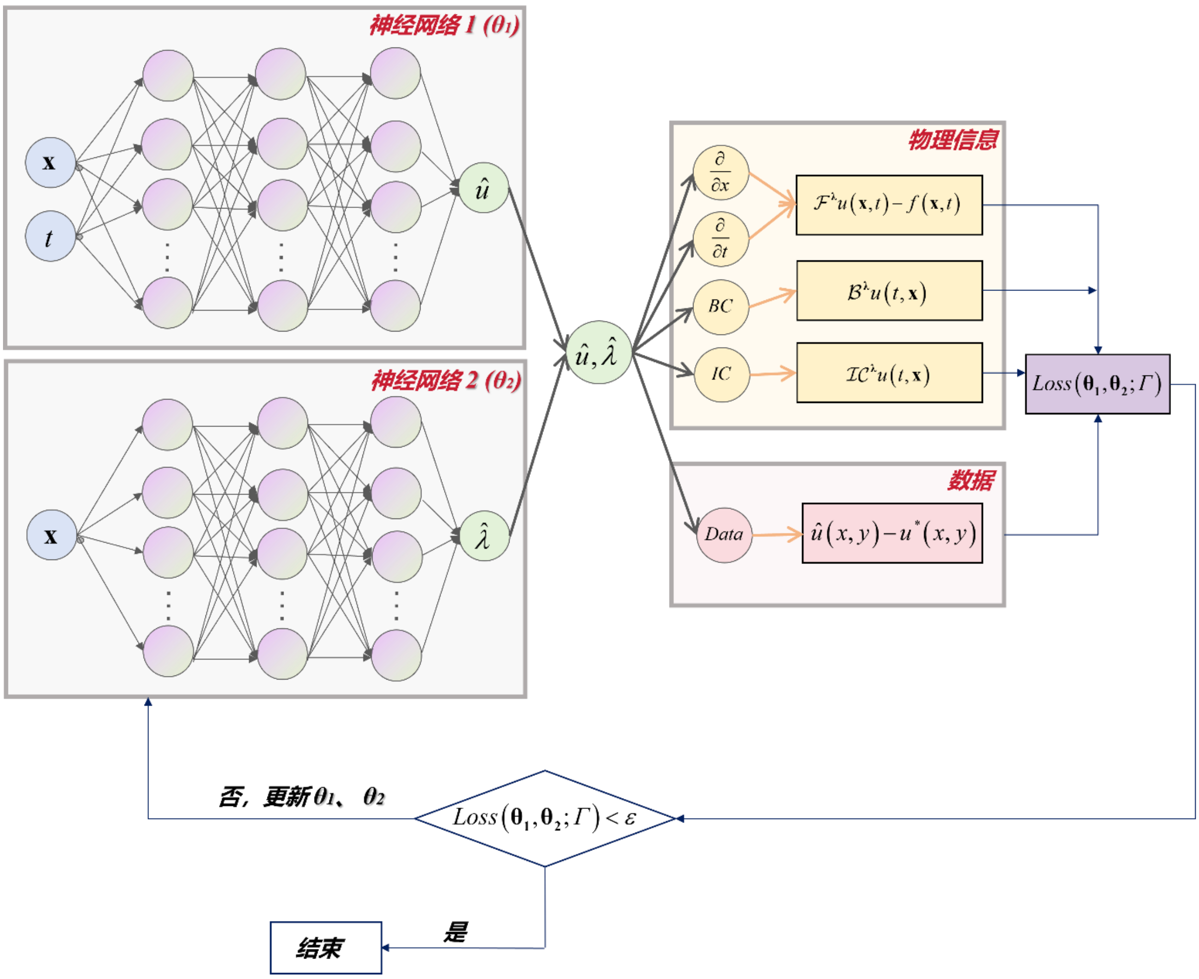


图 2.4 PINN 反向模型网络架构图（二）

如图 2.4 所示的双网络结构，其中主网络的输入根据 PDE 的形式选择相应的时空坐标，输出方程的代理解 $\hat{u}\left(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\lambda}\right)$。根据待求参数的自变量空间 $\mathbf{x}$ 数目确定子网络的输入变量个数，子网络的输出是未知参数的函数空间预测值 $\hat{\lambda}\left(\mathbf{x};\theta_2\right)$。两个网络的输出将通过嵌入同一个物理控制方程或边界方程，来构成优化目标函数，以实现神经网络间的耦合。两个网络拥有两套独立的网络参数 $\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\boldsymbol{\theta}_2$（权重和偏置）。与固定参数反问题不同的是，此时用子网络的整套网络参数 $\boldsymbol{\theta}_2$ 来代替一个可学习的参数。在反向传播中，模型会同时计算损失函数对两个网络参数的梯度，并同时对 $\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\boldsymbol{\theta}_2$ 进行更新。利用 PINN 识别函数型参数的过程，本质上是找到一组最优的参数组合（$\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\boldsymbol{\theta}_2$）使得网络的总损失函数达到最小值，此时反问题的求解转变为找到参数函数空间的网络代理解的问题。

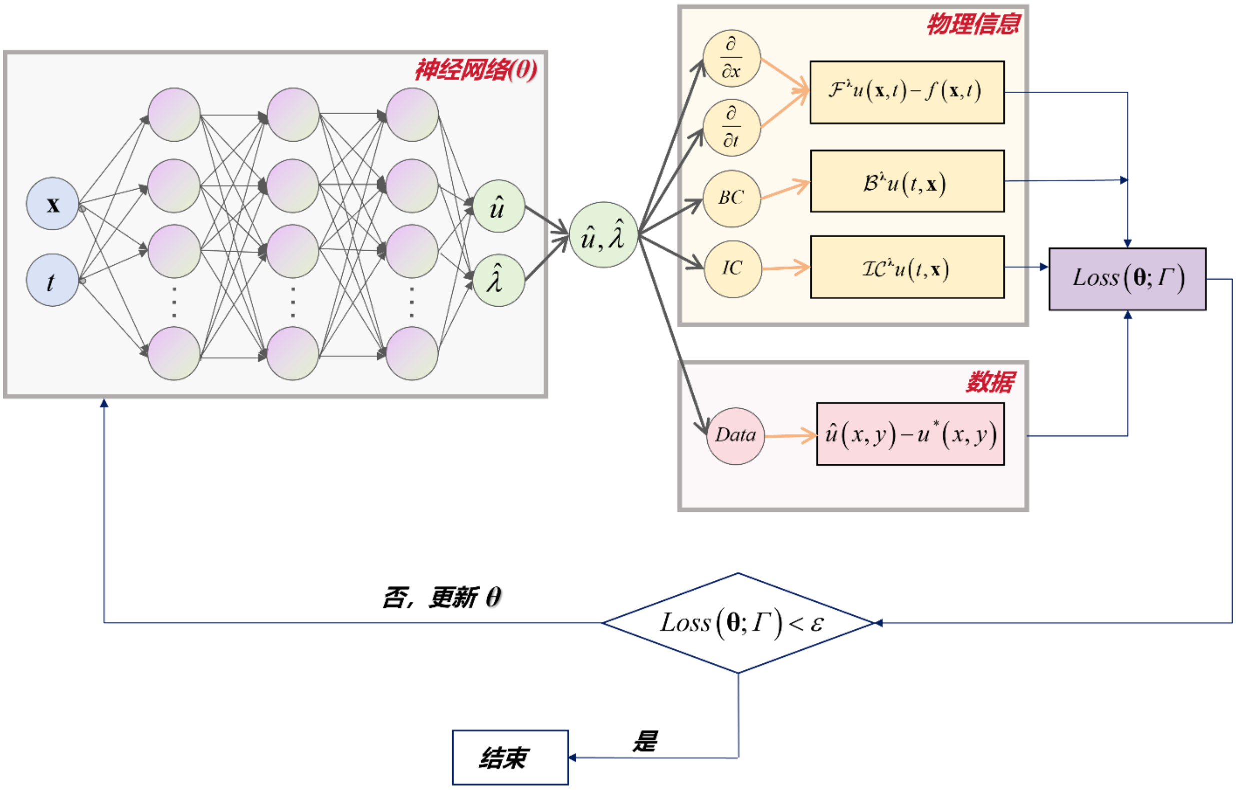


图 2.5 PINN 反向模型网络架构图（三）

当待求参数和 PDE 的解具有相同的自变量空间时，也可以采用图 2.5 所示的神经网络架构，网络同时输出方程的代理解 $\hat{u}\left(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\lambda}\right)$ 和未知参数的预测值 $\hat{\lambda}\left(\mathbf{x};\theta\right)$。此时，求解反问题的过程即是优化目标函数，寻找一组网络参数 $\boldsymbol{\theta}$ 使得 PDE 的解的残差达到最小的同时，参数的函数空间与准确值尽可能地接近。

2.5 优化策略

在 PINN 中，底层物理定律通常以常微分方程或偏微分方程的形式被嵌入到深度神经网络的学习中。如前文所述，引入的基于 PDE 的损失函数本质上是一种软约束，而各项损失项之间存在的相互竞争和多尺度作用，会使得神经网络在处理具有复杂特征问题时表现病态。为了缓解 PINN 的优化困难，改善激活函数的选择是一项有效的措施。

激活函数是神经网络中一种非线性函数，它作用于神经元的输入，将其转换为神经元的输出。在神经网络中，每个神经元接收来自上一层神经元的输入，经过加权求和后，将结果输入到激活函数中，最终得到神经元的输出。设一个神经元接收若干个输入 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，每个输入对应一个权重 $w_1, w_2, \ldots, w_n$，神经元的计算过程可以用如式 2.27 所示：

$$z = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot w_i) + b \tag{2.27}$$

$$y = f(z) \tag{2.28}$$

式中，b 是偏置，z 是加权输入，f 是激活函数，y 是输出信号。

神经元计算过程的示意图如图 2.6 所示。激活函数的主要作用之一是引入非线性变换。通过引入非线性，神经网络可以学习和表示更加复杂的函数关系，从而提高模型的表达能力。常用的激活函数包括逻辑函数（Sigmoid）、双曲正切函数（Tanh）、正弦函数（Sin）、指数函数（Exp）、线性整流函数（ReLU）和 Swish 函数等。

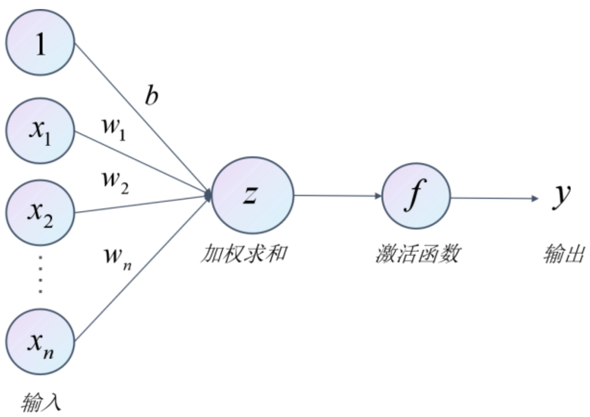


图 2.6 神经元计算过程示意图

激活函数对于网络的优化性能和表达能力具有重要影响。最近的研究表明，

激活函数的选择会影响模型学习和捕捉连续信号的能力[95-99]。Raissi[95]等提出，使用 Tanh 激活函数的 PINN 在进行涡激振动模拟时具有数值不稳定性，而采用 Sin 激活函数可以使得网络优化更平滑。Sitzmann 等[96]指出常用的 ReLU 激活函数作为一种分段线性函数，由于其二阶导数在任何地方都为零，因此基于 ReLU 的多层感知机将难以学习自然信号中高阶导数所包含的信息。为了改进这一缺点，文中提出采用周期激活函数来提高网络对高阶导数的建模能力，实现对底层信号中更精细细节的刻画。Wong 等[99]指出使用 Tanh 作为激活函数的神经网络在训练过程中，当具有较高权重的神经元的输入信号超过了 Tanh 函数的线性区域时，会导致函数的输出饱和。这种饱和现象会使得 Tanh 函数的导数趋近于零，从而引起梯度消失问题，使得网络无法有效地学习。特别在处理具有复杂特征如高频函数或梯度陡峭的问题时，为了缓解饱和现象引起的训练困难，需要对损失函数的组合进行精心设计。因此，文中采用周期激活函数来避免这一难题。研究表明，使用 Sin 激活函数来作为一种近似的傅里叶特征映射，无需像 tanh 激活函数那样进行复杂的损失组合调整，即可更容易地实现良好的训练结果。

近来研究表明，最优激活函数的选择取决于所研究问题的特性。由于底层 PDE 系统具有不同的特征，PINN 对激活函数表现出很高的敏感性。Wang 等[100]为研究不同激活函数对 PINN 的影响，对具有两类不同源项的一阶泊松方程进行研究，并对比六种不同激活函数的训练结果。对于第一类真解具有周期性的问题，采用 Sin 激活函数的相对误差比其他激活函数低了一个数量级；对于第二类真解具有快速衰减特性的问题，采用 Exp 激活函数的相对误差不大于 1%，而广泛采用的 Relu 激活函数的相对误差则高达 75%。以上研究结果表明，激活函数的选择影响 PINN 的优化，不同激活函数的网络训练效果可能大相径庭。

鉴于 PDE 的多样性和复杂性，为不同的系统选择合适的激活函数对提高 PINN 的优化能力至关重要。对于有些复杂的问题，有时单一的激活函数并不够，需要搜索一组激活函数才能做出准确的预测。如 Zobeiry 等[100]证明采用 Sin 和 Exp 的激活函数的组合可以有效地求解传热方程，这是因为该方程的解在空间上呈现周期性，而在时间上呈指数衰减。

Wang 等[101]提出一种自适应混合单元（Adaptive Blending Units，ABU）的方法来改进 PINN 的优化性能。该方法采用常见激活函数的线性组合来构建搜索空间。为了处理不同 PDE 的各种特性，可以根据物理系统的先验知识将具有不同性质的初等函数合并为候选函数。该方法可以用如下的公式进行描述：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N}G(\alpha_i)\sigma_i(x) \tag{2.29}$$

$$G(\alpha_i)=\frac{\exp(\alpha_i)}{\sum_{j=1}^{N}\exp(\alpha_i)} \tag{2.30}$$

式中，$\sigma_i(x)$表示候选激活函数，α_i表示一个可学习参数，决定了其对应候选激活函数的权重。式 2.30 表示使用 Softmax 函数进行归一化。

研究结果表明，基于 ABU 的 PINN 在解决不同类型的经典一维和二维偏微分方程时，其训练误差均大幅度小于使用各问题对应的最佳单一激活函数的方法。此外，随着候选函数集的增加，即纳入具有更多多样性的激活函数时，可以提高训练的鲁棒性。

2.6 本章小结

本章对 PINN 的基本理论进行了介绍，并系统阐述了 PINN 用于求解正反问题的网络框架以及优化策略，为下文建立基于 PINN 的深度学习模型识别薄板边界和内部损伤提供理论支持。本章的主要内容如下：

（1）对 PINN 的基本理论进行介绍。主要包括基本原理、物理信息的嵌入方式以及初始和边界条件的添加方式。

（2）对用于求解力学正问题的基本 PINN 网络框架进行介绍。主要包括力学正问题的数学定义、PINN 正向模型网络拓扑结构、算法步骤和求解机制。

（3）对用于求解力学反问题的基本 PINN 网络框架进行介绍。主要包括力学反问题的数学定义，力学反问题的分类、三种不同类型的 PINN 反向模型网络拓扑结构以及相应的算法步骤和求解机制。

（4）探讨了激活函数对网络优化性能的影响，并说明了通过选择合适的激活函数可以提升 PINN 的训练效率。

第3章　弹性支承矩形薄板理论与数值分析

3.1 引言

薄板的弹性支承作为一种通用的边界条件，是通过采用弹性元件（如弹簧、阻尼器）来对实际结构的边界转动约束进行模拟。通过调节弹性元件的刚度大小，可以实现从简支、半固支到固支等不同结构边界条件的精确控制。在实际工程中，受施工质量、连接材料或环境因素的影响，真实的薄板结构边界不是简支或固支的理想状态，而是处于两者之间的“半固支”状态[90]。常见的薄板结构大多属于此类构件。

在结构损伤检测领域，大部分研究通常假设在边界全长范围内简化为相同的约束状态，并使用一个固定的结构参数来描述。然而，在实际情况中，由于普遍存在一般性结构损伤，边界约束在空间分布上并非均匀不变而可能存在差异。因此，为了深入探究薄板结构边界的实际服役状态，在本章中，表征边界条件的约束转动刚度将被考虑为一个空间分布函数，通过改变刚度的大小和分布特征，来模拟不同的边界损伤情境。此外，为了求解弹性支承薄板的力学响应，将采用 MATLAB 有限元编程对连续边界条件进行离散化处理，通过在边界网格节点上添加转动刚度以实现函数型弹性边界的正确建模。

3.2 矩形薄板基本理论

3.2.1 基本概念及计算假定

如图 3.1 所示的板，厚度为t，最小宽度为b，平分板厚的平面称为中面，坐标平面xoy与中面重合。对于厚度$\frac{b}{80} \le t \le \frac{b}{5}$的板，称之为薄板。板可在其平面内承受张力（或压力），板具有一定的抗弯刚度，可承受弯矩作用，结构工程中绝大多数的板都属于薄板。

当薄板承受垂直于板面的力时，会使板产生垂直于板面（z轴方向）的位移，属于板的弯曲问题。当薄板弯曲时，中面所形成的曲面，成为薄板的弹性曲面，而中面内各点在横向（即垂直于中面方向的）位移w，称为挠度。当板的挠度

$w \le \frac{1}{5}t$ 时，符合小变形假设，为小挠度问题，结构工程中常见的板弯曲问题绝大多数为小挠度问题。本章仅就薄板弯曲小挠度问题进行研究。

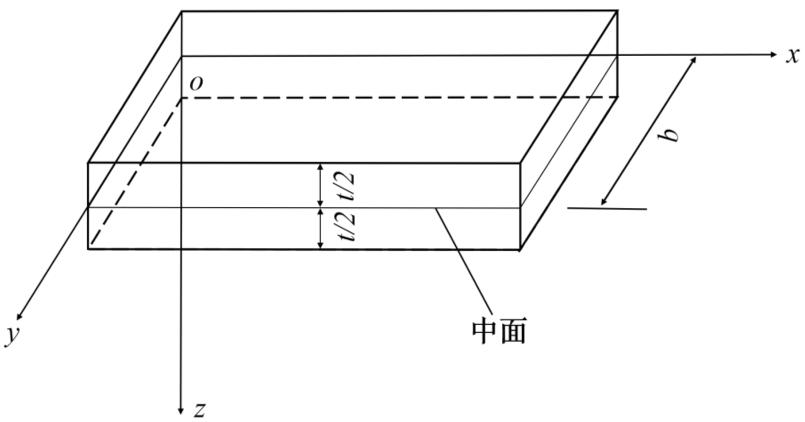


图 3.1 薄板结构基本模型

克霍夫-拉甫（Kirchhoff-Love）假定是用于描述薄板理论的重要假设之一[91]，用于简化分析弹性薄板行为。Kirchhoff-Love 假定有以下几点：

（1）薄板在受力作用下，变形前垂直于板中面的直线段（法线）在变形后仍保持为直线，并垂直于变形后的中面，且其长度不变，称为直法线假定，见图 3.2。这意味着在分析中可以将板截面视为始终保持平面的理想状态，不考虑板内水平剪切应力 τ_{zx} 、 τ_{zy} 引起的剪切变形，即 $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ 。

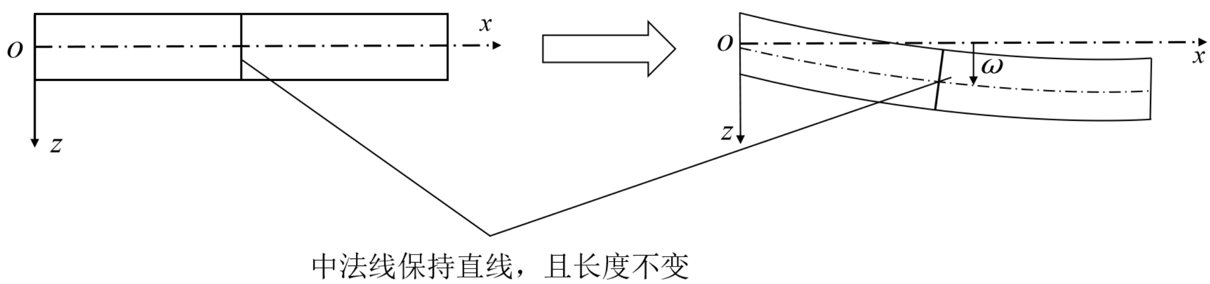


图 3.2 直法线假定

（2）相比于宽度和长度而已，薄板的厚度非常小，因此忽略板在厚度方向的变形，板的挠度 $w = w(x, y)$，与 z 无关。这样的假设可以使得在二维平面内对薄板进行应力分析。

（3）薄板中面在平面内的位移为零，有 $u|_{z=0} = 0$ ，$v|_{z=0} = 0$（法线的中点无水平位移）。

3.2.2 薄板静力学基本控制方程

如图 3.3 所示的矩形薄板，设板上受面荷载 $q(x,y)$ 的作用，薄板的挠度为 $w(x,y)$。

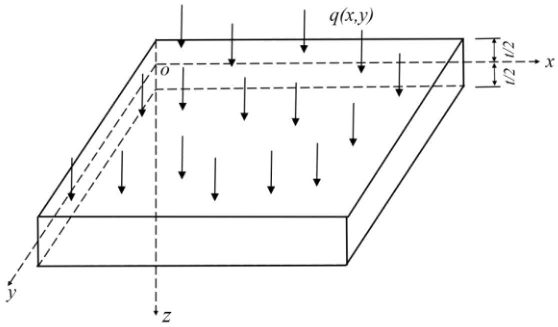


图 3.3 承受均布荷载薄板示意图

基于薄板小挠度理论建立的薄板弯曲基本方程为：

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{q}{D} \tag{3.1}$$

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \tag{3.2}$$

式中，w 为薄板的挠度，q 为作用于薄板的荷载大小，D 为薄板的抗弯刚度，E 为薄板的弹性模量，h 为薄板的厚度，v 为薄板的泊松比。

由直法线假定可知，$\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$，可推出：

$$u=-\frac{\partial w}{\partial x}z\,,v=-\frac{\partial w}{\partial y}z \tag{3.3}$$

式中，z 为计算点的平面外坐标。

由上式可得薄板内部各点应变与挠度之间的关系为：

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z\\ \varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z\\ \lambda_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}z\end{aligned} \tag{3.4}$$

应力可以表示为：

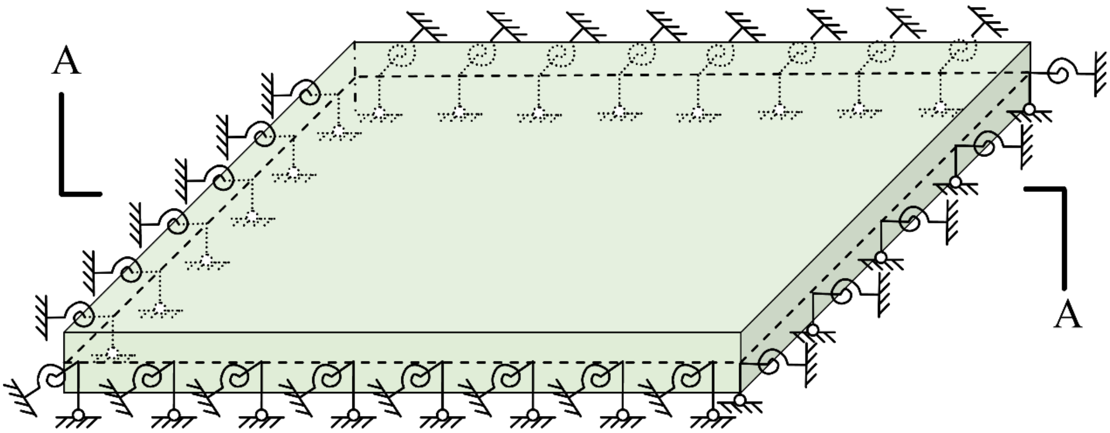
$$\sigma_x=\frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_x+\upsilon\varepsilon_y\right)=\frac{Ez}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{3.5-1}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_y + \upsilon\varepsilon_x\right) = -\frac{Ez}{1-\upsilon^2}$$

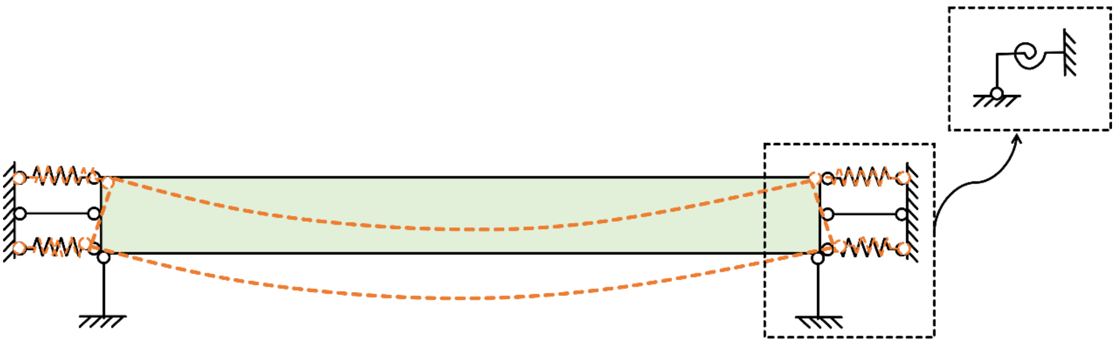
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\gamma_{xy} = -\frac{E}{1+\upsilon}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}z \tag{3.5-2}$$

3.3 弹性支承边界控制方程

弹性支承的薄板可理解为边界受转动限制的矩形板[92]。边界所受约束可用沿边界分布的转动弹簧来等效，如图 3.4（a）所示。设薄板无水平方向的位移，仅考虑边界的转动。当薄板受力变形时，结构将围绕板厚中点旋转，形变如图 3.4（b）虚线所示。



（a）边界转动受弹性限制矩形板



（b）剖面 A-A 示意图

图 3.4 边界转动受弹性限制矩形板示意图

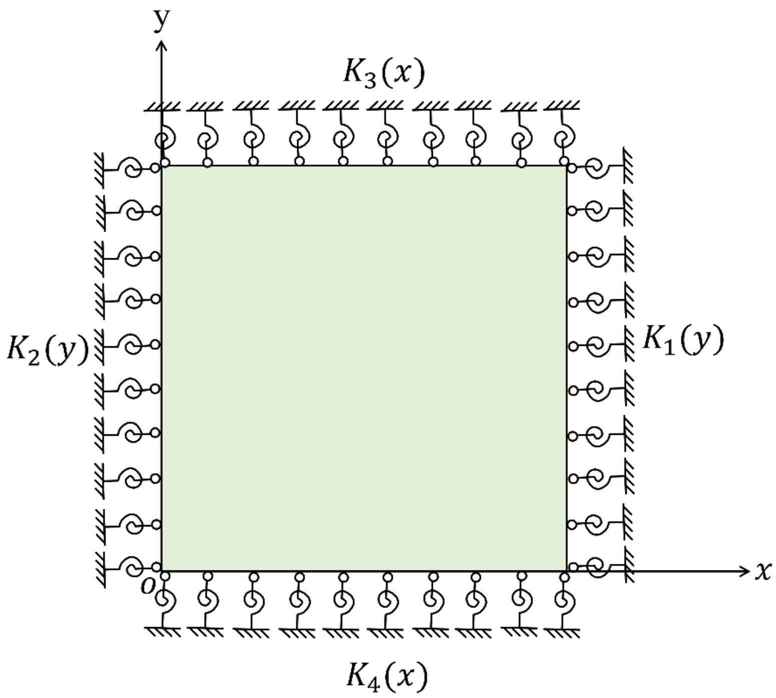


图 3.5 边界转动受弹性限制矩形板的平面示意图

弹性支承薄板的平面示意图如图 3.5 所示，设不同边界上的转动弹簧刚度为 K_i，此时薄板边界条件表达式为[92]：

$$\begin{aligned} &x=a, w=0, K_1(y)\frac{\partial w}{\partial x}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ &x=0, w=0, K_2(y)\frac{\partial w}{\partial x}=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ &y=b, w=0, K_3(x)\frac{\partial w}{\partial y}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\ &y=0, w=0, K_4(x)\frac{\partial w}{\partial y}=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

式中，a 为薄板的长度，b 为薄板的宽度，D 为薄板的抗弯刚度，$K_i(i=1,2,3,4)$ 表示为薄板边界转动弹簧刚度。

本文所述的弹性边界仅考虑转动约束的影响，边界上竖向挠度为零，则可以对上式进行简化。对于边界 $x=a$ 处，由于 $w|_{x=a}=0$（在边界处挠度为常数），因此有 $\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x=a}=\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{x=a}=0$，其他边界同理。因此弹性约束边界条件的表达式还可写为：

$$\begin{aligned}
&x=a,w=0,K_1\left(y\right)\frac{\partial w}{\partial x}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\
&x=0,w=0,K_2\left(y\right)\frac{\partial w}{\partial x}=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\
&y=b,w=0,K_3\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial y}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
&y=0,w=0,K_4\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial y}=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}\tag{3.7}$$

通过调节转动弹簧的刚度大小，弹性支承边界可以模拟简支或固支的边界条件。当 $K=0$ 时，转动约束刚度为零，此时边界条件为简支支承，四条边界的表达式均为：

$$w=0,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\tag{3.8}$$

当 $K=\infty$ 时，转动约束刚度无限大，可以得到固支边界下的边界约束条件，如下式所示：

$$\begin{aligned}
&x=a，x=0\text{时}，w=0,\frac{\partial w}{\partial x}=0\\
&y=b，y=0\text{时}，w=0,\frac{\partial w}{\partial y}=0
\end{aligned}\tag{3.9}$$

当 K 为一个有限值时，表示边界具有一定的转动能力，同时也能够承受一定的弯矩，这种支承状态为“半固接”边界支承条件。在实际工程中，结构边界往往不是简支或固支的理想状态，而是处于两者之间的半固接边界条件。

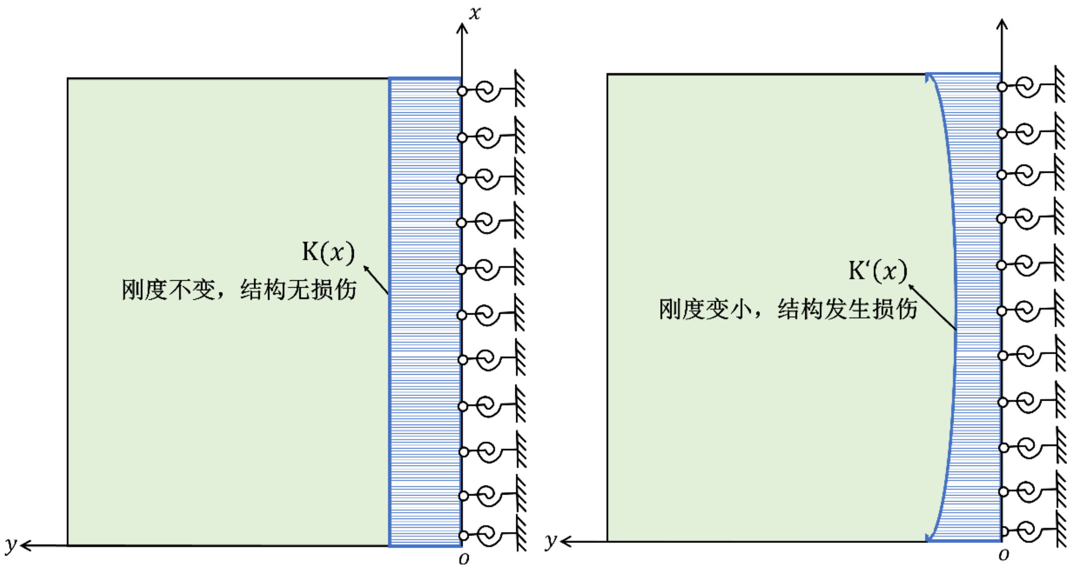
3.4 损伤算例设置

转动弹簧刚度的大小表示边界所受转动约束的强弱。当薄板边界因连接材料失效或其他原因产生结构损伤时，结构所受的约束力将被削弱，薄板的变形将增大。此时可通过减小转动弹簧刚度的大小，对该处的边界松弛进行等效。

若某一边界上的等效弹簧刚度 K 是一个随空间变化的函数 $K\left(x\right)$，则可以通过改变该函数在边界上的分布状况，对不同程度结构损伤的边界状态进行模拟。如图 3.6（a）所示，当弹簧刚度为一常数 $K\left(x\right)=K$ 时，可表示未受损伤的弹性边界。当边界某一区域出现结构损伤时，边界所受转动约束将减弱，此时损伤区的等效弹簧刚度将小于未损伤区域，如图 3.6（b）所示。因此，通过为弹簧刚度函数 $K\left(x\right)$ 设置不同的分布，可表示具有任意形式结构损伤的弹性边界。

柴玉阳[90]等用一系列的均布线性弹簧来模拟薄板的弹性边界，并设计振动实验对不同弹性边界矩形板的固有频率进行研究。其研究表明，当单个转动弹簧刚度在 $0 \sim 10^4 N/rad$ 范围时（文中实验在 0.5m 的边界上布置 9 个弹簧），结构的固有频率对转动弹簧刚度的变化比较敏感，如图 3.7 所示。即在此范围内时，弹簧转动刚度的增加或减少都可以显著影响薄板的振动特性，而超出该范围时，再增大弹簧刚度也基本不会改变薄板结构的振动特性。在图 3.7 中，横坐标为单个弹簧刚度的对数值，纵坐标为相应弹性边界下的薄板结构的一阶频率值，可以看到当刚度大于 $10^4 N/rad$ 时，薄板结构的一阶频率将基本保持不变。

基于此结论，在本文的算例中将边界上转动弹簧刚度的范围设为 $10^4 \sim 2\times10^4 N\cdot m/rad$ 。



（a）未受损伤边界　　　　　　（b）受损伤边界

图 3.6 弹簧刚度变化表示边界损伤示意图

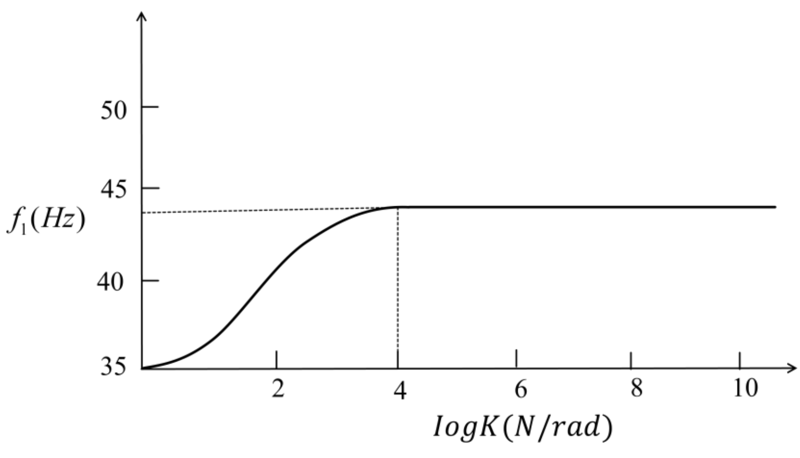


图 3.7 弹性矩形板一阶固有频率与边界弹簧刚度（$\log K$）的关系

3.5 有限元分析

为求解弹性支承薄板的结构响应，使用 MATLAB 进行有限元建模。采用矩形薄板单元[93]。板弯曲时，每个单元有 4 个结点，每个结点有 3 个自由度，分别为薄板 z 向的挠度，绕 x 轴的转角以及绕 y 轴的转角，共 12 个位移分量，单元平面尺寸为 $2a\times 2b$，如图 3.8 所示。

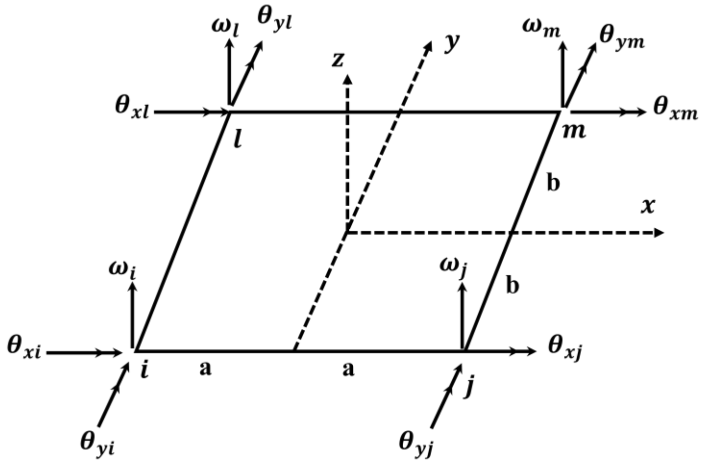


图 3.8 矩形薄板单元模型

结点 i 的位移矢量为：

$$\mathbf{u}_i=\begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w_i \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ -\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{bmatrix}, i=1,2,3,4 \tag{3.10}$$

则单元的结点位移矢量为：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^e &=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_i^T & \mathbf{u}_j^T & \mathbf{u}_m^T & \mathbf{u}_l^T\end{bmatrix}^T \\ &=\begin{bmatrix} w_i & \theta_{xi} & \theta_{yi} & w_j & \theta_{xj} & \theta_{yj} & w_m & \theta_{xm} & \theta_{ym} & w_l & \theta_{xl} & \theta_{yl}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.11}$$

如前所述，一个矩形薄板单元共有 $4\times 3=12$ 个自由度，因此 w 的表达式可以表示为包含 12 个参数的四次多项式：

$$\begin{aligned} w=&\beta_1+\beta_2 x+\beta_3 y+\beta_4 x^2+\beta_5 xy+\beta_6 y^2+\beta_7 x^3+\beta_8 x^2 y \\ &+\beta_9 xy^2+\beta_{10} y^3+\beta_{11} x^3 y+\beta_{12} xy^3 \end{aligned} \tag{3.12}$$

将每个结点 i, j, m, l 的坐标代入式 3.12 及其导数，对这 12 个方程进行联立求解，求出各参数的值，再将其代回式 3.12，整理可得薄板的位移函数为：

$$w=[N]\mathbf{u}^{e} \tag{3.13}$$

其中，$[N]$是形函数矩阵：

$$[N]=[N_i \quad N_{xi} \quad N_{yi} \quad N_j \quad N_{xj} \quad N_{yj} \quad N_m \quad N_{xm} \quad N_{ym} \quad N_l \quad N_{xl} \quad N_{yl}] \tag{3.14}$$

式中形函数$N_i,N_{xi},N_{yi},\ldots,N_{yl}$等都是和的四次多项式，即

$$[N_i \quad N_{xi} \quad N_{yi}]=\frac{1}{16}X_1Y_1[X_1Y_1-X_2Y_2+2X_1X_2+2Y_1Y_2 \quad 2bY_1Y_2 \quad -2aX_1X_2] \tag{3.15}$$

$$[N_j \quad N_{xj} \quad N_{yj}]=\frac{1}{16}X_2Y_1[X_2Y_1-X_1Y_2+2X_1X_2+2Y_1Y_2 \quad 2bY_1Y_2 \quad 2aX_1X_2] \tag{3.16}$$

$$[N_m \quad N_{xm} \quad N_{ym}]=\frac{1}{16}X_2Y_2[X_2Y_2-X_1Y_1+2X_1X_2+2Y_1Y_2 \quad -2bY_1Y_2 \quad 2aX_1X_2] \tag{3.17}$$

$$[N_l \quad N_{xl} \quad N_{yl}]=\frac{1}{16}X_1Y_2[X_1Y_2-X_2Y_1+2X_1X_2+2Y_1Y_2 \quad -2bY_1Y_2 \quad -2aX_1X_2] \tag{3.18}$$

其中，$X_1=1-\frac{x}{a},X_2=1+\frac{x}{a},Y_1=1-\frac{y}{b},Y_2=1+\frac{y}{b}$

根据位移函数可获得薄板的应变矩阵$[B]$,$[B]$为3×12的矩阵：

$$[B]=-\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{xi}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{yi}}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 N_{yl}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{xi}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{yi}}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial^2 N_{yl}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 N_i}{\partial x\partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{xi}}{\partial x\partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{yi}}{\partial x\partial y} & \cdots & 2\frac{\partial^2 N_{yl}}{\partial x\partial y} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

则薄板单元的单元刚度矩阵可由下式求得：

$$K^{e}=\iint_{\Omega}[B]^{T}[D][B] \tag{3.20}$$

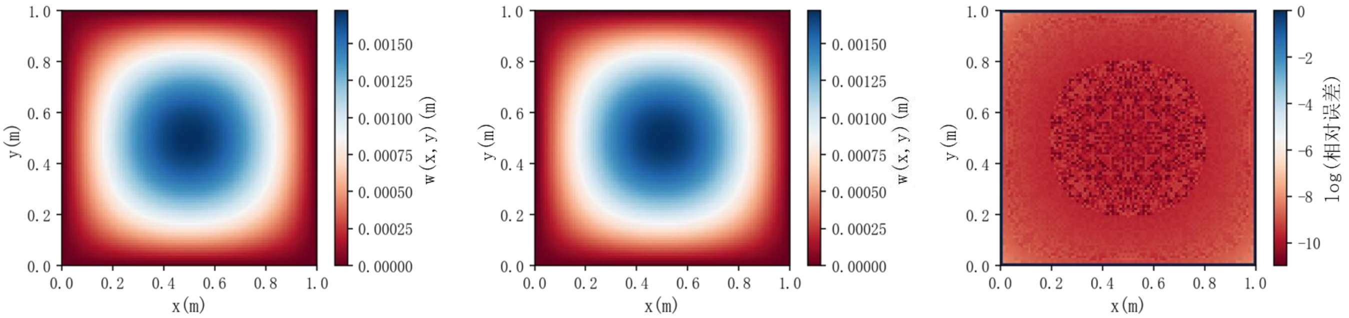
$$[D]=\frac{Et^3}{12(1-v^2)}\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

式中，B为薄板单元的应变矩阵，Ω为单元面积，$\Omega=4ab$，D为薄板单元的弹性矩阵，E为弹性模量，t为薄板厚度，v为泊松比。

为了模拟薄板的弹性支承，可以通过在边界网格节点的单元刚度矩阵中添加

相应方向的转动刚度来对薄板边界上的弹性约束进行等效，该转动刚度即是上文提及的等效弹簧刚度。该方法将边界上连续的约束力离散为单元节点上的转动刚度约束。对于边界一和边界二上的节点，施加绕 y 轴转动也就是添加第 3 自由度上的转动刚度；对于边界三和边界四，施加绕 x 轴转动即添加第 2 个自由度上的转动刚度。约束所有边界上的挠度均为零。

ABAQUS 是一款具有强大功能的商业有限元分析软件，计算精确度较高，但对于弹性支承薄板的建模灵活性不够。因此本文利用 MATLAB 进行有限元编程，通过上文所述的修改单元刚度矩阵的方法对薄板的弹性边界进行模拟，并将其结果与 ABAQUS 的固支模型进行对比，以验证所用有限元模型的正确性。以两者的对数相对误差值作为准确度的衡量标准。



（a）简支薄板的挠度解　（b）MATLAB 模拟简支薄板的挠度数值解　（c）对数相对误差

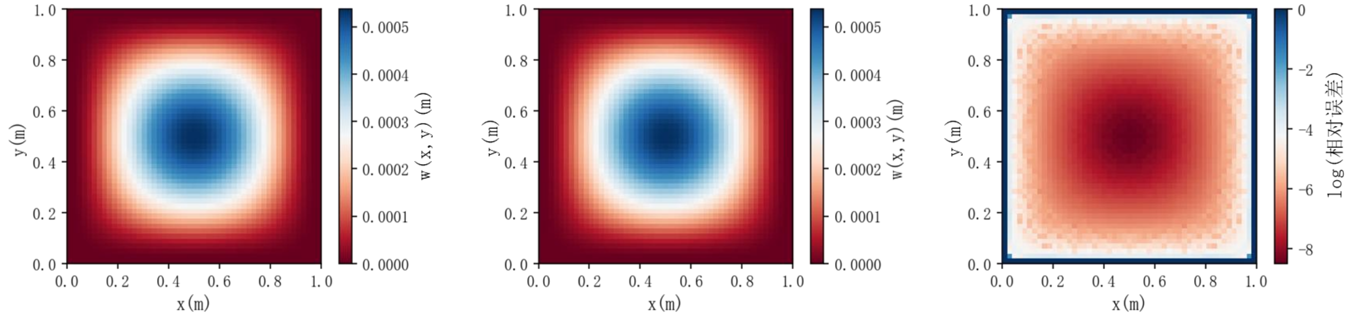
图 3.9 简支薄板 MATLAB 有限元结果与解析解对比

将弹簧转动刚度设为 $K=0$，此时模拟四边简支边界。将在 MATLAB 模型中获得的薄板挠度响应数据与简支支承薄板的解析解结果进行对比。边长为 a、b 的四边简支矩形薄板，受任意分布的横向荷载 $q(x,y)$ 作用下，使用纳维叶（Navier）解法[91]求得的薄板挠度响应为：

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\int_0^a\int_0^b q(x,y)\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy}{\pi^4 abD\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{3.22}$$

使用 MATLAB 建模的挠度响应结果如图 3.9（b）所示，四边简支薄板的挠度解析解如图 3.9（a）所示。对数相对误差结果如图 3.9（c）所示，可见两个结果的相对误差精度大部分已经达到10^{-8}，满足要求。因此可以认为，当 $K=0$ 时，MATLAB 模型可以正确模拟简支边界。柴玉阳等[90]提出当边界转动弹簧刚度大于$1\times10^{10}\,N/rad$ 时，可近似认为薄板结构为固定支承。基于此，在 MATLAB 有

限元模型中设置转动刚度 $K = 2\times10^{11} N\cdot m/rad$ 。



（a）固支薄板的挠度解　（b）MATLAB 模拟固支薄板的挠度数值解　（c）对数相对误差

图 3.10 固支薄板 MATLAB 有限元结果与 ABAQUS 对比

将获得的结果与 ABAQUS 中四边固支的响应数据进行对比，结果如图 3.10（a）和图 3.10（b）所示，两者的对数相对误差如图 3.10（c）所示，可见两者误差极小。因此，可以认为当 $K = 2\times10^{11} N\cdot m/rad$ ，矩形薄板可视为固定支承。综上所述，使用的 MATLAB 有限元模型可以对薄板的弹性支承边界进行正确模拟，当 K 取不同值时，薄板边界会有不同大小的转动约束。

3.6 本章小节

弹性边界可以用沿边界分布的弹性约束元件（如弹簧）进行模拟。元件的转动约束刚度越小，则薄板变形越大，预示该处可能发生边界损伤或松弛。因此，可以通过调整边界刚度函数的大小与空间分布，实现对薄板不同边界条件以及不同程度的边界损伤进行模拟。本章主要采用基于 MATLAB 有限元编程的方法对弹性支承矩形薄板的力学响应进行分析，旨在为后续边界损伤的识别提供训练样本集。连续的弹性边界条件可被离散为网格边界节点上的转动约束，并通过在边界节点上的单元刚度矩阵中引入对应方向的转动刚度，以实现分布式弹性边界的建模。

第4章 基于改进物理信息神经网络的薄板分布式边界参数识别

4.1 引言

激活函数通过引入非线性变换，增强了神经网络学习不同层次特征的能力，对网络的优化性能和表达能力有着重要影响。在标准的 PINN 框架中，激活函数通常是预先定义的，并且在整个训练过程中保持不变。然而，这种不变的激活函数在处理具有多样性和复杂性的任务时，可能导致适应性不足、性能下降和训练效率低等问题。研究表明，不同激活函数在处理特定任务时表现出不同的优劣势，最优激活函数的选择取决于所研究问题的解的特性。

边界损伤或松弛往往和边界受到的约束力降低密切相关，因此薄板边界的约束刚度可用作损伤状态评估的指标之一。结构损伤的本质是力学反问题的求解。而薄板边界反问题主要涉及对包含高阶导数 PDE 方程组的逆向推演。在反向求解时，此类高阶导 PDE 比低阶 PDE 具有更多的挑战，主要包括数值不稳定性、噪声敏感性和算法复杂性等。为了应对这些挑战，采用自适应激活函数对标准 PINN 框架进行改进是一种有效的方法。与传统的固定激活函数不同，自适应激活函数通过选择一个候选集，并根据数据情况动态地调整每个候选函数的权重，使得神经网络在训练过程中能够自动地选择最适合当前任务和数据分布的激活函数，从而提高网络的表达能力和泛化能力。

本章将使用基于 DeepXDE[94] 的 PINN 深度学习框架，并采用自适应激活函数优化网络性能，旨在通过求解空间函数反问题，对弹性支承边界上的分布式参数——转动约束刚度进行反演，进而实现薄板的连续边界条件和结构损伤的识别。此外，还采用标准 PINN 框架求解薄板力学正问题，即对弹性支承薄板在均布荷载作用下的变形场进行预测。

4.2 构建训练集

设置一个四边弹性支承的矩形薄板，长度 $a = 1m$，宽度 $b = 1m$，板厚 $h = 0.05m$，密度 $\rho = 7800kg/m^3$，板上受均布荷载 $q = 1000Pa$ 作用，材料弹性模量 $E = 2.06\times10^5 MPa$。设边界一为 $x = 1$ 处，边界二为 $x = 0$ 处，边界三为 $y = 1$ 处，边界四为 $y = 0$ 处，对应各边界的边界转动约束刚度分别为 K_1、K_2、K_3、K_4，如图 4.1 所示。

如第三章所述，可以通过改变转动约束刚度在边界上的分布状况，对不同程度结构损伤的边界状态进行模拟。因此，设置两组不同分布的弹性边界，分别模拟未受边界损伤和渐变式边界损伤的弹性板。为简化计算，仅考虑边界四上存在结构损伤，其余边界的刚度相同且均匀分布。薄板各边界转动约束刚度的设置如表 4.1 所示，表中 x 表示边界上的坐标值。

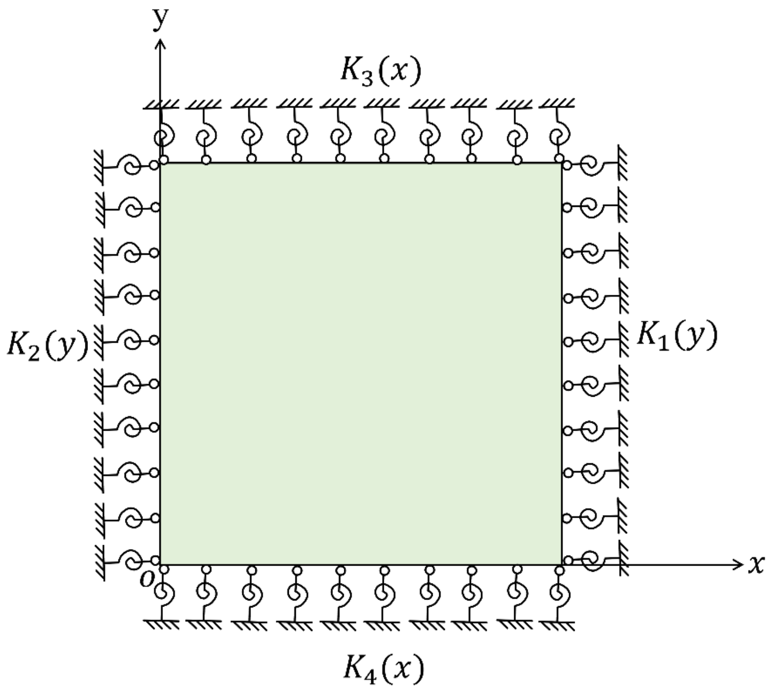
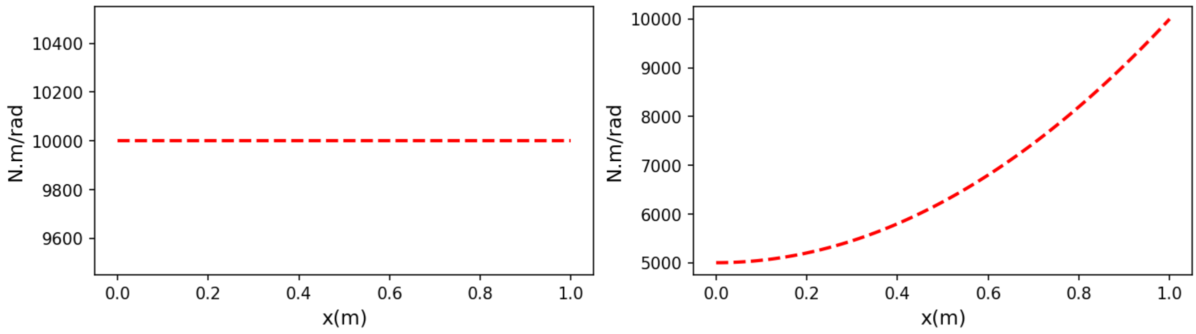


图 4.1 弹性支承薄板平面示意图

表 4.1 薄板边界转动约束刚度设置（$N \cdot m / rad$）

算例	边界一	边界二	边界三	边界四
一	$K_1(x)=1\times10^4$	$K_2(x)=1\times10^4$	$K_3(x)=1\times10^4$	$K_4(x)=1\times10^4$
二	$K_1(x)=1\times10^4$	$K_2(x)=1\times10^4$	$K_3(x)=1\times10^4$	$K_4(x)=(x^2+1)\times10^4/2$

为求解薄板边界反问题，采用第三章所述的 MATLAB 有限元分析获得不同算例下的薄板挠度响应。提取局部位置点上的挠度数据作为 PINN 的训练集，用于构建损失函数并参与网络训练更新，其计算流程如图 4.3 所示。标签数据点的位置如图 4.4 所示，一共有 30 个标签数据。



（a）算例一　　（b）算例二

图 4.2 两种算例边界四上约束转动刚度 K_4 示意图

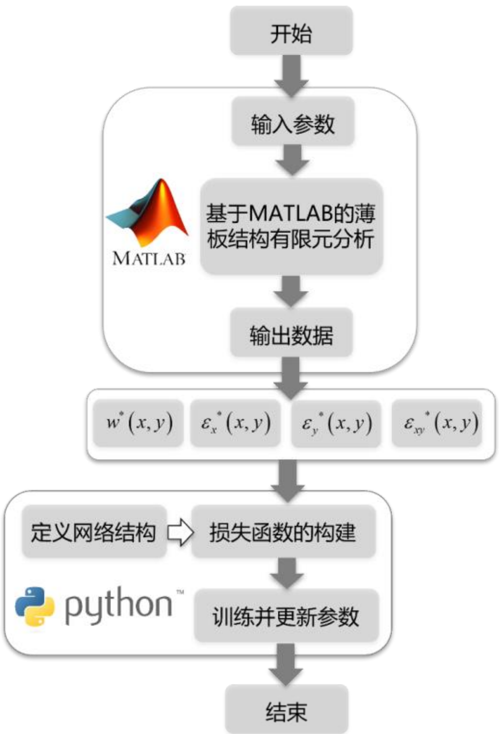
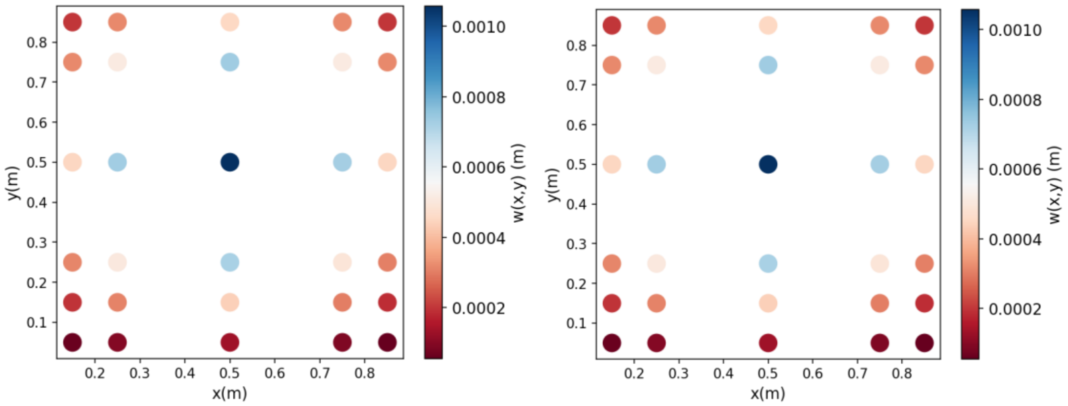


图 4.3 计算流程图



（a）算例一　　　　　　　　　　（b）算例二

图 4.4 弹性支承薄板反问题标签数据点位置示意图

4. 3 弹性支承矩形薄板正问题

4. 3. 1 正问题物理信息神经网络拓扑结构设计

在本章的研究中，将采用标准的 PINN 框架对弹性支承矩形薄板正问题进行求解，其神经网络拓扑结构如图 4.5 所示。

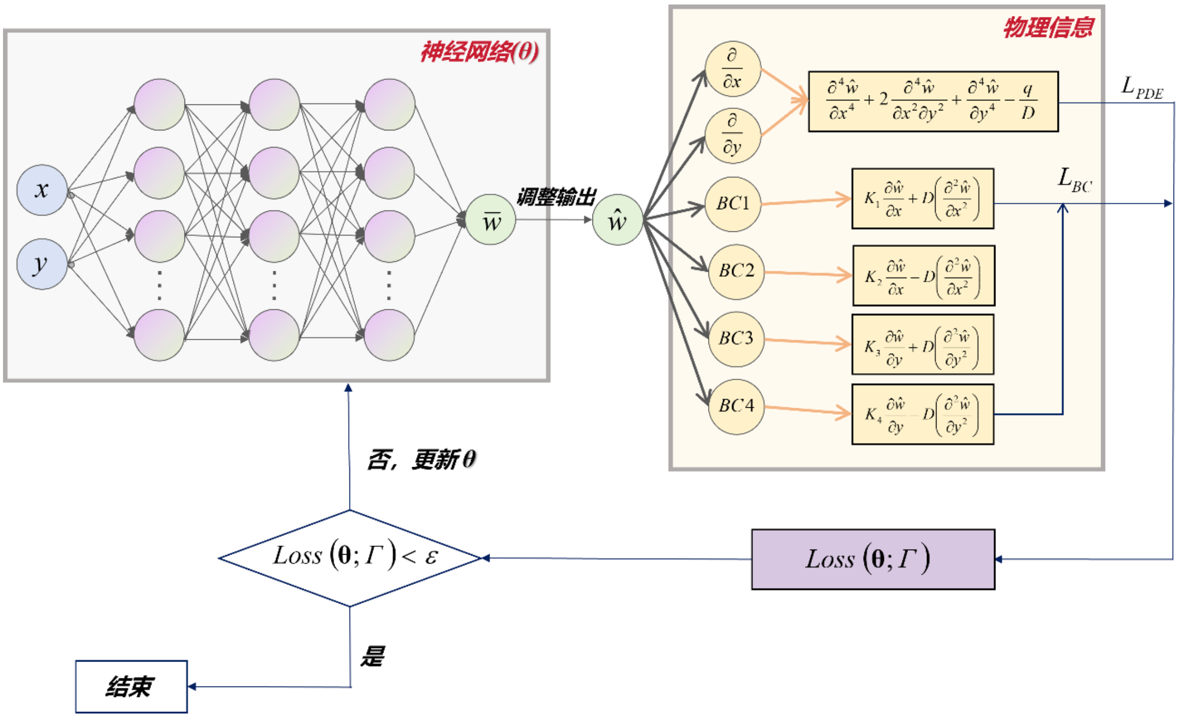


图 4.5 弹性支承薄板力学正问题物理信息神经网络拓扑结构

图 4.5 所示的网络框架以空间坐标 x 和 y 作为输入，输出薄板挠度响应的网

络预测值 $\hat{w}(x,y;\boldsymbol{\theta})$。求解正问题的实质是在无标签数据的情况下训练神经网络不断逼近 PDE 的解的过程。损失函数可以构造为：

$$Loss(\boldsymbol{\theta},\Gamma)=\omega_{PDE}L_{PDE}+\omega_{BC-1}L_{BC-1}+\omega_{BC-2}L_{BC-2}+\omega_{BC-3}L_{BC-3}+\omega_{BC-4}L_{BC-4} \tag{4.1}$$

其中，

$$L_{PDE}=\frac{1}{N_f}\sum_{n=1}^{N_f}\left\|\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial y^4}-\frac{q}{D}\right\| \tag{4.2}$$

$$L_{BC-1}=\frac{1}{N_B}\sum_{n=1}^{N_B}\left\|K_1\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}+D\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x^2}\right)\right\| \tag{4.3}$$

$$L_{BC-2}=\frac{1}{N_B}\sum_{n=1}^{N_B}\left\|K_2\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}-D\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x^2}\right)\right\| \tag{4.4}$$

$$L_{BC-3}=\frac{1}{N_B}\sum_{n=1}^{N_B}\left\|K_3\frac{\partial\hat{w}}{\partial y}+D\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial y^2}\right)\right\| \tag{4.5}$$

$$L_{BC-4}=\frac{1}{N_B}\sum_{n=1}^{N_B}\left\|K_4\frac{\partial\hat{w}}{\partial y}-D\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial y^2}\right)\right\| \tag{4.6}$$

式中，$K_i, i=1,2,3,4$ 为各边界上的转动约束刚度，对于不同的算例其取值见表 4.1；D 为薄板的抗弯刚度。

用平均绝对误差（MAE）构造损失函数。损失函数由两部分组成：第一部分 L_{PDE} 为薄板基本控制方程的损失项，其中 N_f 表示薄板内部配置点在内部训练集 Γ_f 的个数；第二部分是四个边界方程的损失项 L_{BC-1}、L_{BC-2}、L_{BC-3}、L_{BC-4}，N_B 表示薄板边界配置点在边界训练集 Γ_B 的个数；第 $\{\omega_{PDE},\omega_{BC-1},\omega_{BC-2},\omega_{BC-3},\omega_{BC-4}\}$ 为各损失项的权重，其值分别为[1,1,1,1]。

对于边界条件 $w=0$，将使用硬约束的方式添加，即调整网络输出为：

$$\hat{w}(x,y;\boldsymbol{\theta})=\overline{w}(x,y;\boldsymbol{\theta})\cdot(x-0)\cdot(x-1)\cdot(y-0)\cdot(y-1) \tag{4.7}$$

该 PINN 模型是在基于 Tensorflow.compat.v1 的 DeepXDE 深度学习框架进行的，使用 Adam 优化器[102]在前馈神经网络上进行训练，其参数设置为：学习率 $\alpha=0.001,\beta_1=0.9,\beta_2=0.999,\varepsilon=1\times10^{-8}$。内部训练集的个数为 $N_f=4000$，边界训练集的个数为 $N_B=1600$。内部和边界配置点采用随机采点。其余网络中的超参数取值如表 4.2 所示。二个算例采用的网络参数均一致。

表 4.2 网络超参数设置

隐藏层层数	隐藏层神经元数	激活函数	学习率	迭代次数
3	30	tanh	1e-3	20000

4.3.2 弹性支承矩形薄板正问题识别情况

对于算例一的弹性支承矩形薄板正问题，各损失项及总损失函数的迭代过程如图 4.6 所示。总损失在训练之初即迅速下降，但各边界损失项呈现比较明显的短暂上升。在迭代 2500 次后各项损失都开始收敛，当迭代停止时，PDE 项的最终损失为1.19×10^{-3}，边界一为1.01×10^{-4}，边界二为5.98×10^{-5}，边界三为1.15×10^{-4}，边界四为6.21×10^{-5}，最终总损失为1.32×10^{-3}。整个训练过程耗时 209s。

在弹性支承薄板正问题中，网络的输入是空间坐标 x 和 y，网络输出是薄板的挠度响应 $w(x,y)$。将 PINN 所得的挠度预测值与相同边界条件下 MATLAB 有限元分析的挠度数值解进行比较，以验证结果的准确性。以两者的绝对误差值作为准确度的衡量标准。图 4.7（a）为 PINN 预测的薄板挠度值，图 4.7（b）为对应的 MATLAB 有限元分析获得的挠度数值解，图 4.7（c）为两者的绝对误差。可以看到在大部分区域，预测值与数值解的绝对误差的精度达到10^{-7}。可以认为，在薄板全域范围内，该 PINN 模型预测的挠度响应值和有限元模型的结果基本吻合。

对于算例二的弹性支承薄板正问题模型，各损失项及总损失函数的迭代过程如图 4.8 所示。总损失在训练初期快速收敛，经过一段明显的平台期后继续下降，在迭代接近 10000 次时基本达到稳定。当迭代停止时，PDE 项的最终损失为1.19×10^{-3}，边界一为5.61×10^{-5}，边界二为8.09×10^{-5}，边界三为6.57×10^{-5}，边界四为9.83×10^{-5}，最终总损失为1.27×10^{-3}。整个训练过程耗时 182s。可以看到，前期总损失的平台期主要由边界一项引起。在迭代近 6000 次时，各项损失开始同步降低并逐步趋于稳定。

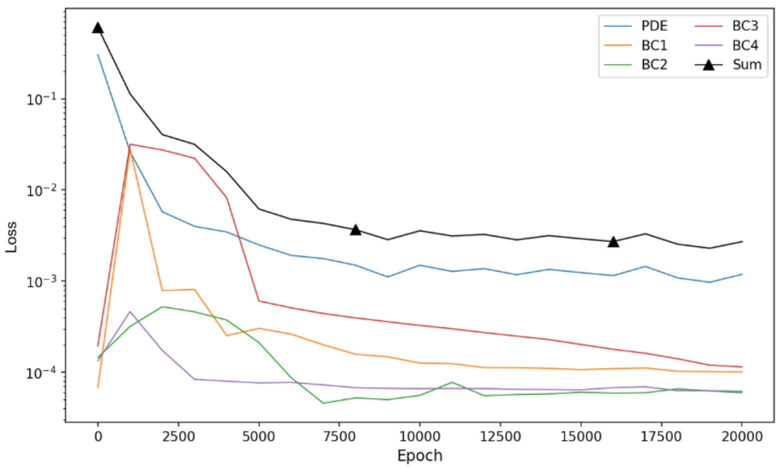
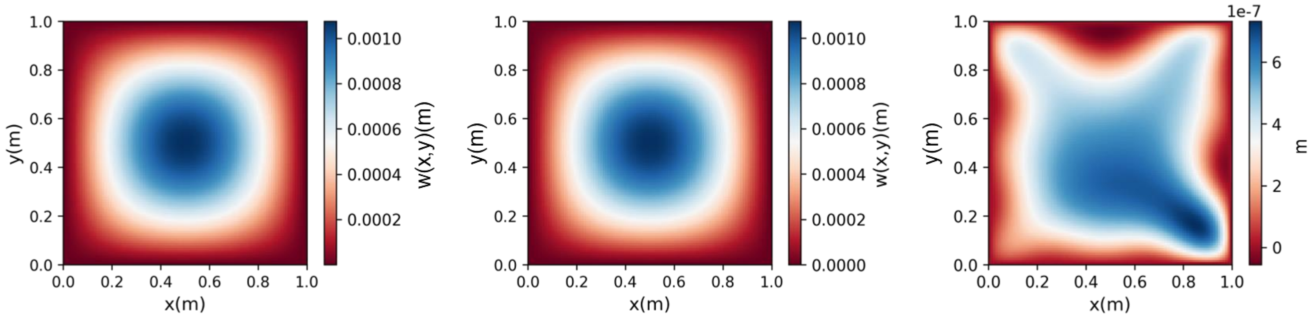


图 4.6 损失函数迭代过程（算例一）



（a）PINN 挠度预测值　　（b）挠度真实值　　（c）绝对误差

图 4.7 薄板挠度预测值与误差值（算例一）

图 4.9（a）为 PINN 预测的薄板挠度值，图 4.9（b）为对应的 MATLAB 有限元分析获得的挠度数值解，图 4.9（c）为两者的对数相对误差。由图可见在大部分区域，预测值与数值解的绝对误差精度为10^{-7}，由此说明基于 PINN 的深度学习模型能够比较好地拟合薄板正确的变形场。

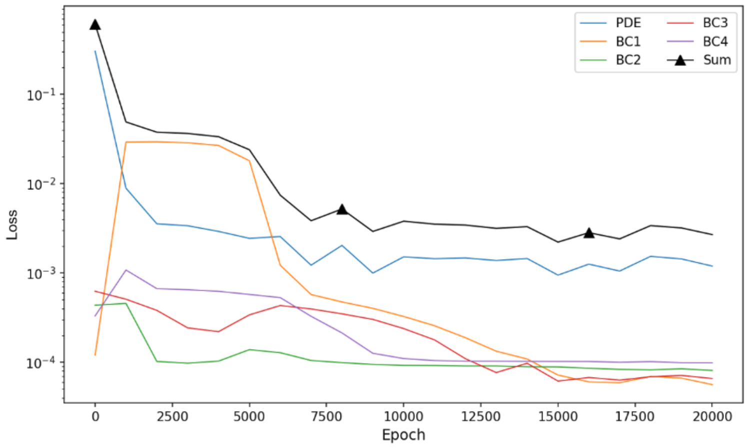
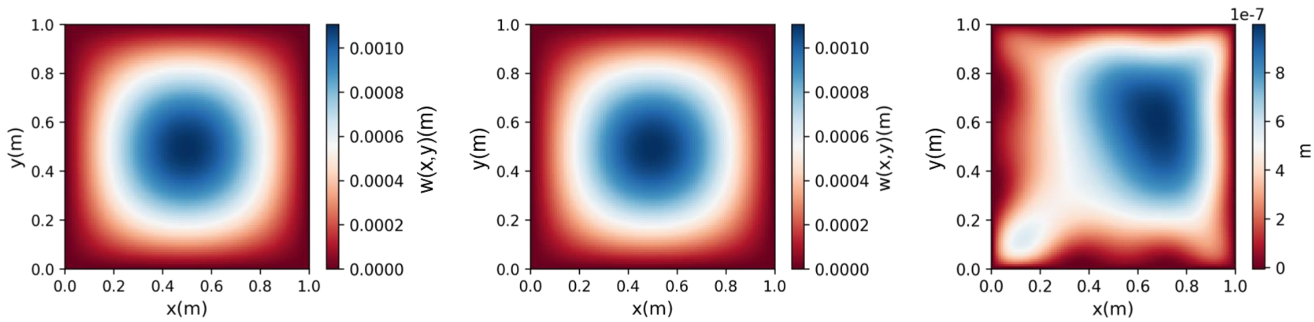


图 4.8 损失函数迭代过程（算例二）



（a）PINN 挠度预测值　　（b）挠度真实值　　（c）绝对误差

图 4.9 薄板挠度预测值与误差值（算例二）

4.4 弹性支承矩形薄板边界反问题

4.4.1 反问题基本理论

求解弹性支承矩形薄板反问题，即是对边界四上的未知转动刚度 K_4 的分布空间进行识别。利用 PINN 解决弹性支承薄板边界反问题，是根据给定的标签数据对网络进行训练并更新优化网络参数，以实现对弹性边界方程中未知的刚度空间的识别。由于待求的转动刚度 $K_4\left(x\right)$ 为一个空间分布函数，求解薄板边界反问题本质上是求解函数空间反问题，则可采用图 2.4 所示的双网络结构同时对挠度和边界刚度进行拟合。此时，利用 PINN 来识别边界空间函数的过程，本质上是为两个网络找到一组最优的网络参数组合使得总损失函数达到最小值，反问题的求解转变为寻找参数空间的网络代理解的问题。

本章将对弹性支承薄板结构边界参数 $K_4\left(x\right)$ 的空间分布进行反演，以此识别薄板边界的损伤状态。

4.4.2 自适应激活函数

如前所述，激活函数的选择对网络的优化性能和非线性表达能力具有重要影响。为不同特性的 PDE 系统选择合适的激活函数，将有助于网络更好地适应和学习数据中的非线性特征，从而提升模型的性能和效果。针对本文研究的薄板力学问题，考虑到其基本控制方程中包含四阶导数，为了更好地增加神经网络准确刻画高阶导数的能力，将采用自适应激活函数来改进 PINN 的训练性能。

为处理 PDE 系统的多样性和复杂性，将采用常见激活函数的线性组合来构建一个候选函数集。研究表明，常用的 Tanh 函数存在严重的过拟合问题[100]，因此在候选集中将不予以考虑。而对于不能提供连续非零高阶导数的激活函数，如 ReLU、ELU 和恒等函数等，同样不予考虑。为了增加函数空间的多样性，提高对不同成分信号的拟合能力，候选集可以选择为正弦函数（Sin）、指数函数（Exp）和逻辑函数（Sigmoid）的组合，如图 4.10 所示。本章采取的自适应激活函数组合为下式所示：

$$f\left(x\right)=\alpha_1 sigmoid\left(x\right)+\alpha_2\sin(x)+\alpha_3 e^x \tag{4.8}$$

$$\alpha_1=\frac{c_1}{c_1+c_2+c_3}，\quad \alpha_2=\frac{c_2}{c_1+c_2+c_3}，\quad \alpha_3=\frac{c_3}{c_1+c_2+c_3} \tag{4.9}$$

$$sigmoid\left(x\right)=\frac{1}{1+e^{-x}} \tag{4.10}$$

式中，α_1、α_2、α_3 是各激活函数的权重，c_1、c_2、c_3 被设置为可学习参数，将跟随网络参数（权重和偏置）一起进行更新优化。

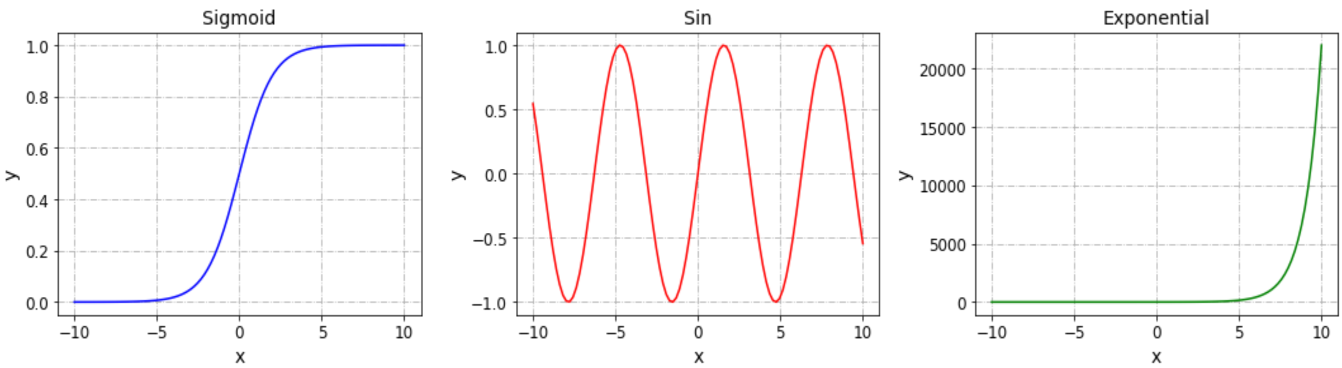


图 4.10 候选集各激活函数示意图

4.4.3 反问题物理信息神经网络拓扑结构设计

研究表明，导数对解的微小误差十分敏感。在处理某些具有高阶导数的 PDE 反问题时，参数识别的准确性强烈依赖于网络对高阶导数面的精准拟合。相比于正问题，求解反问题对神经网络的拟合能力和优化性能提出了更高的要求。

对于弹性支承薄板反问题，通过实验发现使用普通的 PINN 框架难以对边界参数进行反演。因此，本文将采用自适应激活函数的方法来对 PINN 的优化性能进行改进。求解弹性支承薄板边界反问题的神经网络拓扑结构如图 4.11 所示。

由于边界上待识别参数 K 是边界坐标 x 的函数，故使用一个子网络来对参数进行输出。如图所示的网络框架包含两个神经网络：第一个主网络以空间坐标 x 和 y 作为输入，输出薄板挠度响应的网络预测值 $\hat{w}(x, y; \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{c})$；第二个子网络以边界坐标 x 作为输入，输出边界转动弹簧刚度的网络预测值 $\hat{K}(x; \boldsymbol{\theta}_2)$。为提高网络对 PDE 解的拟合能力，自适应激活函数将仅作用于主网络，子网络采用 tanh 作为激活函数。主网络有一个隐藏层，共 40 个隐藏单元。子网络有 2 个隐藏层，每个隐藏层有 20 个单元。

在自适应激活函数中，$\mathbf{c} = c_1$、c_2、c_3 被设置为可学习参数，将与两个网络参数 $\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\boldsymbol{\theta}_2$ 一起优化更新。

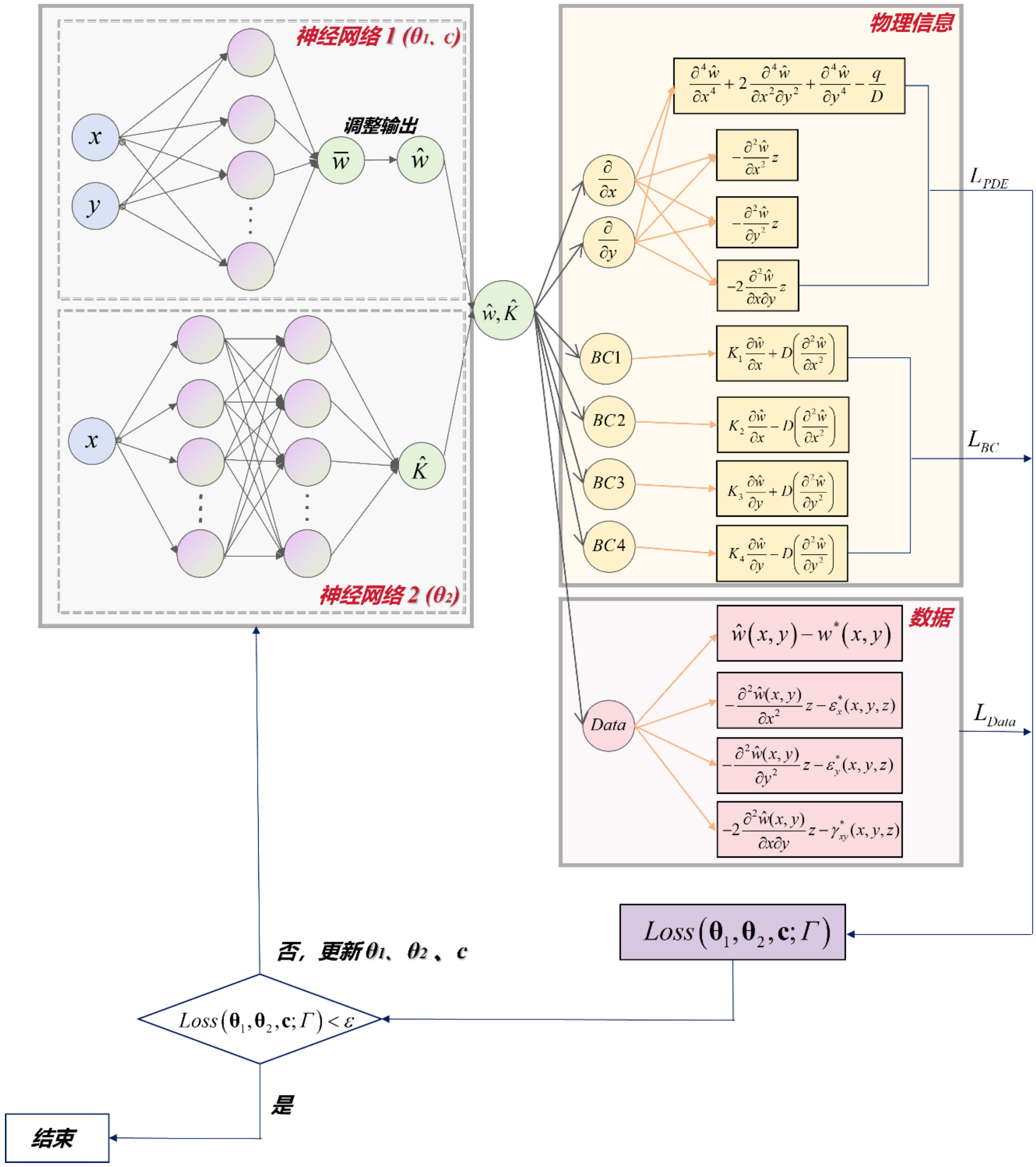


图 4.11 弹性支承薄板力学反问题物理信息神经网络拓扑结构

对 PDE 中未知参数的反演即为对目标函数的优化过程：

$$
\begin{aligned}
K^* &= \min Loss(\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2,\mathbf{c};\Gamma) \\
&= \min_{\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2,\mathbf{c}} (\omega_{PDE}L_{PDE}+\omega_{BC-1}L_{BC-1}+\omega_{BC-2}L_{BC-2}+\omega_{BC-3}L_{BC-3}+\omega_{BC-4}L_{BC-4}+ \\
&\quad \omega_{Data\_w}L_{Data\_w}+\omega_{Data\_\varepsilon_x}L_{Data\_\varepsilon_x}+\omega_{Data\_\varepsilon_y}L_{Data\_\varepsilon_y}+\omega_{Data\_\gamma_{xy}}L_{Data\_\gamma_{xy}})
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

其中，

$$L_{PDE}=\frac{1}{N_f}\sum_{n=1}^{N_f}\left\|\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial y^4}-\frac{q}{D}\right\| \tag{4.12}$$

$$L_{BC-1}=\frac{1}{N_B}\sum_{n=1}^{N_B}\left\|K_1\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}+D\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x^2}\right)\right\| \tag{4.13}$$

$$L_{BC-2}=\frac{1}{N_B}\sum_{n=1}^{N_B}\left\|K_2\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}-D\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x^2}\right)\right\| \tag{4.14}$$

$$L_{BC-3}=\frac{1}{N_B}\sum_{n=1}^{N_B}\left\|K_3\frac{\partial\hat{w}}{\partial y}+D\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial y^2}\right)\right\| \tag{4.15}$$

$$L_{BC-4}=\frac{1}{N_B}\sum_{n=1}^{N_B}\left\|\hat{K}_4\frac{\partial\hat{w}}{\partial y}-D\left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial y^2}\right)\right\| \tag{4.16}$$

$$L_{Data\_w}=\frac{1}{N_D}\sum_{n=1}^{N_D}\left\|\hat{w}(x,y)-w^*(x,y)\right\| \tag{4.17}$$

$$L_{Data\_\varepsilon_x}=\frac{1}{N_D}\sum_{n=1}^{N_D}\left\|-\frac{\partial^2\hat{w}(x,y)}{\partial x^2}z-\varepsilon_x^*(x,y,z)\right\| \tag{4.18}$$

$$L_{Data\_\varepsilon_y}=\frac{1}{N_D}\sum_{n=1}^{N_D}\left\|-\frac{\partial^2\hat{w}(x,y)}{\partial y^2}z-\varepsilon_y^*(x,y,z)\right\| \tag{4.19}$$

$$L_{Data\_\gamma_{xy}}=\frac{1}{N_D}\sum_{n=1}^{N_D}\left\|-2\frac{\partial^2\hat{w}(x,y)}{\partial x\partial y}z-\gamma_{xy}^*(x,y,z)\right\| \tag{4.20}$$

采用平均绝对误差（MAE）构造损失函数。损失函数由三部分组成：第一部分 L_{PDE} 为结构控制方程的损失项，其中 N_f 表示薄板内部配置点的个数；第二部分是四个边界方程的损失项 L_{BC-1}、L_{BC-2}、L_{BC-3}、L_{BC-4}，其中 L_{BC-4} 中含有待识别参数 K_4 ，N_B 表示薄板边界配置点的个数；第三部分 L_{Data} 为数据损失项，其中 N_D 表示标签数据的个数，$\hat{w}(x,y)$ 为薄板挠度的网络预测值，$w^*(x,y)$ 为给定的该处挠度标签数据，$\varepsilon_x^*(x,y,z)$、$\varepsilon_y^*(x,y,z)$、$\gamma_{xy}^*(x,y,z)$ 分别为给定的该点上在 $z=0.0025m$ 处的三个方向上的应变标签数据。

在反问题中，参数反演的本质是在标签数据所约束的空间中寻找解的过程。标签数据作为一种确定的函数值，具有较高的确定性，因此可以给数据损失项分配较大的权重，其目的是确保网络能够准确地学习和拟合已知的重要信息。而 PDE 描述的是函数之间的关系，相比之下是一种较为广泛和抽象的信息，因此可以在训练过程中赋予较小的权重。基于以上原则，可设各损失项权重 $\left\{\omega_{PDE}、\omega_{BC-1}、\omega_{BC-2}、\omega_{BC-3}、\omega_{BC-4}、\omega_{Data\_w}、\omega_{Data\_\varepsilon_x}、\omega_{Data\_\varepsilon_y}、\omega_{Data\_\gamma_{xy}}\right\}$ 其值分

别为$\left[0.1,1,1,1,1,100,100,100,100\right]$。四边边界挠度为零的边界条件通过添加硬约束满足，方式同正问题所述。

该 PINN 模型是在基于 Tensorflow.compat.v1 的 DeepXDE 深度学习框架进行的，使用 Adam 优化器在前馈神经网络上进行训练，各项参数如正问题所述。由于本算例训练样本较少，因此不使用训练批次(Batch Size)进行训练，而是在每次迭代（epochs）中对全样本点进行训练，各训练集采用的训练点个数如表 4.3 所示。内部和边界配置点采用随机采点。迭代次数为 40000 次，采用 1e-3 的学习率。

表 4.3 各训练集个数

$\mathbf{N_f}$	$\mathbf{N_B}$	$\mathbf{N_D}$
4000	1600	30

4.4.4 弹性支承矩形薄板边界反问题识别情况

对于算例一的模拟无边界损伤的弹性支承矩形薄板反问题，各损失项及总损失函数的迭代过程如图4.12所示。总损失在训练之初即快速收敛，在迭代近12000次时收敛放缓。整体来看，除了 PDE 项损失外，其他损失项都有明显的波动，网络训练呈现一定的不稳定性。但三个应变损失项（ε_x、ε_y、ε_{xy}）从迭代开始即迅速收敛。在迭代近 10000 次，挠度损失项快速下降，与其他数据项和 PDE 项共同构成了总损失的下滑。可见，数据约束的添加是必要且有效的，其快速收敛为模型提供了一定的准确性保证。

尽管存在波动，但随着训练次数的增加，总损失项和边界四项都在缓慢收敛，这表明模型在逐渐适应数据，并不断优化损失函数。当迭代停止时，PDE 项的最终损失为9.67×10^{-4}，边界一项为8.98×10^{-5}，边界二项为7.59×10^{-5}，边界三项为1.05×10^{-4}，边界四项为7.58×10^{-6}，挠度项为1.77×10^{-5}，x向正应变项为7.49×10^{-6}，y向正应变项为7.56×10^{-6}，剪应变项为7.66×10^{-6}，总损失项为1.29×10^{-3}。整个训练过程耗时 355s。

在求解弹性支承矩形薄板力学反问题时，标签数据为板中局部点的挠度和应变数据，网络预测值包括薄板的全场挠度响应和边界四的转角约束刚度。首先对 PINN 模型输出的挠度响应进行分析。图 4.13（a）为 PINN 的挠度预测值，图 4.13（b）为相同边界条件下使用 MATLAB 有限元分析获取的挠度解，图 4.13（c）为两者相对误差。由图可见，除了在角部区域误差略大接近 5%，其他域内的相对误差均小于 1%，可见基于 PINN 的反演模型可以较好地拟合弹性支承薄板在均布荷载作用下的挠度场。

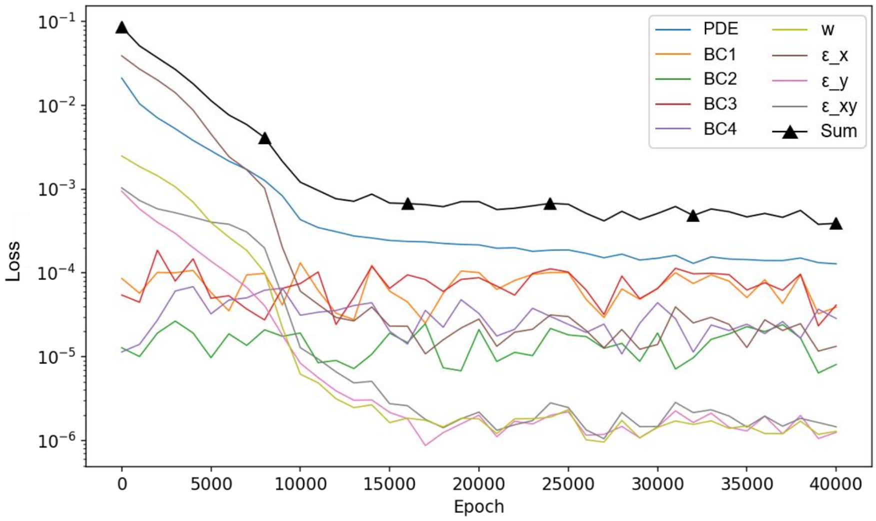
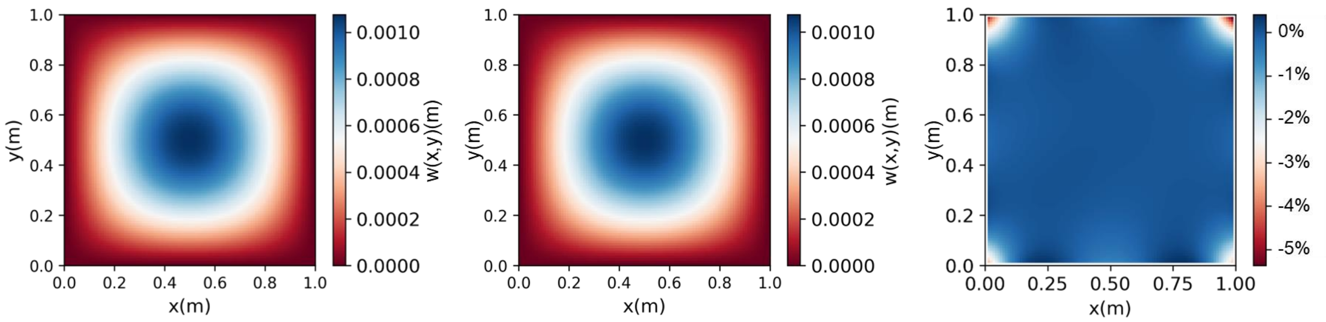


图 4.12 损失函数迭代过程（算例一）

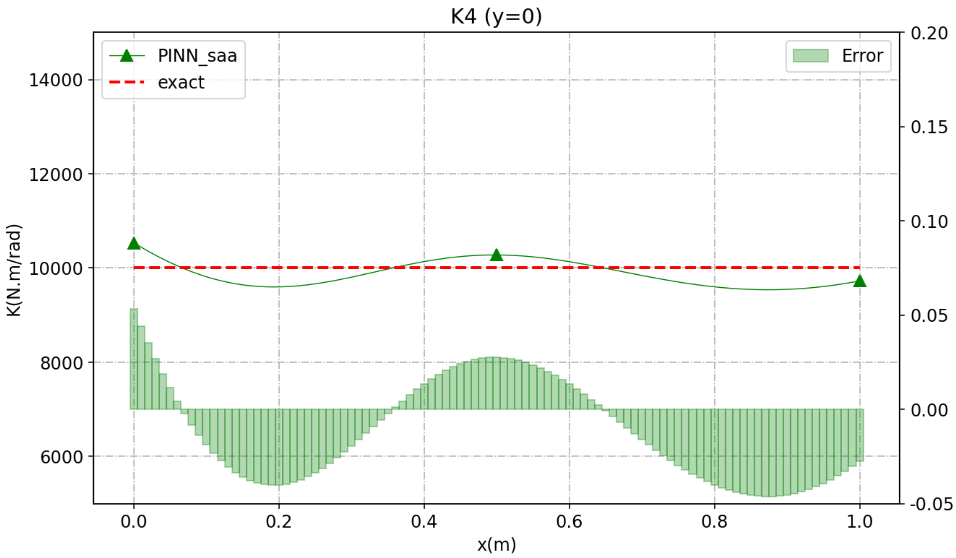
为进行结果比对，设置另一组基于标准 PINN 框架的对比算例对边界刚度进行反演，其中激活函数采用双曲正切函数，其他网络参数和模型设置均和改进 PINN 框架的相同。将基于自适应激活函数改进的 PINN 识别边界约束刚度的结果与普通 PINN 框架进行对比，如图 4.14 所示。图 4.14（a）中红色虚线为设置的真实值，绿色带箭头的实线为自适应激活函数改进的 PINN（PINN_saa）的预测值，绿色柱状图为两者的相对误差值。图 4.14（b）中黑色带星号的实线为普通 PINN 框架的预测值，灰色柱状图为两者的相对误差值。



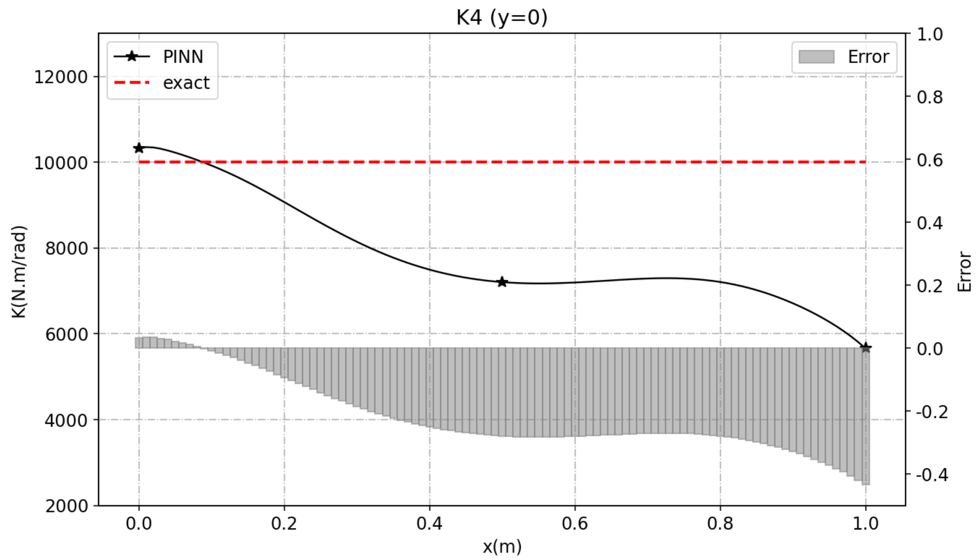
（a）PINN 挠度预测值　　（b）挠度真实值　　（c）相对误差

图 4.13 算例一薄板挠度预测值与误差值

可以看到，标准 PINN 预测的刚度曲线较为明显地偏离了真实分布，平均相对误差为 20%以上。而算法改进后，模型能较好地拟合刚度真实值的分布趋势，预测值在全域内的相对误差均低于 5%。结果显示，基于自适应激活函数改进的 PINN 在该反问题的求解上表现出更高的准确性和精度，相较于标准 PINN 具有更优异的性能。



（a）PINN_saa 边界转角刚度预测相对误差



（b）PINN 边界转角刚度预测相对误差

图 4.14 算例一边界四上转动刚度预测值与真实值对比及相对误差

图 4.15 为算例一中自适应激活函数的三个可学习参数（c_1、c_2、c_3）的训练迭代过程。三个参数从相同的初始值出发，逐渐收敛到稳定值。在迭代停止时，最终结果为$c_1=0.039$，$c_2=0.811$，$c_3=0.615$。据此，相应各激活函数的权重如图 4.16 所示，其中正弦激活函数（Sin）的贡献最大，为 55.36%，其次是指数激活函数（Exp）为 41.98%，逻辑激活函数（Sigmoid）占比最低为 2.66%。

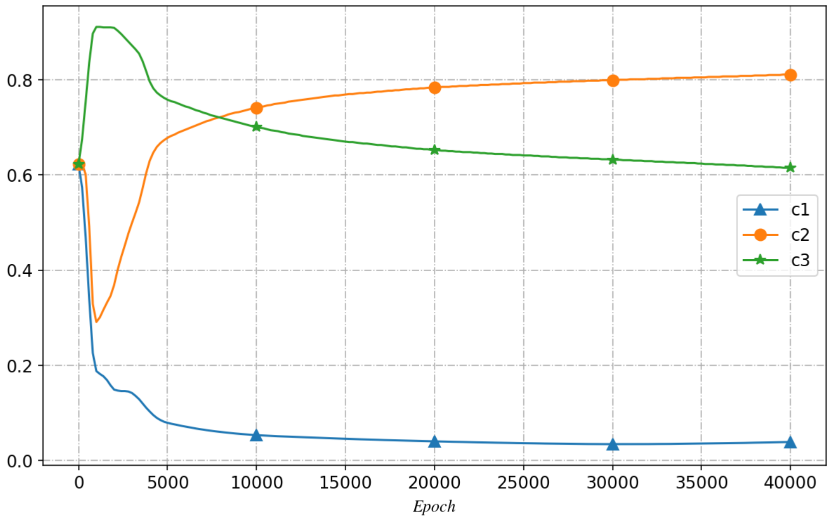


图 4.15　算例一自适应激活函数中可学习参数迭代过程

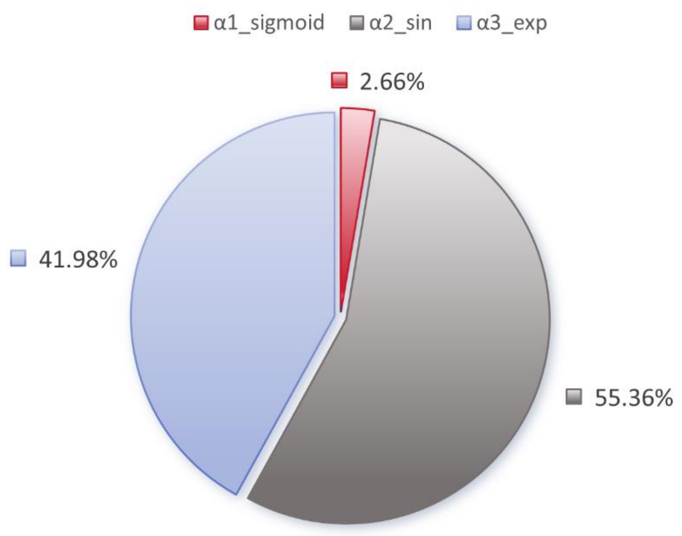


图 4.16 算例一自适应激活函数中各候选集权重值

对于算例二的模拟渐变式边界损伤的弹性支承矩形薄板问题，各损失项及总损失函数的迭代过程如图 4.17 所示。由图可见，在训练初期，边界项和数据项损失出现短时间的互相竞争，但之后都陆续趋于稳定。在包含未知参数的边界损失项出现一定的波动，呈现不稳定的趋势。当迭代停止时，总损失项为1.33×10^{-3}。其中 PDE 项为9.85×10^{-4}，边界一项为9.71×10^{-5}，边界二项为8.71×10^{-5}，边界三项为1.04×10^{-4}，边界四项为3.05×10^{-5}，挠度项为2.96×10^{-5}，x 向正应变项为8.19×10^{-6}，y 向正应变项为8.22×10^{-6}，剪应变项为7.51×10^{-6}。整个训练过程耗时 427s。

图 4.18（a）为 PINN 的挠度预测值，图 4.18（b）为相同边界条件下使用 MATLAB 有限元分析获取的挠度数值解，图 4.18（c）为两者的相对误差。由图

可见，在大部分区域内均不大于 5%，但在边界处误差略大。可以认为在该反问题中，PINN 仍然可以较好地拟合薄板的挠度响应场。

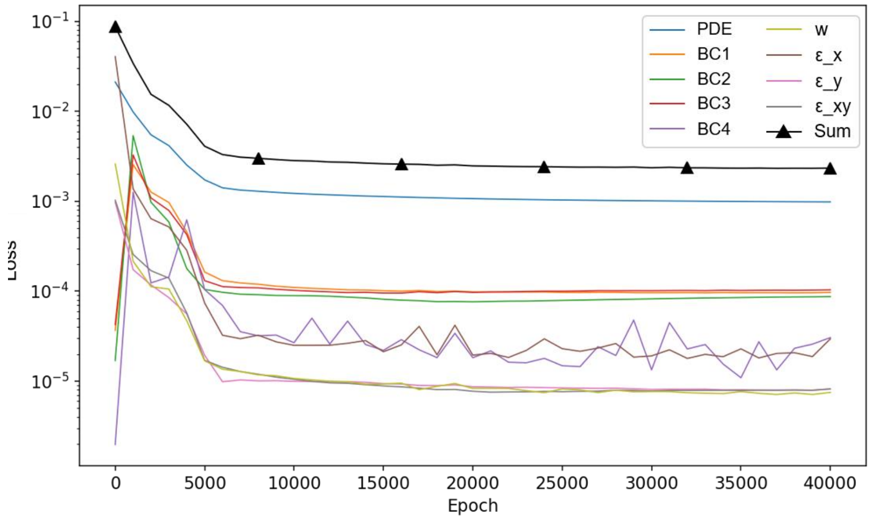
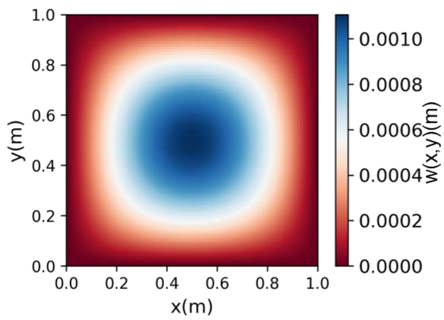
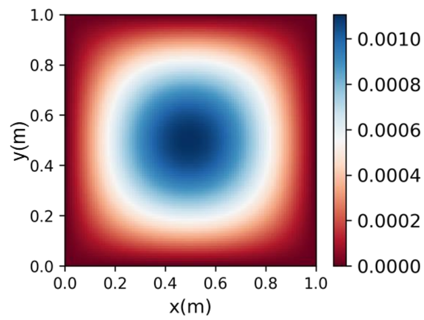


图 4.17 损失函数迭代过程（算例二）

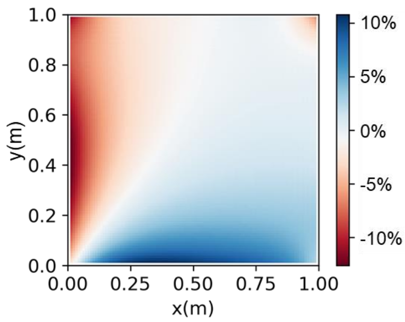
在算例二中，边界四的转动刚度 $K_4(x)$ 的识别情况如图 4.19（a）所示。同样将采用相同网络参数和模型设置的标准 PINN 框架与基于自适应激活函数的改进 PINN 框架进行结果对比，其预测结果如图 4.19（b）所示。结果显示，基于标准 PINN 的反演模型存在较大的预测误差，最大处接近 100%，平均相对误差约 30%，其预测的刚度分布曲线与真实值相去甚远。而如图 4.19（a）所示，基于激活函数改进后的 PINN（PINN_saa）预测的刚度分布与真实刚度分布曲线在整体上较为吻合，在大部分区域相对误差不超过 8%，最大误差不超过 10%。由此可见，自适应激活函数的存在使得网络具有更广的拟合能力，显著提高了模型对复杂数据模式的预测能力。



（a）PINN 挠度预测值

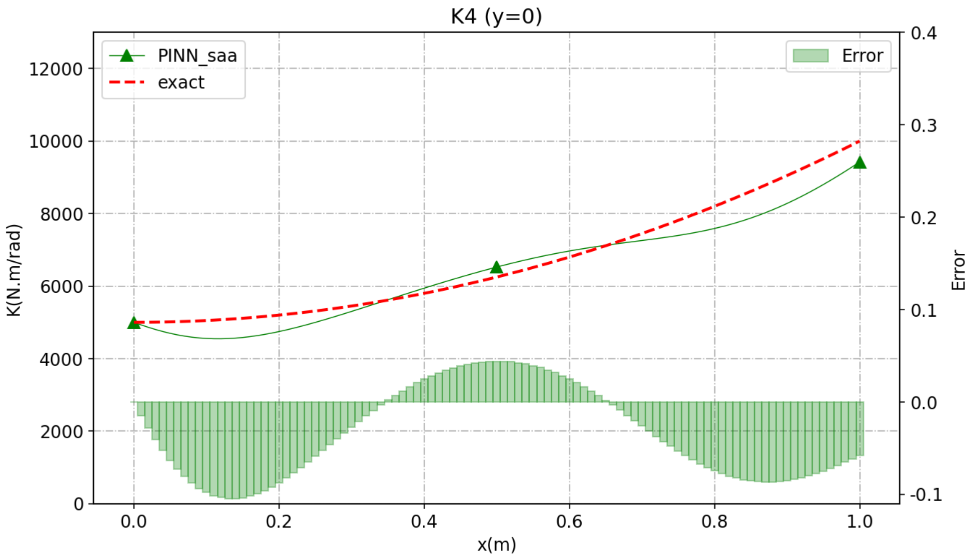


（b）挠度真实值

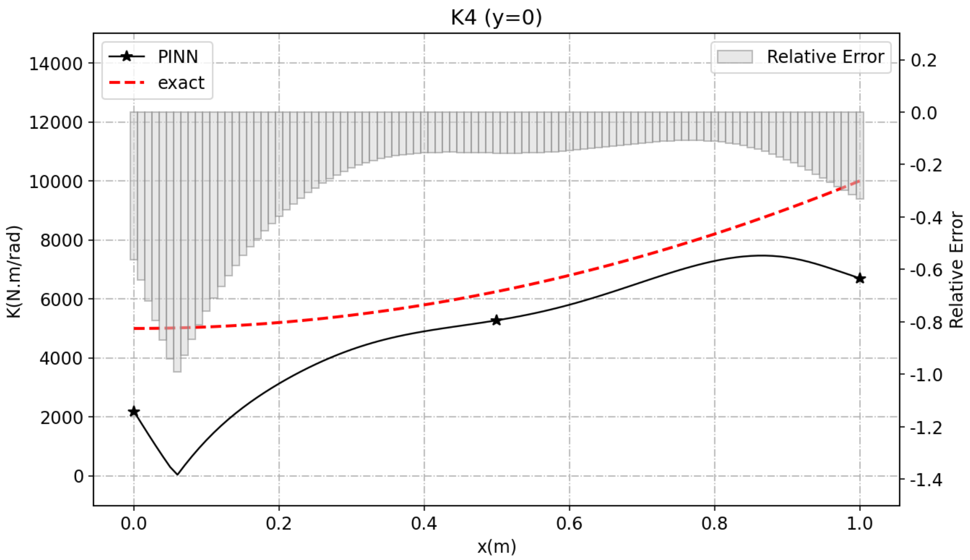


（c）相对误差

图 4.18 算例二薄板挠度预测值与误差值



（a）PINN_saa 边界转角刚度预测相对误差



（b）PINN 边界转角刚度预测相对误差

图 4.19 算例二边界四上转动刚度预测值与真实值对比及相对误差

图 4.20 为算例二中自适应激活函数的三个可学习参数（c_1、c_2、c_3）的训练迭代过程。三个参数从相同的初始值出发，逐渐收敛到稳定值。在迭代停止时，最终结果为$c_1=0.0207$，$c_2=0.743$，$c_3=0.619$。据此，相应各激活函数的权重如图 4.21 所示。其中，正弦激活函数的占比增大，约为 53.74%，其次是指数激活函数为 44.77%，逻辑激活函数的占比仍然最低为 1.5%。

综合以上的结果来看，基于自适应激活函数改进的 PINN 反演模型，其网络预测性能相比普通 PINN 框架有了大幅度提升，根据少量的标签数据，就可以基

本准确地反演出大部分区域的刚度分布。其根本原因在于对于不同的问题，自适应激活函数可在训练过程中根据不同解的性质，动态调整各候选集中非线性函数的比重，这对于提高网络的训练性能和预测精度具有重要影响。

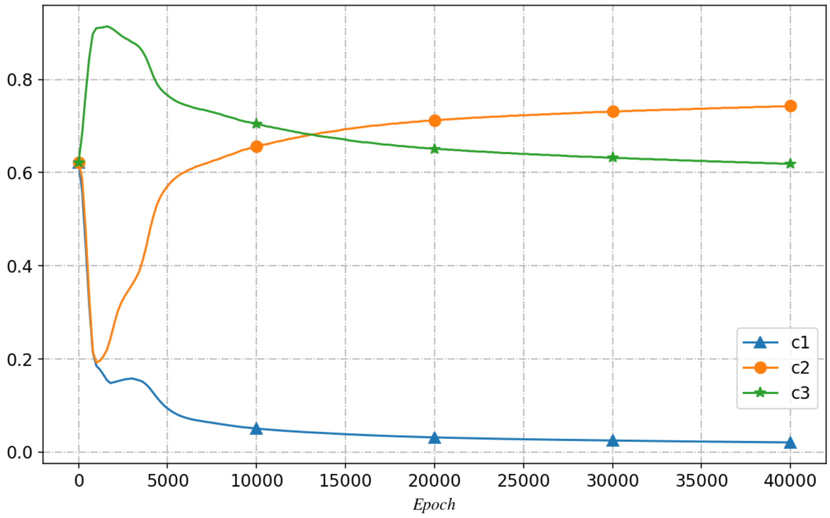


图 4.20 算例二自适应激活函数中可学习参数迭代过程

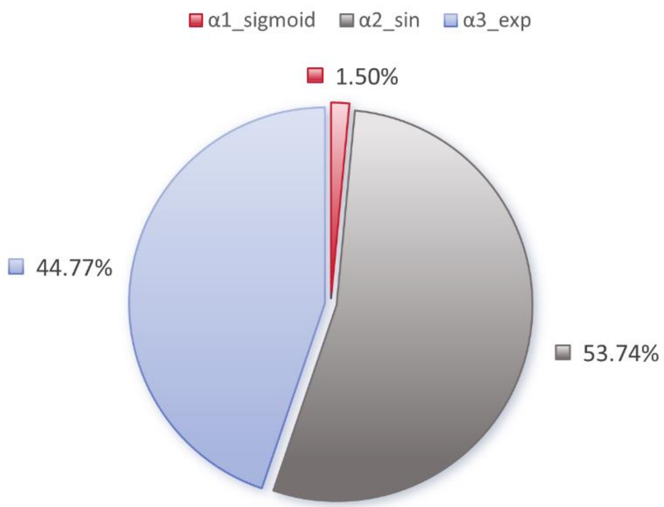


图 4.21 算例二自适应激活函数中各候选集权重值

4.5 本章小结

本章以标准 PINN 框架为基础，通过引入自适应激活函数对其进行算法改进以提高网络的预测性能。我们的目标是根据少量响应数据，推断出与受弯变形相对应的板的边界约束和损伤状态。这个问题的挑战主要在于根据板内局部空间点上的已知响应数据对薄板受弯变形场进行重建，进而求解板边缘上未知系统量的

空间分布。这要求神经网络不仅能够准确预测薄板的挠度场，还要正确推断其各阶导数场，这对 PINN 的精确导数计算能力、预测精度和深层特征挖掘能力都提出了较高的要求。

研究表明，激活函数的选择对网络的非线性表达能力有显著影响。基于这一结论，本章对 PINN 的激活函数进行改进。采用多个非线性函数作为激活函数的候选集，并在训练过程中动态调整各候选项的权重比例，以确保网络能够根据不同问题的解自适应地找到最优激活函数。研究发现，采用标准 PINN 框架基本无法反演边界参数。而优化后的 PINN 算法中，网络的预测能力得到显著提升，待求参数的相对误差从标准 PINN 的 20%~30%降低至 5%~8%。这表明改进后的网络能够根据解的不同性质自适应地调整激活函数的类别和比重，从而更好地拟合真实解的形态，这也是网络高性能的来源之一。

第5章　基于物理信息神经网络的薄板连续变化刚度识别

5.1 引言

在过往研究中，薄板的损伤识别往往只关注局部区域的系统参数变化，通过识别具有固定数值的损伤参数来定位和量化损伤。但对于结构或材料中发生的连续性、非均质性的损伤，其影响不仅限于结构的局部区域，而是在整个结构范围内持续变化和扩散，从而导致结构整体性能的下降。对于此类随空间分布的渐进性、连续性损伤，采用单一或有限的损伤参数将难以对其进行准确描述。因此，为了解决以上问题，本章的研究重点是通过求解二维函数空间反问题，对薄板面内结构损伤进行识别。具体而言，是将薄板的抗弯刚度考虑为一个空间分布函数，并利用 PINN 对该函数空间进行反演，进而识别出结构损伤的空间分布和发展规律。

5.2 变刚度薄板弯曲基本方程

薄板横截面上的内力平衡方程满足：

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+q=0 \tag{5.1}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned} M_x&=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ M_y&=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\ M_{xy}=M_{yx}&=-D\left(1-v\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

式中，w为薄板的挠度，q为作用于薄板的荷载大小，D为薄板的抗弯刚度，v为薄板的泊松比。

将式（5.2）代入式（5.1）可得抗弯刚度随空间变化的薄板弯曲基本方程为：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(D(x,y)(1-v)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+\\&\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(D(x,y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)-q=0\end{aligned} \tag{5.3}$$

将上式化简可得：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(D(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(D(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\&+v\left[\frac{\partial^2 D(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 D(x,y)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 D(x,y)}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-q=0\end{aligned} \tag{5.4}$$

其中，

$$D(x,y)=\frac{E(x,y)h^3}{12\left(1-v^2\right)} \tag{5.5}$$

式中，h 为薄板的厚度，$E(x,y)$ 为薄板弹性模量的空间分布。

5.3 反问题基本理论

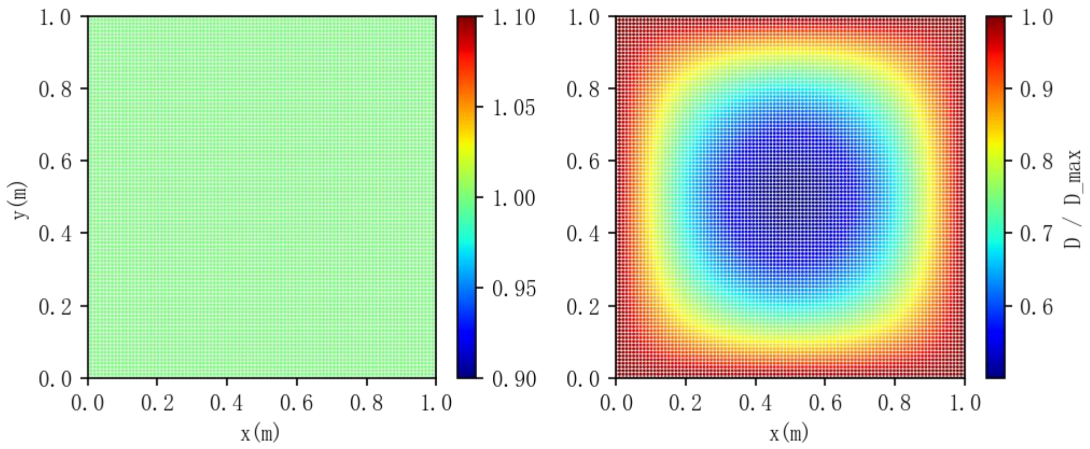
由于薄板的抗弯刚度是一个空间变化的函数，因此识别矩形薄板内部抗弯刚度，本质上是求解二维空间函数反问题。即是在给定的边界条件和控制方程的情况下，根据局部点上的挠度 $w^*(x,y)$ 和应变 $\varepsilon^*(x,y,z)$ 数据，对控制方程中的未知刚度分布 $D(x,y)$ 进行反演。

5.4 构建训练集

设置一个四边固支的矩形薄板，长度 $a=1m$，宽度 $b=1m$，板厚 $h=0.05m$，密度 $\rho=7800kg/m^3$，板上受均布荷载 $q=1000N$ 作用，未受损伤的板弹性模量为 $E(x,y)=2.06\times10^{11}Pa$，泊松比 $\upsilon=0.3$。通过折减抗弯刚度 $D(x,y)$ 引入板的结构损伤，设置两组算例分别模拟未受损伤和受损伤的薄板。

如图 5.1（a）模拟未受损伤的板，其抗弯刚度保持不变为 $D_1(x,y)$，计算方式如式（5.5）所示。如图 5.1（b）所示，模拟抗弯刚度从板边缘开始向中心逐步减弱，其刚度表达式为：

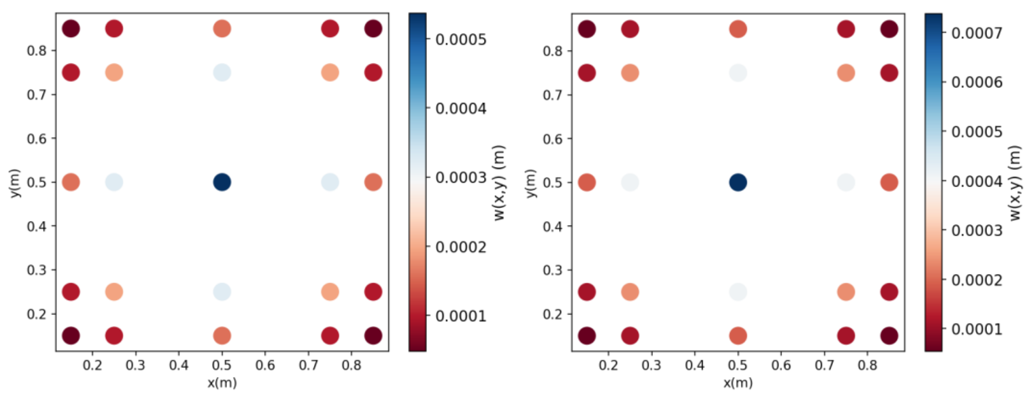
$$D_2(x,y)=\left(1-8x(x-1)y(y-1)\right)\cdot D_1(x,y) \tag{5.6}$$



（a）算例一　　　　　　　　　　（b）算例二

图 5.1 薄板抗弯刚度比值（$D/D_{\max}$）

为求解薄板内部刚度反问题，采用第三章所述的 MATLAB 有限元分析模拟固支薄板获得不同算例下的板响应数据。提取局部位置点上的挠度 $w^*(x,y)$ 和应变数据（包含三个方向 $\varepsilon_x^*(x,y,z)$、$\varepsilon_y^*(x,y,z)$、$\gamma_{xy}^*(x,y,z)$）作为 PINN 的训练集。标签数据点的位置如图 5.2 所示，一共有 25 个标签数据点。



（a）算例一　　　　　　　　　　（b）算例二

图 5.2 薄板内部刚度反问题标签数据点位置示意图

5.5 物理信息神经网络拓扑结构设计

求解固支薄板内部刚度反问题的神经网络拓扑结构如图 5.3 所示。由于待求参数与方程解有相同的自变量空间，网络可同时输出方程的代理解和未知参数的预测值。如图 5.3 所示的网络框架以空间坐标 x 和 y 作为输入，输出为薄板挠度响应的网络预测值 $\hat{w}(x,y;\boldsymbol{\theta})$ 和内部抗弯刚度的预测值 $\hat{D}(x,y;\boldsymbol{\theta})$。求解薄板内部

刚度反问题的过程即是优化目标函数，寻找一组最优的网络参数$\boldsymbol{\theta}$使得 PDE 的解的残差达到最小的同时，抗弯刚度与准确值尽可能地接近。

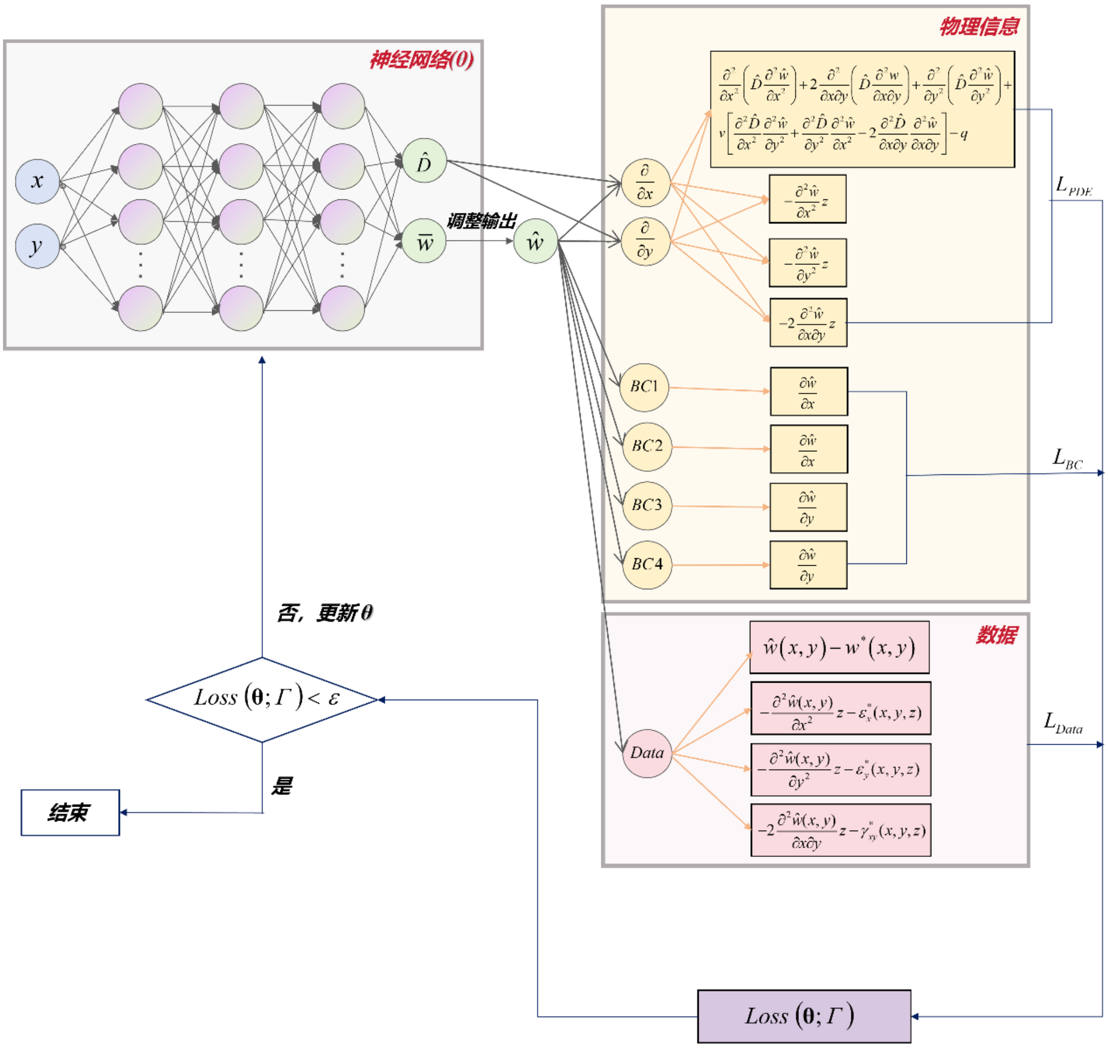


图 5.3 固支薄板内部刚度反问题物理信息神经网络拓扑结构

目标函数的优化过程为：

$$\begin{aligned}K^* &= \min Loss(\boldsymbol{\theta};\Gamma)\\ &= \min_{\theta}(\omega_{PDE}L_{PDE}+\omega_{BC-1}L_{BC-1}+\omega_{BC-2}L_{BC-2}+\omega_{BC-3}L_{BC-3}+\omega_{BC-4}L_{BC-4}+\\ &\qquad \omega_{Data\_w}L_{Data\_w}+\omega_{Data\_\varepsilon_x}L_{Data\_\varepsilon_x}+\omega_{Data\_\varepsilon_y}L_{Data\_\varepsilon_y}+\omega_{Data\_\gamma_{xy}}L_{Data\_\gamma_{xy}})\end{aligned} \tag{5.7}$$

其中，

$$L_{PDE}=\frac{1}{N_f}\sum_{n=1}^{N_f}\left\|\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\hat{D}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x^2}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\hat{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\hat{D}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial y^2}\right)+\\ &v\left[\frac{\partial^2\hat{D}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\hat{D}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\hat{D}}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial x\partial y}\right]-q\end{aligned}\right\| \tag{5.8}$$

$$L_{BC-1}=\frac{1}{N_B}\sum_{n=1}^{N_B}\left\|\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\right\| \tag{5.9}$$

$$L_{BC-2}=\frac{1}{N_B}\sum_{n=1}^{N_B}\left\|\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\right\| \tag{5.10}$$

$$L_{BC-3}=\frac{1}{N_B}\sum_{n=1}^{N_B}\left\|\frac{\partial\hat{w}}{\partial y}\right\| \tag{5.11}$$

$$L_{BC-4}=\frac{1}{N_B}\sum_{n=1}^{N_B}\left\|\frac{\partial\hat{w}}{\partial y}\right\| \tag{5.12}$$

$$L_{Data\_x}=\frac{1}{N_D}\sum_{n=1}^{N_D}\left\|\hat{w}(x,y)-w^*(x,y)\right\| \tag{5.13}$$

$$L_{Data\_\varepsilon_x}=\frac{1}{N_D}\sum_{n=1}^{N_D}\left\|-\frac{\partial^2\hat{w}(x,y)}{\partial x^2}z-\varepsilon_x^*(x,y,z)\right\| \tag{5.14}$$

$$L_{Data\_\varepsilon_y}=\frac{1}{N_D}\sum_{n=1}^{N_D}\left\|-\frac{\partial^2\hat{w}(x,y)}{\partial y^2}z-\varepsilon_y^*(x,y,z)\right\| \tag{5.15}$$

$$L_{Data\_\gamma_{xy}}=\frac{1}{N_D}\sum_{n=1}^{N_D}\left\|-2\frac{\partial^2\hat{w}(x,y)}{\partial x\partial y}z-\gamma_{xy}^*(x,y,z)\right\| \tag{5.16}$$

采用平均绝对误差（MAE）构造损失函数。损失函数由三部分组成：第一部分 L_{PDE} 为结构控制方程的损失项，其中含有待识别参数 $\hat{D}(x,y)$，N_f 表示薄板内部配置点的个数；第二部分是四个边界方程的损失项 L_{BC-1}、L_{BC-2}、L_{BC-3}、L_{BC-4}，N_B 表示薄板边界配置点的个数；第三部分 L_{Data} 为数据损失项，其中 N_D 表示标签数据的个数，$\hat{w}(x,y)$ 为薄板挠度的网络预测值，$w^*(x,y)$ 为给定的该处挠度标签数据，$\varepsilon_x^*(x,y,z)$、$\varepsilon_y^*(x,y,z)$、$\gamma_{xy}^*(x,y,z)$ 分别为给定的该点上在 $z=0.0025m$ 处的三个方向上的应变标签数据。

$\left\{\omega_{PDE},\omega_{BC-1},\omega_{BC-2},\omega_{BC-3},\omega_{BC-4},\omega_{Data\_w},\omega_{Data\_\varepsilon_x},\omega_{Data\_\varepsilon_y},\omega_{Data\_\gamma_{xy}}\right\}$ 为各损失的权重，其值分别为 $\left[0.1,1,1,1,1,1000,1000,1000,1000\right]$。

对于边界条件 $w=0$，将使用硬约束的方式添加，即调整网络输出为：

$$\hat{w}(x,y;\boldsymbol{\theta})=\overline{w}(x,y;\boldsymbol{\theta})\cdot(x-0)\cdot(x-1)\cdot(y-0)\cdot(y-1) \tag{5.17}$$

采用全样本点进行训练，各训练集采用的训练点个数如表 5.1 所示。内部和边界配置点采用随机采点。其余网络中的超参数取值如表 5.2 所示。二个算例采用的网络参数均一致。

表 5.1 各训练集个数

N_f	N_B	N_D
4000	1600	25

表 5.2 网络超参数设置

隐藏层层数	隐藏层神经元数	激活函数	学习率	迭代次数
3	30	tanh	1e-3	60000

5.6 矩形薄板内部抗弯刚度识别情况

对于算例一模拟无内部损伤的矩形薄板刚度反问题，各损失项及总损失函数的迭代过程如图 5.4 所示。在训练初期，各项损失函数出现了一段时间内的停滞不前。随着训练的继续进行，网络从局部最优解或鞍点中跳出，朝着更优的方向更新参数，导致损失函数再次下降。在迭代接近 20000 次，总损失基本降到一定水平，并出现小幅度波动。当迭代停止时，总损失为1.59×10^{-3}。其中 PDE 项为 2.97×10^{-4}，边界一项为2.15×10^{-4}，边界二项为1.54×10^{-4}，边界三项为2.21×10^{-4}，边界四项为1.6×10^{-4}，挠度项为1.01×10^{-3}，x 向正应变项为1.14×10^{-4}，y 向正应变项为1.22×10^{-4}，剪应变项为7.41×10^{-5}。整个训练过程耗时 623s。

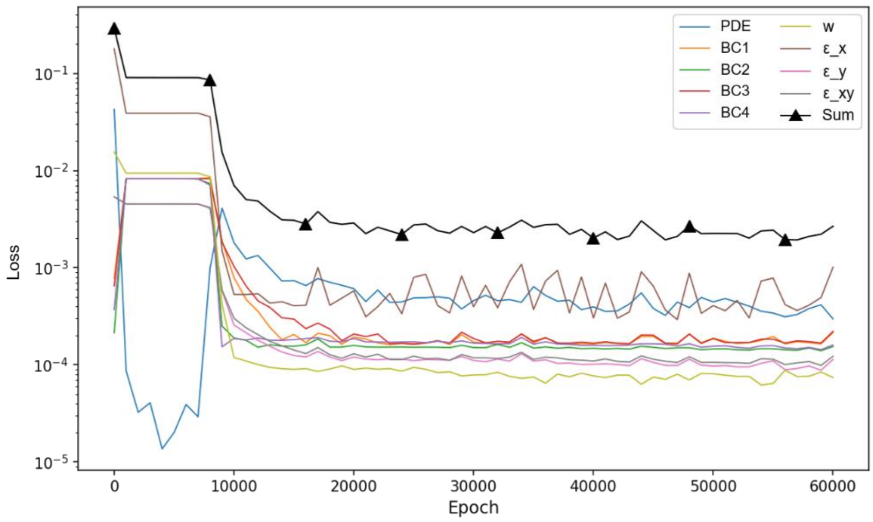
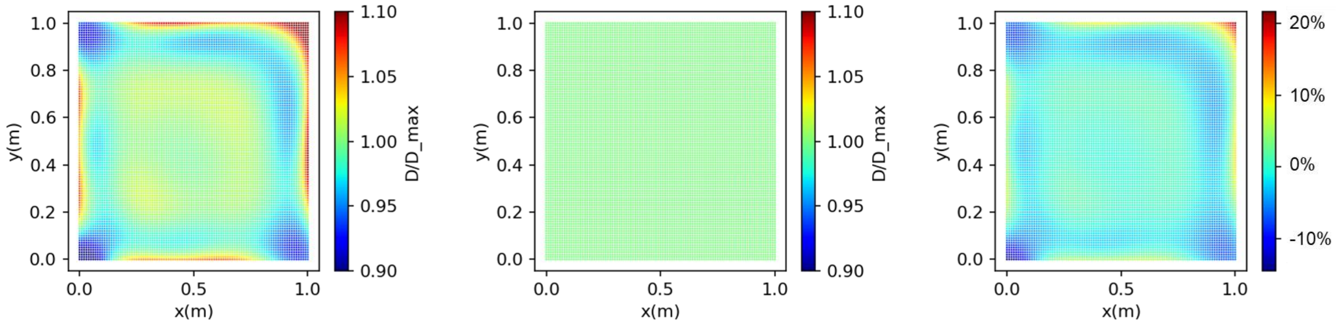


图 5.4 损失函数迭代过程（算例一）

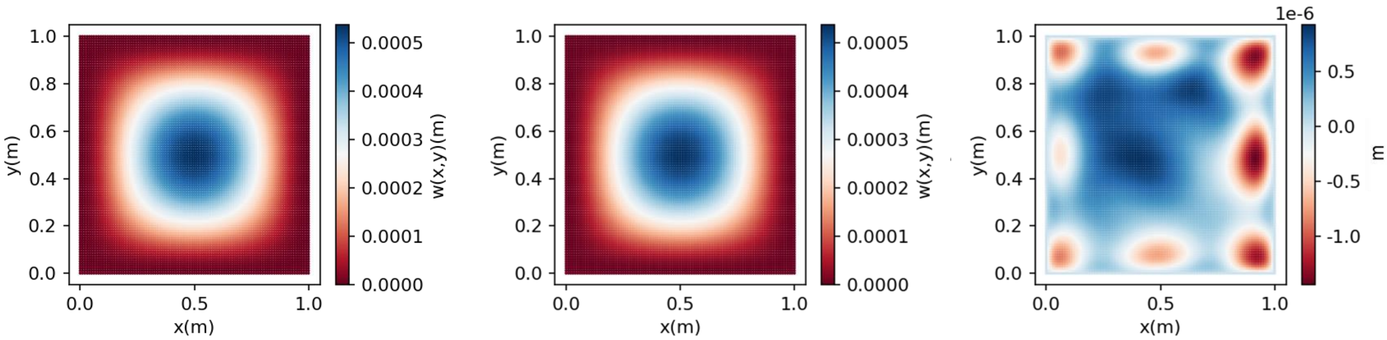
在求解薄板内部刚度反问题时，网络预测值包含全域内的挠度响应和抗弯刚度分布。图 5.5（a）为薄板全域内的抗弯刚度 $D(x,y)$ 网络预测值，图 5.5（b）为

抗弯刚度真实值，图 5.5（c）为网络预测的相对误差。数据分析表明，在非边界区域，90%的板面内预测相对误差均小于 5%。误差主要集中在角部区域，最高可达 20%以上，但作用范围较为小。图 5.6 为算例一中网络的挠度预测值与误差值。由图可见，两者绝对误差的精度为10^{-6}，误差在靠近边界处略大，可以认为该反演模型能较好地拟合挠度曲面，重建薄板的变形场。



（a）PINN 抗弯刚度预测值　　（b）抗弯刚度真实值　　（c）相对误差

图 5.5 算例一薄板全域内板抗弯刚度预测值、真实值与相对误差



（a）PINN 挠度预测值　　（b）挠度真实值　　（c）绝对误差

图 5.6 算例一薄板挠度预测值与误差值

对于算例二模拟内部渐变式损伤的矩形薄板刚度反问题，各损失项及总损失函数的迭代过程如图 5.7 所示。与算例一类似，训练初期有比较明显的平台期，但随着训练的进行，网络逐渐学习到更多的特征，损失函数再次下降，并逐步收敛。当迭代停止时，总损失为1.65×10^{-3}。其中 PDE 项为3.74×10^{-4}，边界一项为2.02×10^{-4}，边界二项为1.74×10^{-4}，边界三项为2.22×10^{-4}，边界四项为1.6×10^{-4}，挠度项为3.62×10^{-4}，x 向正应变项为8.12×10^{-5}，y 向正应变项为9.38×10^{-5}，剪应变项为1.12×10^{-4}。整个训练过程耗时 628s。

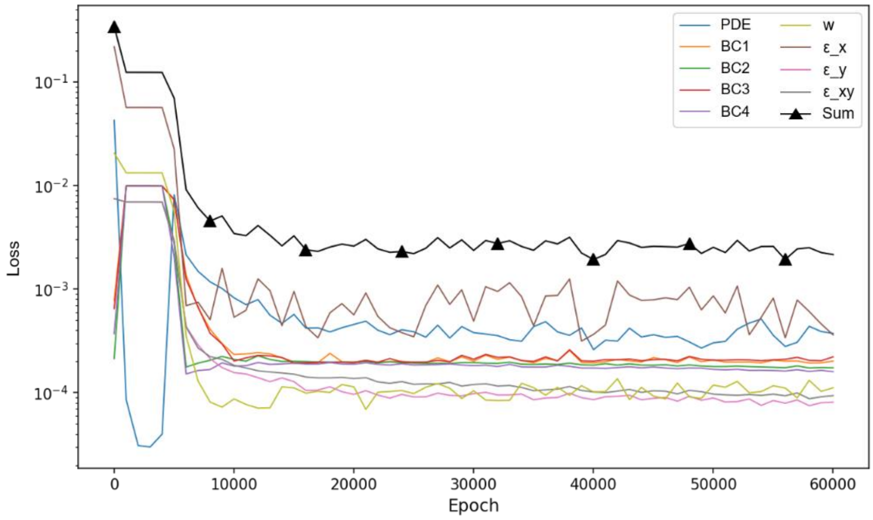
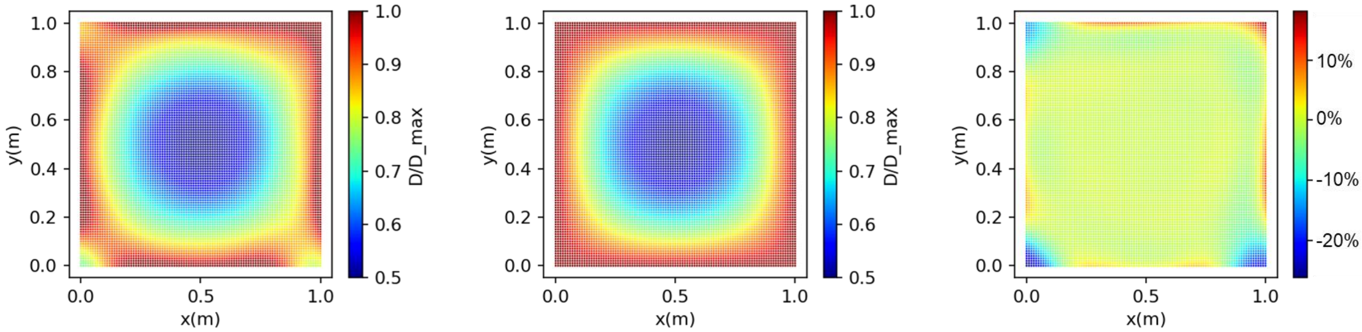
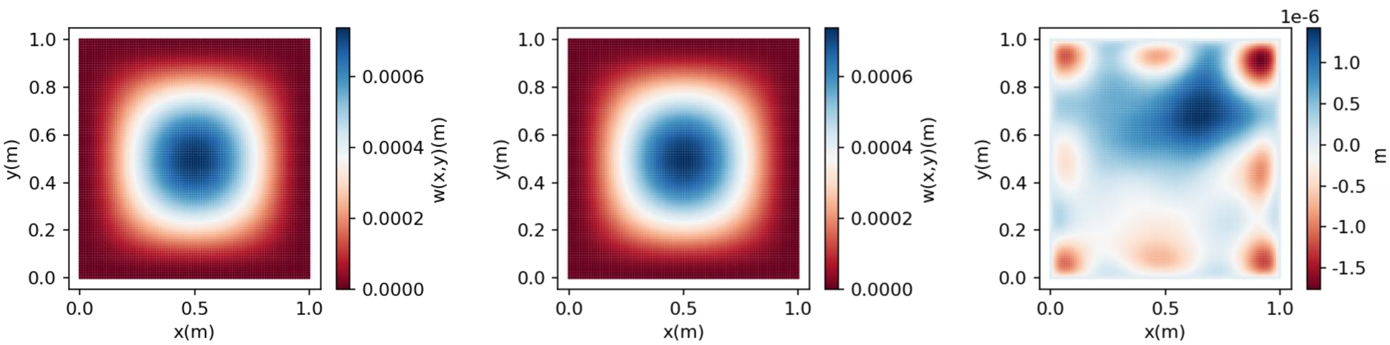


图 5.7 损失函数迭代过程（算例二）



（a）PINN 抗弯刚度预测值　　（b）抗弯刚度真实值　　（c）相对误差

图 5.8 算例二薄板全域内板抗弯刚度预测值、真实值与相对误差



（a）PINN 挠度预测值　　（b）MATLAB 挠度数值解　　（c）绝对误差

图 5.9 算例二薄板挠度预测值与误差值

在算例二中，为模拟结构材料的渐变式退化损伤，抗弯刚度被设置从板边缘开始向中心逐步减弱，板中心位置的最低值为原刚度的一半。图 5.8（a）为薄板全域内的抗弯刚度 $D(x,y)$ 网络预测值，图 5.8（b）为抗弯刚度真实值，图 5.8（c）

为网络预测的相对误差。由图可见，PINN 能基本拟合薄板刚度的空间分布。数据分析表明，在非边界区域，大部分范围内的相对误差均小于 5%，但在靠近角部区域的预测情况稍差。图 5.9 为算例二中网络的挠度预测值与误差值。由图可见，两者绝对误差的精度为10^{-6}，与算例一类似，预测误差在靠近边界处略大，但总体而言，该反演模型能较好地拟合薄板的挠度响应。

5.7 本章小节

本章主要采用基于标准 PINN 框架的反演模型，对矩形薄板的内部刚度分布进行识别。设置了两种算例以模拟结构内部不同的损伤状态。结果表明，依靠少量传感器上的挠度和应变数据，结合变刚度薄板弯曲基本方程和边界条件，PINN 能准确识别薄板非边界区域的参数空间分布，且预测相对误差均小于 5%。但在靠近角部和边界区域，预测结果的误差略大，算法有待进一步优化。总体而言，基于 PINN 的反演模型可以用于求解薄板力学中的二维函数空间反问题，为诊断薄板结构的分布式损伤提供理论支持。

第6章　结论与展望

6.1 主要工作及结论

在本文中，结构损伤主要考虑为材料参数在空间范围内的持续演变。本文主要致力于基于 PINN 深度学习模型对系统的分布性参数进行反演，进而实现对结构空间的、连续的损伤进行识别。以矩形薄板为研究对象，分别对其边界和内部区域展开研究。一方面，板域内结构损伤表现为空间上抗弯刚度的逐渐降低。根据少量传感器上的响应数据，结合薄板弯曲基本方程和边界条件，构建基于 PINN 的反演模型求解薄板力学反问题，预测薄板抗弯刚度函数的空间分布；另一方面，对于边界损伤的识别，由于未知参数出现在边界弹性方程中，为了增强模型的预测性能，引入自适应激活函数对标准 PINN 框架进行算法优化，以完成连续边界损伤的准确识别。

本文的主要的结论如下：

（1）通过调整边界约束刚度函数的大小和空间分布，可以对不同边界条件和损伤状态进行准确模拟。对弹性支承薄板进行有限元分析时，连续边界条件可以离散为边界网格节点上的转动约束，并通过在刚度矩阵中引入相应方向的转动刚度，可以实现分布式弹性边界的有限元建模。

（2）基于改进激活函数的 PINN 反演模型对薄板的连续边界损伤进行识别。结果表明，相比于标准 PINN 框架几乎无法正确反演边界刚度的空间分布，基于改进算法的 PINN 能将预测误差从标准 PINN 的 20%~30%降低至 5%~8%。其原因在于自适应激活函数可以在训练过程中根据解的不同性质动态调整多个非线性函数之间的权重分配，使得预测结果能更好地拟合真实解的形态，进而显著提高了网络的非线性表达性能。

（3）基于标准 PINN 反演模型识别薄板内部的刚度损伤。依据少量的结构响应信息作为数据约束，结合变刚度薄板基本弯曲方程和边界条件作为物理约束，共同建立基于 PINN 的薄板内部参数反演模型。结果表明，该模型能够准确识别薄板内部参数的空间分布，且在非边界区域预测相对误差均小于 5%，但在靠近角部区域仍存在较大误差，算法有待进一步优化。

（4）与传统数值方法相比，基于 PINN 深度学习模型的方法可以减少对精确数学模型的依赖，在部分物理信息缺失的情况下依据少量数据就可以还原物理场，并对 PDE 中的未知参数进行准确识别。PINN 还通过在神经网络的训练中引

入物理信息正则化项，增强了网络从稀疏数据中挖掘潜在结构关系的能力。相比于传统数据驱动的机器学习方法，PINN 可以减轻对大量标签数据的依赖，极大地降低了获取高昂观测数据的成本。PINN 本质上作为一种端到端，无网格化的技术一方面消除了传统数值方法构建计算域的困难，另一方面克服了传统方法求解反问题的限制，为今后更多的损伤识别问题提供新的思路。

6.2 课题展望

本文基于PINN分别对弹性支承薄板的连续边界损伤和内部分布式损伤进行识别。从预测和识别的结果来看，PINN 模型通过将物理信息融合到神经网络的训练中，在求解薄板力学正反问题都有着突出的表现。但受限于作者能力，仍存在一些问题留待进一步的改进：

（1）无论是边界条件还是内部刚度的识别，均在靠近薄板角部位置存在较大误差。研究表明，合适的传感器布置可以减小该部分误差，但仍需更有效的算法改进对这一问题进行优化。

（2）深度学习神经网络的训练效果受各损失函数权重影响较大，本文中各项损失的权重系数主要根据作者经验手动设置，这对模型的进一步泛化造成了一定的限制。之后的研究可以采用自适应权重系数或其他优化策略，进一步提高网络的学习能力，增强模型的可泛化性。

（3）由于反问题本质是病态问题，微小的输入误差也会导致输出的巨大变化。因此，不论是基于标准 PINN 框架还是改进算法后的 PINN，其训练过程中都会出现较为明显的波动和振荡，模型表现出一定的不稳定性。需要采用其他正则化措施或策略对算法进行进一步优化，以解决这个问题。

（4）本文的研究均基于确定性的力学正反问题，即假设所有数据都是准确的且模型是完美的。然而在实际工程中，训练数据会有测量误差，不完备模型也必然会引入不确定性。因此在后续的研究中，可以针对此类测量噪声进行研究，并对不确定性进行量化。

参考文献

[1] AL-HAMMAD A-M, A. HASSANAIN M, N. JUAIM M. Evaluation and selection of curtain wall systems for medium-high rise building construction [J]. Structural Survey, 2014, 32(4): 299-314.

[2] 柳振平.建筑工程幕墙结构的要点分析[J].砖瓦, 2020(05): 82-83

[3] 雷宏刚.高层建筑幕墙节点焊接脆断事故分析[J].建筑技术, 1995(08): 499-500

[4] 张翔.既有玻璃幕墙安全评价研究.[硕士学位论文].西安：西安建筑科技大学，2022.

[5] HE Q, BARAJAS-SOLANO D, TARTAKOVSKY G, et al. Physics-informed neural networks for multiphysics data assimilation with application to subsurface transport [J]. Adv Water Resour, 2020, 141: 103610.

[6] 尹永亮.基于模态参数的弹性板损伤识别方法研究. [硕士学位论文].长沙：长沙理工大学,2015.

[7] 徐宏文,李宁,谢永健.基于模态曲率曲线拟合的板结构损伤识别研究[J].工程抗震与加固改造, 2018, 40(04): 16-20.

[8] 周奎,徐宏文,方早,等.基于柔度曲率曲线拟合的薄板结构损伤识别研究[J].上海理工大学学报, 2018, 40(03): 296-301

[9] 刘文光,颜龙,郭隆清.基于模态应变能法的弹性薄板损伤识别[J].噪声与振动控制, 2016, 36(03): 164-168

[10] SU Z, YE L, LU Y. Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review [J]. J Sound Vib, 2006, 295(3-5): 753-80.

[11] 王月敏.基于 Lamb 波薄板损伤识别的若干问题研究. [硕士学位论文].哈尔滨：哈尔滨工程大学,2014.

[12] 鲁光涛.基于兰姆波的薄壁结构损伤识别. [博士学位论文].武汉：武汉科技大学,2017.

[13] 万陶磊,常俊杰.基于连续小波变换的薄板损伤空气耦合兰姆波成像检测[J].无损检测, 2019, 41(11): 43-47

[14] 綦磊,孙立臣,朱峤,等.基于 Lamb 波结构损伤诊断的边界反射效应控制方法[J].航天器环境工程, 2017, 34(02): 126-131

[15] 李骏明,王海瑞,朱贵富.基于边界反射效应控制的 Lamb 波损伤定位算法研究[J].工业安全与环保, 2023, 49(09): 1-5

[16] 赵林鑫,江守燕,杜成斌.基于 SBFEM 和机器学习的薄板结构缺陷反演[J].工程力学, 2021, 38(06): 36-46

[17] 裴振伟.基于模态分解与机器学习的金属薄板损伤识别研究. [硕士学位论文] .太原：中北大学,2020.

[18] 江守燕,万晨,储冬冬.基于数据驱动的薄板结构多裂纹反演方法[J].力学与实践, 2023, 45(03): 632-643

[19] YAO Y, YANG Y, WANG Y, et al. Artificial intelligence-based hull structural plate corrosion damage detection and recognition using convolutional neural network [J]. Applied Ocean Research, 2019, 90: 101823.

[20] 朱继梅,相小宁. Tchebychev 近似基本解的边界元法在结构边界条件识别中的应用[J].上海机械学院学报, 1992, (03): 55-59

[21] 朱继梅,黄凌.薄板结构边界支承刚度的识别[J].振动工程学报, 1993, (03): 213-219

[22] AHMADIAN H, MOTTERSHEAD J, FRISWELL M. Boundary condition identification by solving characteristic equations [J]. J Sound Vib, 2001, 247(5): 755-63.

[23] AHMADIAN H, ESFANDIAR M, JALALI H. Boundary condition identification of a plate on elastic support [J]. Int J Acoust Vib, 2014, 19(4): 282-6.

[24] VAN DER HEIJDEN B. Towards Data-Driven and Model-Free Predictions for Forward and Inverse Problems in Solid Mechanics [D]; King Abdullah University of Science and Technology, 2023.

[25] VOGEL C R. Computational methods for inverse problems [M]. SIAM, 2002.

[26] TARANTOLA A. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation [M]. SIAM, 2005.

[27] BENNING M, BURGER M. Modern regularization methods for inverse problems [J]. Acta Numer, 2018, 27: 1-111.

[28] GOLUB G H, HANSEN P C, O'LEARY D P. Tikhonov regularization and total least squares [J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1999, 21(1): 185-94.

[29] HANSEN P C. Truncated singular value decomposition solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank [J]. SIAM J Sci Comput, 1990, 11(3): 503-18.

[30] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physica D, 1992, 60(1-4): 259-68.

[31] HANKE M, NEUBAUER A, SCHERZER O. A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems [J]. Numer Math (Heidelb), 1995, 72(1): 21-37.

[32] HANSEN P C, NAGY J G, O'LEARY D P. Deblurring images: matrices, spectra, and filtering [M]. SIAM, 2006.

[33] BOTTOU L. Large-scale machine learning with stochastic gradient descent; proceedings of the Proceedings of COMPSTAT'2010: 19th International Conference on Computational StatisticsParis France, August 22-27, 2010 Keynote, Invited and Contributed Papers, F, 2010 [C]. Springer.

[34] DUCHI J, HAZAN E, SINGER Y. Adaptive subgradient methods for online learning and stochastic optimization [J]. J Mach Learn Res, 2011, 12(7): 2121-59.

[35] LIU L, YANG B, ZHANG Y, et al. Solving Electromagnetic Inverse Problem Using Adaptive Gradient Descent Algorithm [J]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 2023, 61: 1-15.

[36] MARTENS J, SUTSKEVER I. Learning recurrent neural networks with hessian-free optimization; proceedings of the Proceedings of the 28th international conference on machine learning (ICML-11), F, 2011 [C].

[37] SHEWCHUK J R. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain [J]. 1994: 1-58.

[38] WRIGHT S J. Numerical optimization [M]. 2006.

[39] WHITLEY D. A genetic algorithm tutorial [J]. Stat Comput, 1994, 4: 65-85.

[40] KAIPIO J, SOMERSALO E. Statistical and computational inverse problems [M]. Springer Science & Business Media, 2006.

[41] XIE Y, WU C, LI B, et al. A feed-forwarded neural network-based variational Bayesian learning approach for forensic analysis of traffic accident [J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 2022, 397: 115148.
[42] CHEN Q, XIE Y, AO Y, et al. A deep neural network inverse solution to recover pre-crash impact data of car collisions [J]. Transportation research part C: emerging technologies, 2021, 126: 103009.
[43] HAMEL C M, LONG K N, KRAMER S L. Calibrating constitutive models with full-field data via physics informed neural networks [J]. Strain, 2023, 59(2): e12431.
[44] KADEETHUM T, JøRGENSEN T M, NICK H M. Physics-informed neural networks for solving inverse problems of nonlinear Biot's equations: batch training; proceedings of the ARMA US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium, F, 2020 [C]. ARMA.
[45] MAO Z, JAGTAP A D, KARNIADAKIS G E. Physics-informed neural networks for high-speed flows [J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 2020, 360: 112789.
[46] TARTAKOVSKY A M, MARRERO C O, PERDIKARIS P, et al. Learning parameters and constitutive relationships with physics informed deep neural networks [J]. arXiv preprint arXiv:180803398, 2018.
[47] JAGTAP A D, KHARAZMI E, KARNIADAKIS G E. Conservative physics-informed neural networks on discrete domains for conservation laws: Applications to forward and inverse problems [J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 2020, 365: 113028.
[48] HAGHIGHAT E, RAISSI M, MOURE A, et al. A physics-informed deep learning framework for inversion and surrogate modeling in solid mechanics [J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 2021, 379: 113741.
[49] FANG Z, ZHAN J. Deep physical informed neural networks for metamaterial design [J]. IEEE Access, 2019, 8: 24506-13.
[50] CHEN Y, LU L, KARNIADAKIS G E, et al. Physics-informed neural networks for inverse problems in nano-optics and metamaterials [J]. Opt Express, 2020, 28(8): 11618-33.
[51] SHUKLA K, JAGTAP A D, BLACKSHIRE J L, et al. A physics-informed neural network for quantifying the microstructural properties of polycrystalline nickel using ultrasound data: A promising approach for solving inverse problems [J]. IEEE Signal Process Mag, 2021, 39(1): 68-77.
[52] DENG Y, CHEN C, WANG Q, et al. Modeling a typical non-uniform deformation of materials using physics-informed deep learning: applications to forward and inverse problems [J]. Applied Sciences, 2023, 13(7): 4539.
[53] ZHANG E, YIN M, KARNIADAKIS G E. Physics-informed neural networks for nonhomogeneous material identification in elasticity imaging [J]. arXiv preprint arXiv:200904525, 2020.
[54] RAISSI M, YAZDANI A, KARNIADAKIS G E. Hidden fluid mechanics: Learning velocity and pressure fields from flow visualizations [J]. Science, 2020, 367(6481): 1026-30.
[55] GO M S, LIM J H, LEE S. Physics-informed neural network-based surrogate model for a virtual thermal sensor with real-time simulation [J]. Int J Heat Mass Transf, 2023, 214: 124392.
[56] 唐明健,唐和生.基于物理信息的深度学习求解矩形薄板力学正反问题.计算力学学报, 2022, 39(01): 120-128

[57] 唐和生,何展朋,廖洋洋,等.基于物理驱动深度迁移学习的薄板力学正反问题.工程力学, 2023, 40(08): 1-10
[58] SHALEV-SHWARTZ S, BEN-DAVID S. Understanding machine learning: From theory to algorithms [M]. Cambridge university press, 2014.
[59] TARCA A L, CAREY V J, CHEN X-W, et al. Machine learning and its applications to biology [J]. PLoS computational biology, 2007, 3(6): e116.
[60] KOUROU K, EXARCHOS T P, EXARCHOS K P, et al. Machine learning applications in cancer prognosis and prediction [J]. Computational and structural biotechnology journal, 2015, 13: 8-17.
[61] SARKER I H. Machine learning: Algorithms, real-world applications and research directions [J]. SN computer science, 2021, 2(3): 160.
[62] JORDAN M I, MITCHELL T M. Machine learning: Trends, perspectives, and prospects [J]. Science, 2015, 349(6245): 255-60.
[63] HORNIK K, STINCHCOMBE M, WHITE H. Multilayer feedforward networks are universal approximators [J]. Neural networks, 1989, 2(5): 359-66.
[64] KRIZHEVSKY A, SUTSKEVER I, HINTON G E. Imagenet classification with deep convolutional neural networks [Z]. Adv Neural Inf Process Syst. 2012
[65] ESTEVA A, KUPREL B, NOVOA R A, et al. Dermatologist-level classification of skin cancer with deep neural networks [J]. Nature, 2017, 542(7639): 115-8.
[66] LEE J, TOUTANOVA K. Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding [J]. arXiv preprint arXiv:181004805, 2018, 3(8).
[67] HINTON G, DENG L, YU D, et al. Deep neural networks for acoustic modeling in speech recognition: The shared views of four research groups [J]. IEEE Signal Process Mag, 2012, 29(6): 82-97.
[68] RAISSI M, PERDIKARIS P, KARNIADAKIS G E. Machine learning of linear differential equations using Gaussian processes [J]. J Comput Phys, 2017, 348: 683-93.
[69] RAISSI M, KARNIADAKIS G E. Hidden physics models: Machine learning of nonlinear partial differential equations [J]. J Comput Phys, 2018, 357: 125-41.
[70] RAISSI M, PERDIKARIS P, KARNIADAKIS G E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations [J]. J Comput Phys, 2019, 378: 686-707.
[71] PANG G, LU L, KARNIADAKIS G E. fPINNs: Fractional physics-informed neural networks [J]. SIAM J Sci Comput, 2019, 41(4): A2603-A26.
[72] MENG X, KARNIADAKIS G E. A composite neural network that learns from multi-fidelity data: Application to function approximation and inverse PDE problems [J]. J Comput Phys, 2020, 401: 109020.
[73] DWIVEDI V, PARASHAR N, SRINIVASAN B. Distributed physics informed neural network for data-efficient solution to partial differential equations [J]. Neurocomputing, 2019, 420: 299-316.
[74] KHARAZMI E, ZHANG Z, KARNIADAKIS G E. Variational physics-informed neural networks for solving partial differential equations [J]. arXiv preprint arXiv:191200873, 2019.

24534502

[75] KHARAZMI E, ZHANG Z, KARNIADAKIS G E. hp-VPINNs: Variational physics-informed neural networks with domain decomposition [J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 2021, 374: 113547.

[76] YUAN L, NI Y Q, DENG X Y, et al. A-PINN: Auxiliary physics informed neural networks for forward and inverse problems of nonlinear integro-differential equations [J]. J Comput Phys, 2022, 462: 111260.

[77] WANG Y, ZHONG L. NAS-PINN: neural architecture search-guided physics-informed neural network for solving PDEs [J]. J Comput Phys, 2024, 496: 112603.

[78] GROSSMANN T G, KOMOROWSKA U J, LATZ J, et al. Can physics-informed neural networks beat the finite element method? [J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 2024: hxae011.

[79] CAI S, WANG Z, WANG S, et al. Physics-informed neural networks for heat transfer problems [J]. J Heat Transfer, 2021, 143(6): 060801.

[80] YANG L, MENG X, KARNIADAKIS G E. B-PINNs: Bayesian physics-informed neural networks for forward and inverse PDE problems with noisy data [J]. J Comput Phys, 2021, 425: 109913.

[81] POGGIO T, MHASKAR H, ROSASCO L, et al. Why and when can deep-but not shallow-networks avoid the curse of dimensionality: a review [J]. Int J Autom Comput, 2017, 14(5): 503-19.

[82] GROHS P, HORNUNG F, JENTZEN A, et al. A proof that artificial neural networks overcome the curse of dimensionality in the numerical approximation of Black–Scholes partial differential equations [M]. American Mathematical Society, 2023.

[83] WANG S, TENG Y, PERDIKARIS P. Understanding and mitigating gradient flow pathologies in physics-informed neural networks [J]. SIAM J Sci Comput, 2021, 43(5): A3055-A81.

[84] RAHAMAN N, BARATIN A, ARPIT D, et al. On the spectral bias of neural networks; proceedings of the International conference on machine learning, F, 2019 [C]. PMLR.

[85] WANG S, YU X, PERDIKARIS P. When and why PINNs fail to train: A neural tangent kernel perspective [J]. J Comput Phys, 2022, 449: 110768.

[86] PASZKE A, GROSS S, CHINTALA S, et al. Automatic differentiation in pytorch [Z]. 2017

[87] GOSWAMI S, ANITESCU C, CHAKRABORTY S, et al. Transfer learning enhanced physics informed neural network for phase-field modeling of fracture [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2020, 106: 102447.

[88] XIANG Z, PENG W, LIU X, et al. Self-adaptive loss balanced physics-informed neural networks [J]. Neurocomputing, 2022, 496: 11-34.

[89] CUOMO S, DI COLA V S, GIAMPAOLO F, et al. Scientific machine learning through physics–informed neural networks: Where we are and what's next [J]. J Sci Comput, 2022, 92(3): 88.

[90] 柴玉阳,杜绍君,李凤明.弹性边界约束矩形板的振动特性分析：理论、有限元和实验[J].振动工程学报, 2022, 35(03): 577-584

[91] 徐芝纶.弹性力学简明教程[M].北京：高等教育出版社, 2013.

[92] 刘小根.玻璃幕墙安全性能评估及其面板失效检测技术.[博士学位论文] .北京：中国建筑材料科学研究总院,2010.

[93] 董春迎.计算固体力学[M].北京：北京理工大学出版社, 2022.

[94] LU L, MENG X, MAO Z, et al. DeepXDE: A deep learning library for solving differential equations [J]. SIAM Rev Soc Ind Appl Math, 2021, 63(1): 208-28.

[95] RAISSI M, WANG Z, TRIANTAFYLLOU M S, et al. Deep learning of vortex-induced vibrations [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2019, 861: 119-37.

[96] SITZMANN V, MARTEL J, BERGMAN A, et al. Implicit neural representations with periodic activation functions [J]. Adv Neural Inf Process Syst, 2020, 33: 7462-73.

[97] XU Z-Q J, ZHANG Y, LUO T, et al. Frequency principle: Fourier analysis sheds light on deep neural networks [J]. arXiv preprint arXiv:190106523, 2019.

[98] LI X-A, XU Z-Q J, ZHANG L. A multi-scale DNN algorithm for nonlinear elliptic equations with multiple scales [J]. arXiv preprint arXiv:200914597, 2020.

[99] WONG J C, OOI C C, GUPTA A, et al. Learning in sinusoidal spaces with physics-informed neural networks [J]. IEEE Transactions on Artificial Intelligence, 2022, 5(3): 985-1000.

[100] ZOBEIRY N, HUMFELD K D. A physics-informed machine learning approach for solving heat transfer equation in advanced manufacturing and engineering applications [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2021, 101: 104232.

[101] WANG H, LU L, SONG S, et al. Learning specialized activation functions for physics-informed neural networks [J]. arXiv preprint arXiv:230804073, 2023.

[102] KINGA D, ADAM J B. A method for stochastic optimization; proceedings of the International conference on learning representations (ICLR), F, 2015 [C]. San Diego, California;.

[103] HOU J, LI Y, YING S. Enhancing PINNs for solving PDEs via adaptive collocation point movement and adaptive loss weighting [J]. Nonlinear Dynamics, 2023, 111(16): 15233-61.

致谢

时光匆匆，四季流转，一晃三年而过，我的研究生生活也接近尾声。在历经四年的社会浮沉后，我十分有幸能进入同济大学攻读硕士学位，在平静美丽的校园里度过了心无旁骛求知问学的岁月。一树一树的樱花盛开，微风穿行的林荫校道，漫天云霞映照下的土木大楼，这一切的一切，都将成为我生命中无比珍重的记忆。在我的研究和论文写作过程中，我得到了许多人的支持和帮助，我在此向他们表达由衷的感谢。

首先，我要感谢我的导师唐和生教授。在我的研究过程中，唐老师为我指引方向，从选题、研究方法到论文撰写的每一个环节，都给予了我细致入微的指导和宝贵的建议。唐老师为人随和，治学严谨，对学术研究有着极高的追求，并且展现出孜孜不倦的研究精神，这些都让我受益匪浅。

感谢教研室的薛松涛老师，虽然不经常与他见面，但每次见到他总是带着微笑，让人感觉特别温暖；感谢谢丽宇老师，总是悉心管理和照料研究室的各种日常事务，是我们的大家长。

感谢彭茗笙师弟在我的研究中给予我的无私的支持和帮助。我们一起研究和讨论的日子令人难以忘怀——不断地发现问题，钻研问题，最终共享问题解决的快乐。这大概是我最享受的一段科研时光。感谢廖洋洋博士在我多次遇到难题时，总是毫无保留地给予我指导和帮助，非常有幸能遇到如此乐于助人的你！

感谢我的同门龙盼和赵锦桐，非常有幸能遇见这么好的你们，并携手一起走过这段难忘的学术旅程。感谢我的两个小姐妹庞琳和曾敏茹，感谢你们的关心的陪伴，我总是倍感温暖。感谢我的朋友李清璇，感谢你的陪伴让我在异国求学的日子不再孤单。还有感谢 506 教研室里的各个可爱的人们——张文静，夏子涵，史钦豪，吴通海、范永瑞琛，王郝丽，陈千禧、张嘉慧，宋梦贤，李度，李泽宇，纳米等，在撰写论文倍感艰难的那些日子里，你们给了我很多快乐。

感谢我的密友陈瀚斌，谢谢你不厌其烦地听我絮叨，回应我的每一个转发和分享。感谢我的爱人符日鹏，谢谢你一直在我身边无条件地支持我，陪伴我，倾听我。感谢我的爸爸妈妈还有弟弟，你们是我最坚实的后盾，是我最温暖的港湾。

最后，再一次感谢所有在我研究生生涯中给予支持和帮助的人，祝愿大家前程似锦，万事如意。

2024 年 9 月

个人简历、在读期间发表的学术成果

个人简历：

丁宁，女，1994 年 8 月生。

2017 年 6 月毕业于华侨大学。土木工程专业，获学士学位。

2021 年 9 月入同济大学攻读硕士学位。

已发表论文：

[1] 本人第一作者，基于物理信息神经网络求解弹性支承矩形薄板反问题,同济大学土木工程学院院报，2024.5.

24534502

同济大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文**《基于物理信息神经网络的薄板结构分布式参数识别》**，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名： 丁宁

日期： 2024 年 9 月 4 日

同济大学学位论文版权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构送交论文的复印件和电子版；允许论文被查阅和借阅。学校有权将本学位论文的全部或部分内容授权编入有关数据库出版传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于（在以下方框内打“√”）：

☐ 保密，在______年解密后适用本授权书。

☑ 不保密。

学位论文作者签名： 丁宁 **指导教师签名：** 唐和生

日期： 2024 年 9 月 4 日 **日期：** 2024 年 9 月 4 日

24534502

姓名	丁宁	学号	2132246	所在学科/专业	工科/土木水利
指导教师	唐和生	答辩日期	2024.9.4.	答辩地点	防灾系B203会议室
论文题目	基于物理信息神经网络的薄板结构分布式参数识别				

答辩委员会共 4 人，经表决， 4 人建议授予申请人硕士学位。根据《同济大学学位授予工作细则》[注]（在☐内划"√"）：

☑建议授予申请人硕士学位。

☐申请人可在一年内修改论文，申请重新答辩一次。

☐建议不授予申请人硕士学位。

是否推荐为同济大学优秀硕士学位论文： ☐是 ☑否

丁宁同学申请工程硕士学位论文《基于物理信息神经网络的薄板结构分布式参数识别》针对薄板力学损伤问题进行研究，采用物理信息神经网络对薄板结构空间连续分布参数进行识别，论文选题具有一定的学术意义和工程参考价值。

论文的主要工作及成果如下：

（1）建立一种基于自适应激活函数的物理信息神经网络求解力学正反问题模型，将力学控制方程内嵌入深度网络学习框架中，引入自适应激活函数，从而使得该模型具有一定的物理解释性，同时提高了非线性表征能力。

（2）以弹性边界支撑矩形薄板为研究对象，引入空间连续分布的边界约束，建立物理信息多网络模型，并通过子网络表征空间坐标-边界刚度函数。利用少量标签数据，实现了连续边界约束刚度的识别。

（3）以四边固支矩形薄板为研究对象，定义抗弯刚度为空间连续性函数，建立基于物理信息神经网络的空间连续变刚度薄板力学反演模型，实现对薄板平面内空间连续分布函数（板面抗弯刚度）的识别。

论文内容丰富，撰写规范，技术路线合理，模拟结果真实可信，研究成果具有创新性和工程参考价值。论文工作表明，丁宁同学在本学科领域具有扎实的基础理论和专业知识，具备了一定的从事科学研究工作的能力。答辩过程中叙述清楚，答辩委员会对其回答问题满意。经答辩委员会无记名投票，4 位答辩专家委员中，4 位同意建议授予丁宁同学工程硕士学位。

答辩委员会主席签名：谢丽宇　　　　2024 年 9 月 4 日

	职务	姓名	职称	单位	签名
答辩委员会成员签名	主席	谢丽宇	副教授	同济大学土木工程学院结构防灾减灾工程系	谢丽宇
	委员	唐和生	副教授	同济大学土木工程学院结构防灾减灾工程系	唐和生
	委员	和留生	副教授	同济大学土木工程学院结构防灾减灾工程系	和留生
	委员	高宇擘	副教授	同济大学土木工程学院结构防灾减灾工程系	高宇擘
	委员			~~同济大学土木工程学院结构防灾减灾工程系~~	
秘书		张力	博士后	同济大学土木工程学院结构防灾减灾工程系	张力

注：根据《同济大学学位授予工作细则》第十一条规定： 1. 申请人获得全体答辩委员会成员三分之二以上（含）同意票，为建议授予申请人硕士学位； 2. 申请人获得全体答辩委员会成员二分之一以上（含）、三分之二以下（不含）同意票，申请人可在一年内修改论文，申请重新答辩一次；3. 申请人获得全体答辩委员会成员二分之一以下（不含）同意票，为建议不授予申请人硕士学位。