

# 基于自适应无迹卡尔曼滤波算法的非线性系统估计

全运佳<sup>1</sup>, 谢丽宇<sup>1</sup>, 薛松涛<sup>1,2</sup>, 唐和生<sup>1</sup>

(1. 同济大学 结构防灾减灾工程系, 上海 200092; 2. 日本东北工业大学 工学部建筑学科, 日本仙台 982-8577)

**摘要:**采用无迹卡尔曼滤波算法在线识别非线性系统参数和进行状态估计时,要求全部外部激励已知,而大多情况下结构外部激励特别是强震甚至未知激励难以直接量测。为解决上述问题,提出并推导了只需结构输出响应,即可实时估计结构状态、未知参数和未知外部激励力的自适应无迹卡尔曼滤波算法。该自适应无迹卡尔曼滤波算法能够自动递推估计观测噪声的协方差,可以有效避免系统估计受限于不当选取的测量噪声初始值。同时,引入最小二乘法估计未知外部激励力。为验证所提出的自适应无迹卡尔曼滤波算法的可行性,以及其对于多种强非线性系统的适用性,选取两种典型的非线性系统包括一个3自由度 Bouc-Wen 滞回非线性结构和一个 Duffing 型剪切梁结构进行数值模拟分析。并对一单自由度非线性能量阱进行振动台试验研究,估计未知激励力。由识别结果和实际观测值的良好一致性,以及参数的识别精度表明:在有限的响应测量条件下,提出的自适应无迹卡尔曼滤波算法能够有效地实时追踪非线性系统的状态、估计未知参数以及非线性系统的未知外部激励力。

**关键词:**非线性结构; 无迹卡尔曼滤波; 自适应追踪; 未知力估计

**中图分类号:**TU317.9 **文献标志码:**A

## Adaptive unscented Kalman filter for nonlinear structural identification

TONG Yunjia<sup>1</sup>, XIE Liyu<sup>1</sup>, XUE Songtao<sup>1,2</sup>, TANG Hesheng<sup>1</sup>

(1. Department of Disaster Mitigation for Structures, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Department of Architecture, Tohoku Institute of Technology, Sendai 982-8577, Japan)

**Abstract:** With the premise of external excitations to be known, unscented Kalman filter algorithms can be effectively used for on-line tracking parameter variation and performing states estimation of nonlinear systems. However, in most case, external forces are unreachable or difficult to measure. In this paper, an adaptive unscented Kalman filter was proposed to simultaneously identify structural parameters, structural states and forcing input under the condition of unknown excitation history. The adaptive unscented Kalman filter algorithm can automatically and recursively estimate the covariance of the observation noise, a case which can effectively avoid the limitation of improperly selected initial value of the measurement noise in system estimation. The least squares method was introduced to estimate the unknown external excitation force. To further validate the effectiveness and robust of the proposed approach, numerical simulation and experimental analysis were performed, including a three-story hysteretic shear-beam building with a Bouc-Wen model, a nonlinear Duffing-type shear-beam structure analysis, a nonlinear energy sink experimental analysis. Numerical simulation verification and experimental validation examples illustrate that the developed adaptive unscented Kalman filter algorithm is capable of tracking the variations of structural parameters, states, as well as unknown excitation forces.

**Keywords:** nonlinear structure; unscented Kalman filter; adaptive tracking; unknown force estimation

基金项目:政府间国际科技创新合作重点专项(2021YFE0112200),上海市自然科学基金(20ZR1461800)。

作者简介:全运佳,出生于1989年,女,博士研究生,主要从事消能减震研究。email: 1062497220@qq.com

通信作者:谢丽宇,出生于1978年,男,工学博士,副教授,主要从事振动控制研究。email: Liyuxie@tongji.edu.cn

收稿日期:2021年7月

## 0 引言

地震灾害发生后,结构状态的迅速评估对震后修复加固、紧急救援以及维护管理具有重大安全和经济意义,基于结构系统的实测响应推断系统的状态和参数的系统识别方法被广泛研究。自1960年Kalman<sup>[1]</sup>首先提出线性卡尔曼滤波(LKF)算法之后,各种线性识别算法相继被提出,并逐步发展应用于结构的动力学行为是线性或近似线性的系统<sup>[2-5]</sup>。然而,在设防地震或罕遇地震作用下,结构发生大位移、大变形甚至出现不可恢复的损伤,线性估计方法不再适用。非线性可能引发复杂动力响应,并且非线性算子没有确定的输入、输出映射关系,识别非线性系统面临更大的挑战<sup>[6-7]</sup>。

非线性系统识别算法是根据数据收集和处理的先后,可以广义分为在线识别和离线识别算法。在线识别算法在数据收集的同时估计结构的状态和参数,状态估计和参数识别是实时或近乎实时的(考虑到延迟效应);离线识别算法(例如,马尔科夫链蒙特卡洛算法)只能在数据全部收集完成后,才能进行状态和参数估计,且一般计算量庞大,故一般不适用于结构实时监测和反馈控制。常用的在线识别算法有扩展卡尔曼滤波、无迹卡尔曼滤波和粒子滤波等,其中,扩展卡尔曼滤波算法是由Schmidt等NASA的研究学者<sup>[8-9]</sup>为解决非线性航天器导航问题而提出,扩展卡尔曼滤波算法利用泰勒级数展开对非线性系统进行线性化,但其对强非线性系统扩展卡尔曼滤波算法估计不可靠,且线性化涉及到Jacobian矩阵求导,计算量大。无迹卡尔曼滤波算法由Julier等<sup>[10-12]</sup>提出,该算法直接估计目标分布的均值和协方差以替代非线性函数本身,运用特殊设计的确定的样本点(又称作sigma点)的均值和协方差代替原始分布的均值和协方差,并通过非线性方程传递。相较于扩展卡尔曼滤波算法,无迹卡尔曼滤波算法不用线性化系统近似非线性系统,因而适用于非线性程度更高的系统,估计结果更精确也更快速<sup>[13]</sup>。粒子滤波属于随机模拟序列蒙特卡洛算法,该算法采用重要性抽样产生的随机样本粒子和其对应粒子权重,不断迭代趋近于真实的后验概率密度分布<sup>[14]</sup>,不同于卡尔曼滤波系列算法的高斯假定,粒子滤波算法可用于不服从高斯分布的非线性系统,然而重采样会导致样本退化,造成粒子多样性损失,正则化或马尔科夫链蒙特卡洛方法可以解决粒子多样性问题,也有学者引入突变来减少粒子退化<sup>[15-17]</sup>,但都不可避免引入庞大计算量。在结构健康监测和诊断,结构控制等对实时非线性系统识别有特殊要求的领

域,无迹卡尔曼滤波算法应用更广泛<sup>[18-22]</sup>。

采用无迹卡尔曼滤波算法识别时,假定过程噪声(process noise)和观测噪声(measurement noise)协方差矩阵为已知常量,然而实际的过程噪声和观测噪声协方差矩阵通常未知且随时间变化,如果选取的过程噪声和观测噪声协方差矩阵不合理或者不恰当,会导致较大的计算误差甚至算法不收敛。为解决该问题,Calabrese等<sup>[23]</sup>提出了自适应无迹卡尔曼滤波算法,其可以有效自动更新过程和观测噪声协方差矩阵。

但是,上述无迹卡尔曼滤波算法在线识别非线性系统是在已知外部作用力的条件下,然而对于受到风致效应的结构、近海结构和沉入式基础桥梁等结构以及强震作用下的结构,外部激励力未知且难以直接量测,对于一般结构也可能发生传感器故障等偶发情况。为此,Lei等<sup>[24]</sup>在假定未知外力在采样时间内保持不变条件下,推导出可以估计未知外力的无迹卡尔曼滤波,该算法需要将未知外力从系统非线性响应中解耦,对于不能解耦的非线性系统不适用;Erazo等<sup>[25]</sup>提出一种结合无迹卡尔曼滤波算法和马尔科夫链蒙特卡洛算法用于识别未知外力,然而该算法计算量大且无法在线识别。

为解决上述问题,文中提出改进的自适应无迹卡尔曼滤波算法并进行理论推导。为验证提出的自适应无迹卡尔曼滤波算法的可行性,以及验证其能够适应于多种强非线性系统,选取3自由度Bouc-Wen滞回非线性结构和Duffing型剪切梁结构两种典型的非线性系统进行数值模拟验证研究。为了考虑噪声对提出的自适应无迹卡尔曼滤波算法的准确性和鲁棒性的影响,在数值模拟分析时,引入噪声。为进一步验证提出的改进的自适应无迹卡尔曼滤波算法在固有模型误差和测量误差条件下的性能,对一单自由度非线性能量阱进行振动台试验研究。

## 1 改进的自适应无迹卡尔曼滤波算法

在一般随机非线性系统基础上,推导一种改进的自适应无迹卡尔曼滤波算法。

### 1.1 随机非线性系统

对于多自由度结构,其动力平衡方程可表示为

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{F}_c(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{F}_s(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\eta}(t) \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t)$ 、 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 、 $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ 分别是结构的位移、速度和加速度向量; $\boldsymbol{\theta}$ 为结构未知参数; $M$ 为结构质量矩阵, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $\mathbf{F}_c(\cdot)$ 为结构非线性阻尼函数; $\mathbf{F}_c(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ;  $\mathbf{F}_s(\cdot)$ 为结构非线性恢复力函数,

$F_s(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $\boldsymbol{\eta}$  为外部激励的分布向量,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$ ;  $f(t)$  为结构外部激励力函数,  $f(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 。

假定结构系统的参数时不变, 即,  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$ ; 为实现未知参数和状态同步更新, 将未知参数增广到状态向量, 得到增广的状态向量  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^T, \dot{\mathbf{x}}^T, \boldsymbol{\theta}^T\}^T$ , 动力平衡方程式(1)的状态空间表达形式为

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{M}^{-1}[\boldsymbol{\eta}f - F_c(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) - F_s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{B}_1 f + \mathbf{B}_2 \boldsymbol{\beta} \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{g}(\cdot)$  为非线性函数向量;  $\mathbf{B}_1$  为未知激励力的空间分布矩阵;  $\boldsymbol{\beta}$  为独立布朗运动过程, 模拟模型误差和测量的输入噪声<sup>[25]</sup>;  $\mathbf{B}_2$  为随机输入和状态空间的映射矩阵。

输出的观测向量  $\mathbf{y}$  一般为位移、速度或者加速度等状态向量, 由式(2)可知, 状态向量和观测向量都和未知输入向量  $f$  呈线性关系, 据此观测方程可表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, f) + \mathbf{v} = \mathbf{H}\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{B}_3 f + \mathbf{v} \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{h}(\cdot)$  为非线性函数向量;  $\mathbf{B}_3$  为未知激励力的空间分布矩阵,  $\mathbf{B}_3 = \mathbf{H}\mathbf{B}_1$ ;  $\mathbf{H}$  为观测量的位置矩阵;  $\mathbf{v}$  为观测量的测量噪声, 服从高斯分布  $\mathbf{v} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ , 其中,  $\mathbf{R}$  为测量噪声的协方差矩阵。

以上状态向量和观测向量均为相对于地面的位移、速度或者加速度, 而当未知外部激励是地震地面运动时, 由于实际中加速度计测量得到的是绝对加速度, 因此在仅有绝对加速度测量的条件下, 观测向量  $\mathbf{y}$  为绝对加速度的观测方程为

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v} = \mathbf{H}\mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v} \quad (4)$$

基于上述随机非线性系统, 推导改进的自适应无迹卡尔曼滤波算法。

## 1.2 递归识别未知激励力算法推导

将上述非线性系统的动力平衡方程式(1)的连续的状态空间表达形式(式(2))进行离散, 即在采样时间为  $\Delta t$ , 第  $(k+1)\Delta t$  时刻系统的离散状态递推表达式为

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \mathbf{g}(\mathbf{X}_k) dt + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \mathbf{B}_1 f(t) dt + \mathbf{w}_k \quad (5)$$

式中:  $t$  为时间变量;  $\mathbf{X}_k$  为在第  $k$  时间步的离散状态向量;  $\mathbf{w}_k$  为第  $k$  时间步的过程噪声变量。

当采样时间  $\Delta t$  很小时, 假定未知地震输入在采样时间间隔内线性变化, 即采用一阶保持(first-order hold, FOH)<sup>[26]</sup> 假定离散式(5)。离散后,  $f(t)$  可表示为

$$f(t) = f_k + \frac{f_{k+1} - f_k}{\Delta t} (t - t_k) \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)得

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \mathbf{g}(\mathbf{X}_k) dt + \mathbf{B}_d f_k + \mathbf{B}_{d1} f_{k+1} + \mathbf{w}_k \quad (7)$$

其中:  $\mathbf{B}_d = 1.5\mathbf{B}_1\Delta t$ ;  $\mathbf{B}_{d1} = 0.5\mathbf{B}_1\Delta t$ ;  $\mathbf{w}_k$  是系统的过程噪声变量, 服从高斯分布  $\mathbf{w}_k \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$ ,  $\mathbf{Q}_k$  为过程噪声的协方差矩阵。

由  $k\Delta t$  时刻的状态值, 经时间预测过程, 得到  $(k+1)\Delta t$  时刻的先验状态向量  $\tilde{\mathbf{X}}_{k+1}$ , 和经过测量更新得到的  $(k+1)\Delta t$  时刻的后验状态向量  $\hat{\mathbf{X}}_{k+1}$  分别如下:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k+1} = \hat{\mathbf{X}}_k + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{X}}_k) dt + \mathbf{B}_d \hat{f}_k + \mathbf{B}_{d1} f_{k+1} \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{X}}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}\tilde{\mathbf{X}}_{k+1}) \quad (9)$$

式中:  $f_{k+1}$  为  $(k+1)\Delta t$  时刻的外力;  $\mathbf{K}_{k+1}$  为  $(k+1)\Delta t$  时刻的卡尔曼增益矩阵。  $f_{k+1}$  和  $\mathbf{K}_{k+1}$  皆为待求未知量。

对应于式(8)、(9)的估计误差分别为:

$$\tilde{\mathbf{e}}_{X,k+1} = \mathbf{X}_{k+1} - \tilde{\mathbf{X}}_{k+1} = \hat{\mathbf{e}}_{X,k} + \mathbf{e}_{g,k} + \mathbf{B}_d \hat{\mathbf{e}}_{f,k} + \mathbf{w}_k \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{X,k+1} = \mathbf{X}_{k+1} - \hat{\mathbf{X}}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H})\tilde{\mathbf{e}}_{X,k+1} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{e}_{g,k} = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \mathbf{g}(\mathbf{X}_k) dt - \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{X}}_k) dt \approx 0$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_{X,k}$  和  $\hat{\mathbf{e}}_{f,k}$  分别代表  $k\Delta t$  时刻的状态向量的估计误差和未知激励力估计误差。

对应于式(10)、(11)的误差协方差矩阵如下:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{X,k+1} &= E[(\tilde{\mathbf{e}}_{X,k+1})(\tilde{\mathbf{e}}_{X,k+1})^T] = \\ &= [\mathbf{I} \quad \mathbf{B}_d] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{X,k} & \hat{\mathbf{P}}_{XY,k} \\ \hat{\mathbf{P}}_{XY,k} & \hat{\mathbf{P}}_{f,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}^T \\ -\mathbf{B}_d^T \end{bmatrix} + \mathbf{Q}_k \quad (12) \\ \hat{\mathbf{P}}_{X,k+1} &= E[(\hat{\mathbf{e}}_{X,k+1})(\hat{\mathbf{e}}_{X,k+1})^T] = \\ &= \tilde{\mathbf{P}}_{X,k+1} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H}\tilde{\mathbf{P}}_{X,k+1} - \dots - \tilde{\mathbf{P}}_{X,k+1}\mathbf{H}^T\mathbf{K}_{k+1}^T + \\ &= \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{H}\tilde{\mathbf{P}}_{X,k+1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{k+1})\mathbf{K}_{k+1}^T \quad (13) \end{aligned}$$

对于未知卡尔曼增益矩阵  $\mathbf{K}_{k+1}$ , 可以通过求解状态后验估计的误差协方差矩阵  $\hat{\mathbf{P}}_{X,k+1}$  的迹最小进行估计:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{\mathbf{P}}_{X,k+1}) &= \text{tr}(\tilde{\mathbf{P}}_{X,k+1}) - 2\text{tr}(\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H}\tilde{\mathbf{P}}_{X,k+1}) + \\ &= \text{tr}[\mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{H}\tilde{\mathbf{P}}_{X,k+1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{k+1})\mathbf{K}_{k+1}^T] \quad (14) \end{aligned}$$

令  $\frac{d\{\text{tr}(\hat{\mathbf{P}}_{X,k+1})\}}{d\{\mathbf{K}_{k+1}\}} = 0$ , 可得最小化  $\hat{\mathbf{P}}_{X,k+1}$  的迹为

$$\mathbf{K}_{k+1} = \tilde{\mathbf{P}}_{X,k+1}\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\tilde{\mathbf{P}}_{X,k+1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} = \tilde{\mathbf{P}}_{XY,k+1}(\tilde{\mathbf{P}}_{YY,k+1})^{-1} \quad (15)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{P}}_{XY,k+1}$  为  $(k+1)\Delta t$  时刻状态向量  $\mathbf{X}_{k+1}$  和观测向量  $\mathbf{y}_{k+1}$  的交叉协方差矩阵,  $\tilde{\mathbf{P}}_{YY,k+1}$  为  $(k+1)\Delta t$  时

刻观测量  $y_{k+1}$  的自协方差矩阵。

由式(4)可知,输出的观测误差如下:

$$\Delta_{k+1} = y_{k+1} - \hat{y}_{k+1} = (I - HK_{k+1}) \{ y_{k+1} - H\tilde{X}_{s,k+1} - HB_{dl} f_{k+1} \} \quad (16)$$

其中,  $\tilde{X}_{s,k+1} = \hat{X}_k + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} g(\hat{X}_k) dt + B_d \hat{f}_k$ 。

由于  $\tilde{e}_{X_s,k+1} = (X_{k+1} - B_{dl} f_{k+1}) - \tilde{X}_{s,k+1} = \hat{e}_{X_s,k} + e_{g,k} + B_d \hat{e}_{f,k} + w_k$ , 所以  $\hat{P}_{X,k+1} = E[(\hat{e}_{X_s,k+1})(\hat{e}_{X_s,k+1})^T] = E[(\hat{e}_{X_s,k+1})(\hat{e}_{X_s,k+1})^T]$ 。

将式(15)代入  $I - HK_{k+1}$  得:

$$I - HK_{k+1} = R_{k+1} (HP_{X,k+1} H^T + R_{k+1})^{-1} \quad (17)$$

由式(17)表明,  $I - HK_{k+1}$  为满秩矩阵, 并且  $HB_{dl}$  是列向量, 因此, 由式(16)通过最小二乘估计得到:

$$\hat{f}_{k+1} = S_{k+1} (y_{k+1} - H\tilde{X}_{s,k+1}) \quad (18)$$

$$S_{k+1} = [(HB_{dl})^T \tilde{R}_{k+1}^{-1} (HB_{dl})] (HB_{dl})^T \tilde{R}_{k+1}^{-1} \quad (19)$$

$$\tilde{R}_{k+1} = HP_{X,k+1} H^T + R_{k+1} \quad (20)$$

则未知激励的估计误差和误差协方差如下:

$$\hat{e}_{f,k+1} = f_{k+1} - \hat{f}_{k+1} = -S_{k+1} (H\tilde{e}_{X_s,k+1} + v_{k+1}) \quad (21)$$

$$\hat{P}_{f,k+1} = E[(\hat{e}_{f,k+1})(\hat{e}_{f,k+1})^T] =$$

$$S_{k+1} (HP_{X,k+1} H^T + R_{k+1}) S_{k+1}^T \quad (22)$$

为避免系统估计受观测噪声初始值的影响, 观测噪声协方差矩阵递推估计如下:

$$d_{k+1} = (1 - b)(1 - b^{k+1})^{-1} \quad (23)$$

$$\Delta_{k+1} = y_{k+1} - h(\hat{X}_k) \quad (24)$$

$$R_{k+1} = R_k + d_{k+1} (\Delta_{k+1} \Delta_{k+1}^T - P_{YY,k+1}) \quad (25)$$

式中:  $\Delta_{k+1}$  为  $(k+1)\Delta t$  时刻的残差;  $d_{k+1}$  为比例参数;  $b^{k+1}$  为遗忘因子, 通常取值范围为  $0.95 < b^{k+1} < 0.995$ 。

### 1.3 计算步骤

为同时估计结构状态向量  $x$ 、未知参数向量  $\theta$ 、过程噪声向量  $w \sim N(0, Q)$  以及观测噪声向量  $v \sim N(0, R)$ , 将未知参数向量  $\theta$ 、过程噪声向量  $w$  和观测噪声向量  $v$  增广到状态向量, 得到广义的状态变量  $X$ , 增广的状态向量  $X$  可以用随机变量的形式表示为

$$X \sim N \left( \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P & & & \\ & Q & & \\ & & R & \\ & & & \end{bmatrix} \right) \quad (26)$$

未知激励下自适应无迹卡尔曼滤波算法在每一时间步  $k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) 计算过程如下:

1) 对增广的状态变量构建 sigma 点<sup>[27-29]</sup>, 即

$$\chi_{k-1,i} = \begin{cases} \hat{X}_{k-1} & (i = 0) \\ \hat{X}_{k-1} + \sqrt{n + \lambda} [\sqrt{\hat{P}_{k-1}}]_i & (i = 1, \dots, n) \\ \hat{X}_{k-1} - \sqrt{n + \lambda} [\sqrt{\hat{P}_{k-1}}]_i & (i = n + 1, \dots, 2n) \end{cases} \quad (27)$$

其中:  $\hat{X}_{k-1}$  为  $(k-1)\Delta t$  时刻的增广的状态向量的后验估计;  $\hat{P}_{k-1}$  为  $(k-1)\Delta t$  时刻的增广的状态向量的协方差后验估计;  $\chi_{k-1}$  代表建立的 sigma 点分布;  $[\cdot]_i$  为矩阵的第  $i$  列;  $n$  为总状态变量的维度,  $n = n' + n_q + n_r$ ,  $n'$  为结构状态和参数变量的维度和;  $n_q$  为过程噪声变量的维度;  $n_r$  为测量噪声变量的维度;  $\lambda$  为比例参数, 定义为

$$\lambda = \alpha^2 (n + \kappa) - n \quad (28)$$

其中, 参数  $\alpha, \kappa$  决定 sigma 点在均值附近的分布。

2) 通过非线性动力模型传播 sigma 点, 该过程又称作时间预测步, 计算过程如下:

$$\tilde{\chi}_{k,i} = g(\tilde{\chi}_{X,k-1,i}, \tilde{\chi}_{q,k-1,i}, \hat{f}_{k-1}) \quad (i = 0, \dots, 2n) \quad (29)$$

式中:  $\tilde{\chi}_{X,k,i}$  是对应于结构状态和参数变量的 sigma 点, 即矩阵  $\tilde{\chi}_{k,i}$  的前  $n'$  行;  $\tilde{\chi}_{q,k,i}$  是矩阵  $\tilde{\chi}_{k,i}$  对应于过程噪声变量的 sigma 点。

结构状态的模型预测先验状态估计值  $\tilde{X}_k$  和协方差矩阵  $\tilde{P}_k$  分别为:

$$\tilde{X}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_{m,i} \tilde{\chi}_{k,i} \quad (30)$$

$$\tilde{P}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_{c,i} (\tilde{\chi}_{k,i} - \tilde{X}_k) (\tilde{\chi}_{k,i} - \tilde{X}_k)^T \quad (31)$$

其中,  $W_m$  和  $W_c$  是 sigma 点的对应权重。

3) 对于传递 sigma 点, 通过测量模型, 计算观测测量预测向量  $\tilde{y}_k$ 、预测的测量协方差矩阵  $\tilde{P}_{YY,k}$  和状态变量与测量变量的交叉协方差  $\tilde{P}_{XY,k}$ :

$$\tilde{y}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_{m,i} \tilde{Y}_{k,i} \quad (32)$$

$$\tilde{Y}_{k,i} = h(\tilde{\chi}_{X,k-1,i}, \tilde{\chi}_{r,k-1,i}, \hat{f}_{k-1}) \quad (i = 0, \dots, 2n) \quad (33)$$

$$\tilde{P}_{YY,k} = \sum_{i=0}^{2n} W_{c,i} (\tilde{Y}_{k,i} - \tilde{y}_k) (\tilde{Y}_{k,i} - \tilde{y}_k)^T \quad (34)$$

$$\tilde{P}_{XY,k} = \sum_{i=0}^{2n} W_{c,i} (\tilde{\chi}_{k,i} - \tilde{X}_k) (\tilde{Y}_{k,i} - \tilde{y}_k)^T \quad (35)$$

式中,  $\tilde{\chi}_{r,k,i}$  是矩阵  $\tilde{\chi}_{k,i}$  对应于测量噪声变量的 sigma 点。

估计  $k\Delta t$  时刻的未知外部激励力  $\hat{f}_k$ :

$$S_k = ((HB_{dl})^T \tilde{R}_k^{-1} (HB_{dl})) (HB_{dl})^T \tilde{R}_k^{-1} \quad (36)$$

$$\tilde{R}_k = HP_{X,k} H^T + R_{k-1} \quad (37)$$

$$\hat{f}_k = S_k (y_k - H\tilde{X}_{s,k}) \quad (38)$$

4) 计算增益矩阵  $K_k$ , 更新状态的后验估计  $\hat{X}_k$

和协方差矩阵  $\hat{P}_k$  分别为:

$$\mathbf{K}_k = \tilde{\mathbf{P}}_{XY,k} (\tilde{\mathbf{P}}_{YY,k})^{-1} \quad (39)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \tilde{\mathbf{X}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \tilde{\mathbf{y}}_k) \quad (40)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \tilde{\mathbf{P}}_k - \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{P}}_{YY,k} \mathbf{K}_k^T \quad (41)$$

最后,更新测量噪声方差矩阵如下:

$$\mathbf{\Delta}_k = \mathbf{y}_k - \tilde{\mathbf{y}}_k \quad (42)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \tilde{\mathbf{R}}_k + d_k (\mathbf{\Delta}_k \mathbf{\Delta}_k^T - \mathbf{P}_{YY,k}) \quad (43)$$

采用改进算法计算前,需要进行参数初始化,包括为结构状态向量  $\mathbf{x}$ 、未知参数向量  $\boldsymbol{\theta}$ 、未知外部激励力  $\mathbf{f}$  选定初始值  $\mathbf{x}_0$ 、 $\boldsymbol{\theta}_0$ 、 $\mathbf{f}_0$ , 确定初始方差矩阵  $\mathbf{P}_0$ 、 $\mathbf{Q}_0$ 、 $\mathbf{R}_0$ 。为尽可能降低初始值选取对识别结果的影响,利用拉丁超立方抽样方法<sup>[30]</sup>选取多组初值,在每一组初值条件下,分别采用式(27)~(43)进行迭代循环计算,从而得到后验状态、参数的多组估计样本,基于最大后验估计确定最优代表值。

## 2 数值算例和分析

为验证自适应无迹卡尔曼滤波算法的可行性,以及其对多种强非线性系统的适用性,设计了两种典型的非线性系统,包括1个3自由度 Bouc-Wen 滞回框架结构<sup>[24-25]</sup>和1个2自由度 Duffing 剪切梁结构<sup>[31]</sup>进行数值模拟分析。分析中引入噪声研究其对自适应无迹卡尔曼滤波算法的有效性和鲁棒性的影响。

### 2.1 Bouc-Wen 滞回框架结构算例

三层 Bouc-Wen 滞回框架结构模型如图1所示,其中,  $c_i$  为结构第  $i$  层的阻尼系数,  $c_1 = c_2 = c_3 = 100 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$ ,  $k_i$  为第  $i$  层的等效刚度,  $k_1 = k_2 = k_3 = 24000 \text{ N}/\text{m}$ ;  $m_i$  为第  $i$  层的质量,  $m_1 = m_2 = m_3 = 120 \text{ kg}$ 。该结构受到地震加速度  $\ddot{x}_g(t)$  作用时,动力平衡方程可表示为:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \alpha \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + (1 - \alpha)\mathbf{K}\mathbf{z}(t) = -\mathbf{M}\ddot{x}_g(t) \quad (44)$$

$$\dot{z}_i(t) = \dot{x}_i(t) - \beta_i | \dot{x}_i(t) | | z_i(t) |^{\mu-1} z_i(t) - \gamma_i \dot{x}_i(t) | z_i(t) |^{\mu} \quad (45)$$

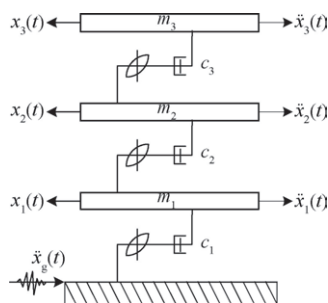


图1 三层 Bouc-Wen 滞回结构模型

Fig. 1 Three stories Bouc-Wen hysteretic structure

式中:  $\mathbf{M}$  为质量矩阵;  $\mathbf{C}$  为阻尼矩阵;  $\mathbf{K}$  为刚度矩阵;  $\mathbf{x}_i(t)$ 、 $\dot{\mathbf{x}}_i(t)$ 、 $\ddot{\mathbf{x}}_i(t)$  分别是第  $i$  层的位移、速度和加速度响应时程,  $i$  取 1、2、3;  $z_i(t)$  为第  $i$  层的滞变位移;  $\beta_i$ 、 $\gamma_i$ 、 $\mu$  为 Bouc-Wen 模型的滞回参数,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 80 / \text{m}^2$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 40 / \text{m}^2$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$ ,  $\alpha$  为第二刚度系数,一般取值范围  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,文中取  $\alpha = 0.2$ 。

数值模拟中结构模型受到峰值加速度为  $g$  的 El Centro 地震波作用,地震持时为 30 s,采样时间为 0.02 s。为模拟信号噪声,假设各楼层加速度噪声为均值为 0、标准差为 2% 的结构楼层加速度响应均方根值的高斯白噪声随机过程,选取结构所有楼层加速度响应(含噪声)作为观测数据。已知结构的质量矩阵  $\mathbf{M}$ , 输出的观测向量为  $\mathbf{y} = [\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t)]^T$ , 待识别的量包括未知地震地面加速度为  $\ddot{x}_g(t)$ 、由结构未知参数和状态构成的总状态向量  $\boldsymbol{\chi} = [\mathbf{x}_i(t), \dot{\mathbf{x}}_i(t), z_i(t), c_i, k_i, \beta_i, \gamma_i, \alpha, \mu]^T$ 。

假定各待识别参数相互独立,采用拉丁超立方采样方法,在参数空间对每个待识别参数抽取 100 个初值。由于结构在外部激励作用之前处于静止状态,所以取初始位移和初始速度状态值为 0。以初始位移和初始速度状态值以及参数初值构成的总初始状态向量作为起始状态,进行状态向量的迭代计算。将参数空间定义为  $c_i \in [10, 1000]$ ,  $k_i \in [2400, 240000]$ ,  $\beta_i \in [10, 1000]$ ,  $\gamma_i \in [10, 1000]$ ,  $\mu_i \in [1, 3]$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ 。

由于第二、三层的识别结果与第一层类似,仅给出改进的自适应无迹卡尔曼滤波算法识别的一层位移、速度、加速度和各参数,结果如图 2~5 所示。图 6 为识别和观测所得未知地面激励加速度时程  $\ddot{x}_g(t)$  对比。

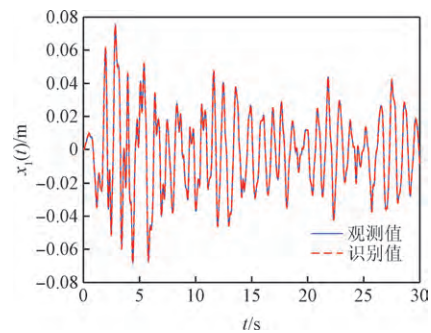


图2 Bouc-Wen 滞回结构第一层位移识别结果  
Fig. 2 Identified results for structural displacement of first floor of Bouc-Wen hysteretic structure

由图 2~6 识别结果和观测值的对比可以看出:识别的刚度参数误差在 1% 以内,逐步收敛于观测值;识别的阻尼和滞回参数也逐步收敛于观测值附

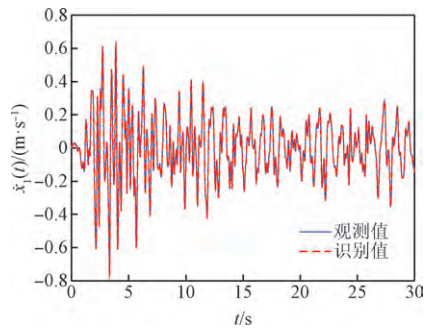


图3 Bouc-Wen 滞回结构第一层速度识别结果  
Fig.3 Identified results for structural velocity of first floor of Bouc-Wen hysteretic structure

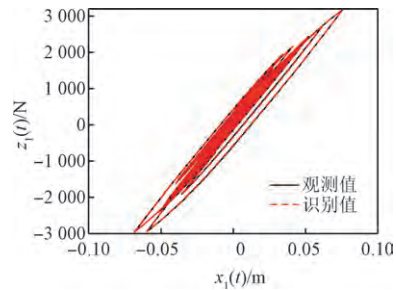


图5 Bouc-Wen 滞回结构一层滞变恢复力识别值和观测值对比  
Fig.5 Comparison of exact and identified first floor hysteretic forces of Bouc-Wen hysteretic structure

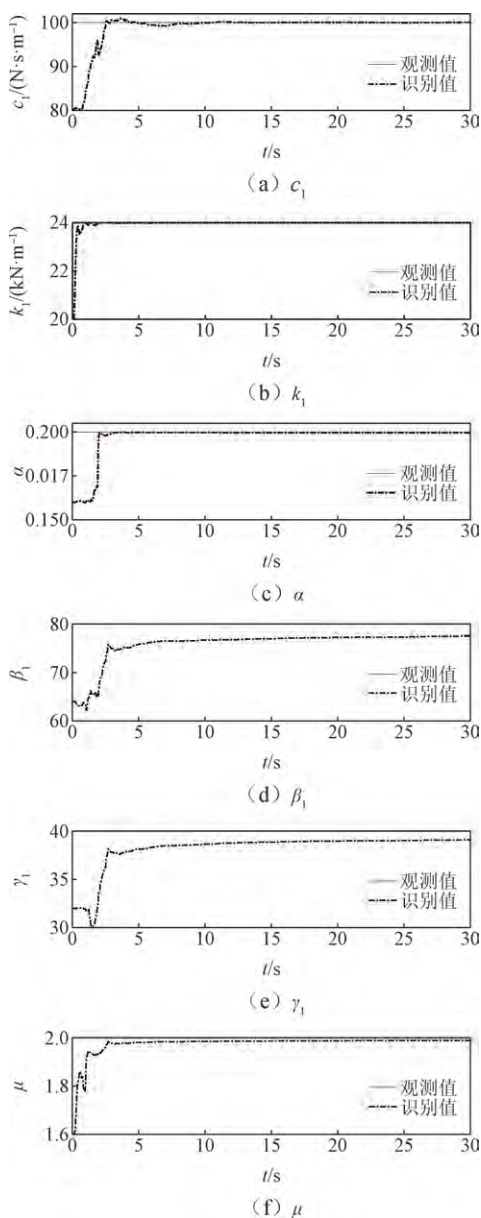


图4 Bouc-Wen 滞回结构一层参数识别结果  
Fig.4 Identified results for structural parameters of first floor of Bouc-Wen hysteretic structure

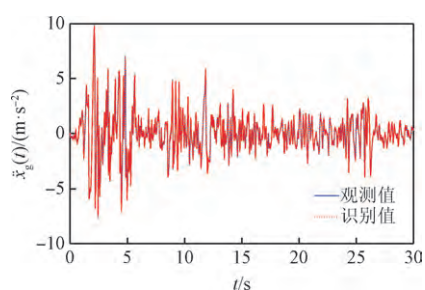


图6 Bouc-Wen 滞回结构地面加速度识别值和观测值对比  
Fig.6 Comparison of exact and identified results for unknown external forces of Bouc-Wen hysteretic structure

近,且误差最大为 6.77%,也在可接受范围内;其中滞回参数的识别误差大于刚度参数,这是由于刚度对结构响应的贡献相对较大,因而刚度参数对结构响应的变化更敏感,相对也更容易通过识别得到真实值。

为了对比验证改进的自适应无迹卡尔曼滤波算法的有效性和优越性,对上述同一模型,采用传统无迹卡尔曼滤波算法估计,噪声向量确定且可叠加,模型参数估计结果如图 7 所示。

由图 7 识别结果和观测值的对比可以看到,除刚度参数  $k_1$  和第二刚度系数  $\alpha$  外,其他参数并没有收敛到观测值,这是由于初始选取的过程噪声向量和观测噪声向量不恰当,导致识别参数时会出现不收敛,或者状态的协方差变小而导致参数和状态收敛于真实状态过缓,因而传统无迹卡尔曼滤波算法对初值的合理选取依赖度高。相比之下,改进的自适应无迹卡尔曼滤波方法更稳定,且对初值的选取要求较低。

## 2.2 Duffing-type 剪切梁结构算例

具有 2 个自由度的两层 Duffing-type 剪切梁结构模型,由弹簧提供线弹性恢复力,由阻尼单元提供系

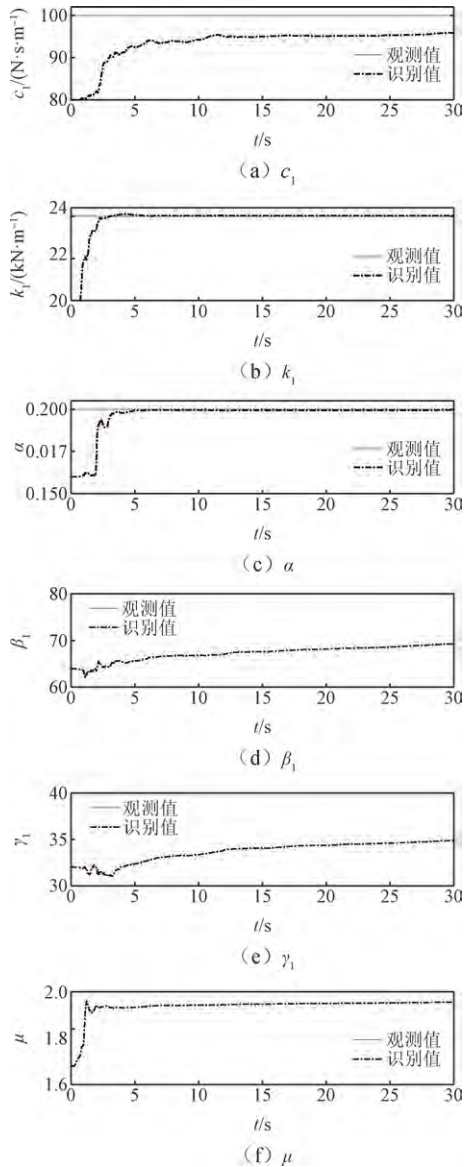


图7 Bouc-Wen 滞回结构模型传统无迹卡尔曼滤波算法参数识别值和观测值对比

Fig.7 Comparison of exact and identified model parameters of first floor of Bouc-Wen hysteretic structure

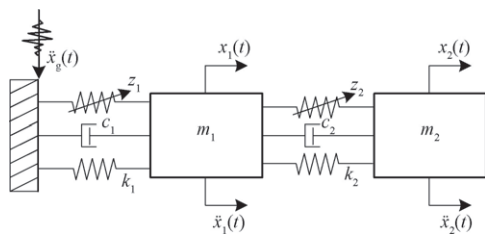


图8 二层 Duffing-type 剪切梁结构模型

Fig.8 Two stories Duffing-type shear-beam building

统的阻尼,由非线性弹簧提供非线性恢复力,如图8所示,图中 $k_i$ 表示线弹性刚度, $c_i$ 表示阻尼系数, $z_i$ 表示非线性刚度, $i=1,2$ 。Duffing-type 剪切梁结构运

动方程可表示为:

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{Z}\mathbf{x}^3(t) = \boldsymbol{\eta}f(t) \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{Bmatrix} + \dots \\ \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} z_1 + z_2 & -z_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1^3(t) \\ \mathbf{x}_2^3(t) \end{Bmatrix} = -M\ddot{\mathbf{x}}_g(t) \quad (47)$$

式中,  $M = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ ,  $K = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ ,  $Z = \begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$ 。

在峰值加速度 $0.5g$ 的El-Centro地震波作用下,地震持时 $30s$ ,采样频率 $200Hz$ 。已知结构的质量矩阵 $M$ ,考虑到观测误差,在楼层加速度响应中叠加均值为 $0$ 、标准差为 $2\%$ 的结构楼层加速度响应均方根的高斯白噪声,并将其作为输出的观测量 $\mathbf{y} = [\ddot{\mathbf{x}}_1(t), \ddot{\mathbf{x}}_2(t)]^T$ ,需识别的量为地震地面加速度为 $\ddot{\mathbf{x}}_g(t)$ 、由结构未知参数和状态构成的总状态向量 $\boldsymbol{\chi} = [\mathbf{x}_i(t), \dot{\mathbf{x}}_i(t), c_i, k_i, z_i]^T$ 。

采用拉丁超立方抽样方法,从参数空间对每个参数抽取 $100$ 个初值。由于结构在外部激励作用之前处于静止状态,所以取初始位移和初始速度状态值为 $0$ 。以初始位移和初始速度状态值以及参数初值构成的总初始状态向量作为起始状态,进行状态向量的迭代计算。各参数采样范围为 $c_i \in [0,1]$ ,  $k_i \in [1,100]$ ,  $z_i \in [10,1000]$ 。

改进的自适应无迹卡尔曼滤波算法识别的一层状态向量,即位移、速度和各参数结果如图9~11所示。图12为识别的未知地面激励加速度时程 $\ddot{\mathbf{x}}_g(t)$ 和观测值对比。

从图11参数对比可知:对结构响应变化敏感度高的参数能够较快收敛于观测值,如识别的线性

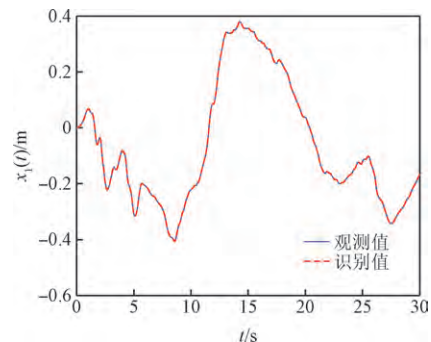


图9 Duffing-type 剪切梁结构第一层位移识别结果

Fig.9 Identified results for structural displacement of first floor of Duffing-type shear-beam building

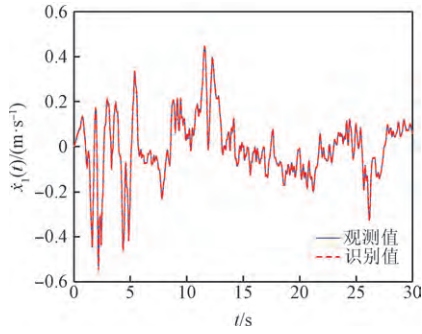


图 10 Duffing-type 剪切梁结构第一层速度识别结果  
Fig. 10 Identified results for structural velocity of first floor of Duffing-type shear-beam building

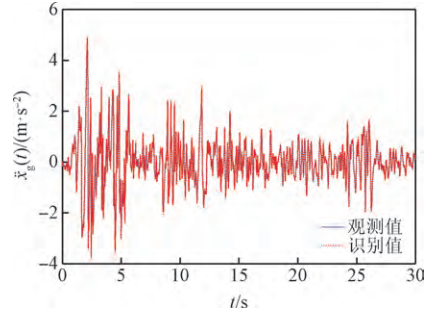


图 12 Duffing-type 剪切梁结构地面加速度识别值和观测值对比

Fig. 12 Comparison of exact and identified results for unknown external forces of Duffing-type shear-beam building

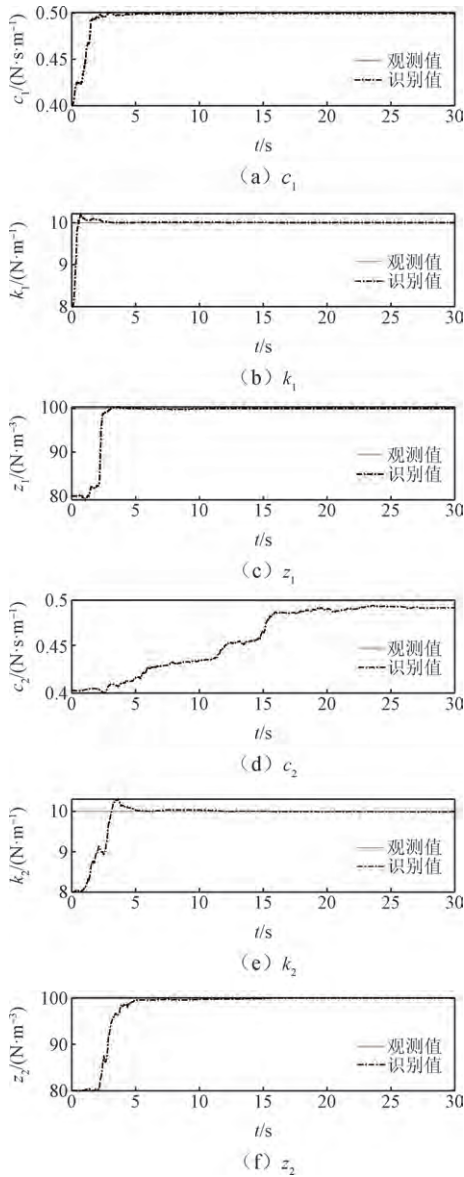


图 11 Duffing-type 剪切梁结构模型参数识别值和观测值对比  
Fig. 11 Comparison of exact and identified model parameters of Duffing-type shear-beam building

和非线性刚度参数  $k_i, z_i$ ; 敏感性低的参数缓慢收敛于观测值, 如阻尼参数, 并且误差较小。以上模拟分析结果表明, 改进自适应无迹卡尔曼滤波算法可以适用于 Duffing-type 非线性振动系统, 参数  $c_2$  的估计误差为 4.6%。除参数  $c_2$  外, 其他参数误差在 2% 以内。

### 3 试验验证

为验证由模型简化、测量噪音引起的误差条件下, 改进的自适应无迹卡尔曼滤波算法的有效性和鲁棒性, 对单自由度非线性能量阱进行振动台试验。

#### 3.1 试验概况

非线性能量阱是由一个安装在固定框架上的质量块 ( $m = 0.13 \text{ kg}$ ) 和两侧限制其侧向运动的刚性约束组成。非线性能量阱构造示意和尺寸如图 13 所示。由顶部质量块和钢梁组成的非线性能量阱, 是典型的非线性系统, 其运动受到两边刚体块约束。当质量块振动时, 能量阱非线性来源于梁与刚体曲面的接触反力<sup>[31]</sup>。非线性能量阱在外部激励下的动力平衡方程可表示为

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) + zx^3(t) = f(t) \quad (48)$$

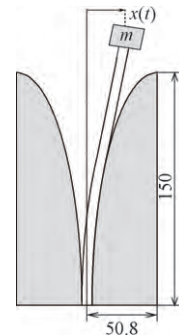


图 13 非线性能量阱构造示意和尺寸

Fig. 13 Schematic and dimensions of NES



试验中采用普渡大学智能基础设施实验室的振动台,将非线性能量阱安装在振动台台面上,如图 14 所示。振动台尺寸为 760 mm × 760 mm,最大有效载荷 2 000 kN,包含六自由度,每个自由度由内置 SC6000 PID 型控制器控制。由伺服液压振动台对非线性系统输入激励,振动台控制器中的内置函数发生器提供自定义激励信号。

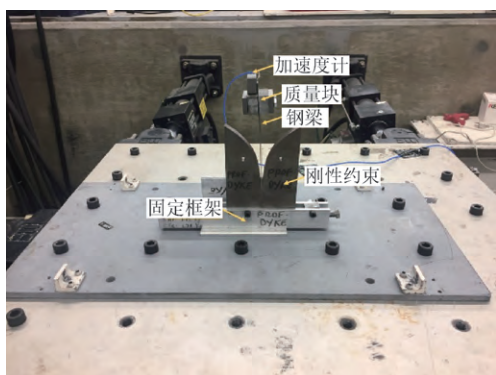


图 14 非线性能量阱试验装置

Fig. 14 Experimental setup of NES device

试验中在单一方向上输入激励,以避免系统的扭转效应。输入的激励为带宽有限的过滤白噪声信号 (BLWN),用以模拟真实地震动,参数取值见表 1。

表 1 输入激励的参数设置

Table 1 Parameters for base excitation

输入激励	$A/\text{mm}$	$F/\text{Hz}$	$T/\text{s}$
BLWN	6	12	60

注: $A$  为白噪声均方差; $F$  为频率; $T$  为激励信号的持时。

试验测量装置主要包括 2 个加速度传感器和 1 个激光位移传感器。加速度传感器分别位于非线性能量阱顶部质量块和振动台台面上,激光位移计用于测量振动台面的位移,即非线性能量阱基底位移。采样频率 4 096 Hz。

### 3.2 结果及其分析

将加速度传感器记录的非线性能量阱顶部质量的加速度作为试验观测值,采用改进的自适应无迹卡尔曼滤波算法识别参数和外部激励力,识别结果与观测值对比如图 15 和图 16 所示。

由于非线性系统计算模型对实际结构进行了简化,因此会产生一定误差。而实际试验及测量中,记录的观测值中会存在较大观测噪声<sup>[32]</sup>,也会产生误差。由图 15 可知,在存在上述两种实际误差的情况下,阻尼参数和非线性刚度参数缓慢的收敛于其对应的观测值。

由图 15、16 识别结果发现:在存在较大过程噪声和观测噪声的情况下,除阻尼参数在真值附近震荡

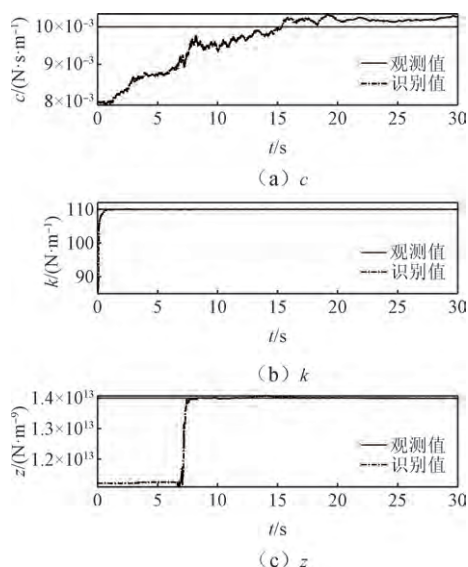


图 15 非线性能量阱结构参数识别值与观测值对比

Fig. 15 Comparison of exact and identified results for structural parameters of NES device

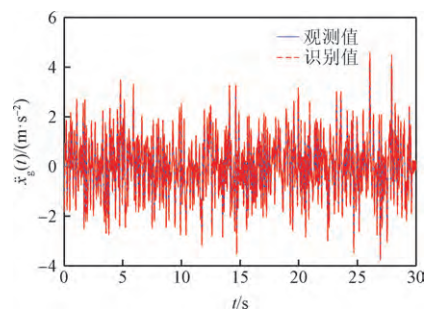


图 16 未知激励加速度识别值与观测值对比

Fig. 16 Comparison of exact and identified results for unknown external forces

外,各参数依然能够逐步收敛于其对应的观测值,且误差都在 5% 以内,这进一步证实了改进的自适应无迹卡尔曼滤波算法的有效性和鲁棒性。

## 4 结论

1) 改进自适应无迹卡尔曼滤波算法,可以在无外部激励力观测条件下,在线识别非线性系统参数和进行状态估计,并且测量噪声协方差矩阵可以有效自动更新时间更新。

2) 由于初始选取的过程噪声向量和观测噪声向量不恰当,导致识别参数时会出现不收敛,或者状态的协方差变小而导致参数和状态收敛于真实状态过缓,因而传统无迹卡尔曼滤波算法对初值的合理选取依赖度高。相较之下,自适应无迹卡尔曼滤波方法更稳定,且对初值的选取要求并不高。

3) 存在模型简化误差和观测噪声误差的情况下,阻尼参数和非线性刚度参数缓慢地收敛于真实值,刚度参数敏感指数高,能够稳定收敛于真实值。

#### 参 考 文 献

- [1] KALMAN R E. A new approach to linear filtering and prediction problems[J]. Journal of Basic Engineering, 1960, 82(1): 35-45.
- [2] BREWICK P T, JOHNSON E A, SATO E, et al. Constructing and evaluating generalized models for a base-isolated structure [J]. Structural Control and Health Monitoring, 2018, 25(11): e2243.
- [3] YANG J N, LIN S. Identification of parametric variations of structures based on least squares estimation and adaptive tracking technique [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2005, 131(3): 290-298.
- [4] LOH C, LIN C, HUANG C. Time domain identification of frames under earthquake loadings [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2000, 126(7): 693-703.
- [5] TAKEWAKI I, NAKAMURA M. Stiffness-damping simultaneous identification using limited earthquake records [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2000, 29(8): 1219-1238.
- [6] NOËL J P, KERSCHEN G. Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 83: 2-35.
- [7] KERSCHEN G, WORDEN K, VAKAKIS A F, et al. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20(3): 505-592.
- [8] SCHMIDT S F. Application of state-space methods to navigation problems[J]. Advances in Control Systems, 1966, 3: 293-340.
- [9] BELLANTONI J F, DODGE K W. A square root formulation of the Kalman-Schmidt filter. [J]. AIAA Journal, 1967, 5(7): 1309-1314.
- [10] JULIER S J. The scaled unscented transformation[C]// Proceedings of the 2002 American Control Conference. New York, USA: IEEE, 2002: 4555-4559.
- [11] JULIER S J, UHLMANN J K. New extension of the Kalman filter to nonlinear systems [C] // Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition VI. New York, USA: SPIE, 1997: 182-193.
- [12] JULIER S J, UHLMANN J K, Durrant-Whyte H F. A new approach for filtering nonlinear systems [C] // Proceedings of 1995 American Control Conference-ACC'95. New York, USA: IEEE, 1995: 1628-1632.
- [13] 张勇刚, 李宁, 奔粤阳. 最优状态估计: 卡尔曼,  $H_\infty$  及非线性滤波[M]. 北京: 国防工业出版社, 2013: 323-338. (ZHANG Yonggang, LI Ning, BEN Yueyang. Optimal state estimation: Kalman,  $H_\infty$  and nonlinear filtering [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2013: 323-338. (in Chinese))
- [14] HAUG A J. Bayesian estimation and tracking: a practical guide[M]. New Jersey: John Wiley & Sons, 2012: 128-139.
- [15] OLIVIER A, SMYTH A W. Particle filtering and marginalization for parameter identification in structural systems[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2017, 24(3): e1874.
- [16] CHATZI E N, SMYTH A W. Particle filter scheme with mutation for the estimation of time-invariant parameters in structural health monitoring applications [J]. Structural Control and Health Monitoring, 2013, 20(7): 1081-1095.
- [17] ANDRIEU C, DOUCET A, HOLENSTEIN R. Particle markov chain monte carlo methods[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 2010, 72(3): 269-342.
- [18] ASKARI M, LI J, SAMALI B. Bayesian updating and model class selection for hysteretic structural models using stochastic simulation[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2016, 16(6): 1550016.
- [19] SKOGLUND M A, GUSTAFSSON F, HENDEBY G. On iterative unscented kalman filter using optimization [C] // The 22th International Conference on Information Fusion (FUSION). New York, USA: IEEE, 2019: 1-8.
- [20] GHORBANI E, CHA Y. An iterated cubature unscented Kalman filter for large-DoF systems identification with noisy data[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 420: 21-34.
- [21] ERAZO K, NAGARAJAIAH S. Bayesian structural identification of a hysteretic negative stiffness earthquake protection system using unscented Kalman filtering[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2018, 25(9): e2203.
- [22] OLIVIER A, SMYTH A W. A marginalized unscented Kalman filter for efficient parameter estimation with applications to finite element models [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 339: 615-643.
- [23] CALABRESE A, STRANO S, TERZO M. Adaptive constrained unscented Kalman filtering for real-time nonlinear structural system identification[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2018, 25(2): e2084.
- [24] LEI Y, XIA D, ERAZO K, et al. A novel unscented Kalman filter for recursive state-input-system identification of nonlinear systems [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 127: 120-135.

(下转第 224 页)

- shaped columns [J]. *Journal of Building Structures*, 2019, 40(4):104-115. (in Chinese))
- [23] QIN Q H. *Advanced mechanics of piezoelectricity*[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013: 15-17.
- [24] ZHANG Q M, WANG H, CROSS L E. Piezoelectric tubes and tubular composites for actuator and sensor applications[J]. *Journal of Materials Science*, 1993, 28(14): 3962-3968.
- [25] 王矜奉, 苏文斌, 王春明, 等. 压电振动理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2011: 118-133. (WANG Jinfeng, SU Wenbin, WANG Chunming, et al. *Piezoelectric vibration theory and application* [M]. Beijing: Science Press, 2011: 118-133. (in Chinese))
- [26] 孙威. 利用压电陶瓷的智能混凝土结构健康监测技术[D]. 大连: 大连理工大学, 2009: 18-83. (SUN Wei. *Health monitoring technology for smart concrete structures using piezoelectric ceramic* [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2009: 18-83. (in Chinese))
- [27] GAO W, HUO L, LI H, et al. Smart concrete slabs with embedded tubular PZT transducers for damage detection[J]. *Smart Materials and Structures*, 2018, 27(2): 025002.
- 
- (上接第 191 页)
- [25] ERAZO K, NAGARAJIAH S. An offline approach for output-only Bayesian identification of stochastic nonlinear systems using unscented Kalman filtering[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 397: 222-240.
- [26] DING Y, LAW S S, WU B, et al. Average acceleration discrete algorithm for force identification in state space [J]. *Engineering Structures*, 2013, 56: 1880-1892.
- [27] WU M, SMYTH A W. Application of the unscented Kalman filter for real-time nonlinear structural system identification [J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2007, 14(7): 971-990.
- [28] WAN E A, VAN D M R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation[C] // *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*. New York, USA: IEEE, 2000: 153-158.
- [29] SÄRKKÄ S. *Bayesian filtering and smoothing* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2013: 165-171.
- [30] SHIELDS M D, ZHANG J. The generalization of Latin hypercube sampling [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2016, 148: 96-108.
- [31] SILVA C E, GIBERT J M, MAGHAREH A, et al. Dynamic study of a bounded cantilevered nonlinear spring for vibration reduction applications: a comparative study[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 101(2): 893-909.
- [32] 杨朋超, 薛松涛, 谢丽宇. 结构动力模型的改进直接修正方法及工程应用[J]. *建筑结构学报*, 2021, 42(3): 34-40. (YANG Pengchao, XUE Songtao, XIE Liyu. An improved direct method for dynamic model updating and its practical engineering applications[J]. *Journal of Building Structures*, 2021, 42(3): 34-40. (in Chinese))