

# 基于模态参与消减的直连拉索连接 惯容系统的简易算法

谢丽宇<sup>1</sup>, 班鑫磊<sup>2</sup>, 康建飞<sup>3</sup>, 薛松涛<sup>1,4</sup>

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 上海电力设计院有限公司, 上海 200025; 3. 日本东北大学 灾害科学国际研究所, 宫城 仙台 980-8572; 4. 日本东北工业大学 建筑系, 宫城 仙台 982-8577)

**摘要:** 高层建筑各层加速度响应峰值往往受到高阶模态的影响, 文中通过模态参与消减机制来探究高层结构的模态参与因子对结构振动响应的影响, 旨在消除高阶模态的影响, 为实现高层建筑结构层间位移和加速度的同步控制提供新的设计方案。首先, 基于地震输入减少特性, 总结了直连拉索连接惯容系统的控制特点; 然后, 推导了基于模态参与消减的直连拉索连接惯容系统解析设计公式, 从解析的层面揭示了惯容的表观质量与各阶模态参与因子的关系。基于该公式通过惯容表观质量的合理设定可以对模态参与因子进行调节, 为拉索连接惯容系统的简化参数设计提供依据; 最后, 文中提出了全模态参与消减的简易算法, 解决了全模态参与消减的惯容系统的实用化设计问题。

**关键词:** 模态参与消减; 惯容系统; 拉索连接; 被动控制技术

中图分类号: TU318<sup>+</sup>.1

文献标识码: A

## Study on a simple design method for direct connected cable inerter system based on modal participation cancellation

XIE Liyu<sup>1</sup>, BAN Xinlei<sup>2</sup>, KANG Jianfei<sup>3</sup>, XUE Songtao<sup>1,4</sup>

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Shanghai Electric Power Design Institute Co., LTD., Shanghai 200025, China; 3. International Research Institute of Disaster Science, Tohoku University, Sendai 980-8572, Japan; 4. Department of Architecture, Tohoku Institute of Technology, Sendai 982-8577, Japan)

**Abstract:** The peak acceleration response of each story of high-rise building is often affected by higher modes. In this paper, the influence of modal participation factor of high-rise structure on structural vibration response is explored based on modal participation cancellation, aiming to neutralize the influence of higher modes and provide a new design method for the synchronous control of peak displacement and acceleration response of high-rise buildings. Firstly, the control characteristics of the direct connected cable inerter system are summarized based on the input reduction characteristics. Then, the analytical design formula for the parameters of the inerter system is derived based on the modal participation cancellation, and the relationship between the apparent mass of inerter element and the modal participation factors of each order is revealed theoretically. The modal participation factors

收稿日期: 2022-06-28; 修订日期: 2022-07-14

基金项目: 政府间国际科技创新合作重点专项(2021YFE0112200); 上海市自然科学基金项目(20ZR1461800)

**Supported by:** Key Program of Intergovernmental International Scientific and Technological Innovation Cooperation (2021YFE0112200); Natural Science Foundation of Shanghai (20ZR1461800)

作者简介: 谢丽宇(1978-), 男, 副教授, 博士, 主要从事结构减隔震与结构健康监测研究. E-mail: liyuxie@tongji.edu.cn

通讯作者: 薛松涛(1963-), 男, 教授, 博士, 主要从事结构减隔震与结构健康监测研究. E-mail: xue@tongji.edu.cn

can be adjusted through the reasonable setting of the apparent mass of the inerter element, which provides the basis for the simplified design of the direct connected cable inerter system. Finally, this paper proposes a simple design method of full-mode participation cancellation, which solves the practical design problem of the direct connected cable inerter system.

**Key words:** modal participation cancellation; inerter system; cable-bracing; passive control technique

## 引言

建筑结构在地震等自然灾害作用下的不利振动会使结构性能退化显著,带来安全性和舒适性问题。因此,需要采取一定的工程措施,如在建筑结构中安装减振系统<sup>[1]</sup>,以尽快恢复震后建筑的使用功能,提升建筑结构的抗震防灾性能<sup>[2-3]</sup>。结构振动控制<sup>[3]</sup>是近40年来发展起来的一门新兴技术,它可以减小结构在地震、风等外部激励下的动力响应,显著提高土木工程结构抑制各类有害振动的能力,保障结构在地震和强风中的安全性及舒适度。惯容系统<sup>[4-6]</sup>是近年来众多学者开始探索的一种新型动力吸振技术。

惯容元件<sup>[4]</sup>是一种具有质量增效特性的两端点元件,出力与元件两端的相对加速度成正比,与传统的单节点质量元件的不同之处体现在:(1)惯容系数远大于自身的物理质量,可产生数千倍于实际物理质量的表观质量<sup>[5-8]</sup>,因此可以在几乎不增加结构实际质量的同时实现结构的振动控制;(2)惯容元件的两端点特性提高了其安装方式的灵活性<sup>[9]</sup>,使其不仅仅局限于如悬挂等单端点连接的方式,还可以采用与普通消能减振装置相同的层间安装方式<sup>[10]</sup>,这样一来,惯容元件就可以利用楼层间的加速度差进行减震;(3)惯容所增加的惯性质量并不会增加结构所受的地震作用,具有地震输入减少的特性<sup>[11]</sup>。

追溯到土木工程领域惯容装置的雏形是 Kawamata 等<sup>[12-14]</sup>开发的液体泵,利用流体在管道中的运动可以实现对液体质量惯性的封装。之后,学者们针对惯容这一双端质量元件,在不增加额外自由度的条件下,开展了惯容减震系统的研究<sup>[15-20]</sup>。Saito 等<sup>[21]</sup>分析了安装惯容控制元件的单自由度结构的动力响应,首次从降低结构激励幅值的角度分析了惯容控制元件的工作机制。Furuhashi 等<sup>[11,22-23]</sup>也得出了安装惯容控制元件可以有效控制结构响应的结论。Hessabi 等<sup>[24-25]</sup>通过采用齿轮惯容装置提高了薄弱层结构的抗震性能,增加了底层结构的抗侧承载力,降低了地震能量的输入。然而上述研究均未考虑支撑系统的改进,为此,文中结合拉索支撑的特性,从地震输入减少及模态参与消减两个角度分析直连拉索连接惯容系统的减震机理及其优势。

## 1 直连拉索连接惯容系统的减震机理

### 1.1 直连拉索连接惯容系统的组成

文中利用拉索支撑仅提供轴向约束的特点,简化连接节点的构造,避免多维地震作用下的应力集中问题,采用端部扭矩可以自平衡的惯容装置提出了直连拉索连接惯容系统,如图1所示。

### 1.2 地震输入减小特性

惯容作为具有两节点的质量元件,可以通过拉索支撑直接与结构相连接,从而调整结构的质量特性。直连拉索连接惯容系统是拉索连接惯容系统不使用调谐弹簧并忽略拉索柔度时的特殊形式,其基本构造如图1所示。拉索的倾斜角为 $\theta$ ,惯容的表观质量为 $m_d$ ,单自由度结构在地震激励下的运动方程可以表达为:

$$(m + m_d(\cos\theta)^2)\ddot{u}_s(t) + c\dot{u}_s(t) + ku_s(t) = -ma_g(t) \quad (1)$$

式中: $m, c, k$ 分别是结构的质量,阻尼和刚度; $\ddot{u}_s(t), \dot{u}_s(t), u_s(t)$ 分别是结构的加速度,速度及位移响应; $a_g(t)$ 是外部激励输入。定义等效惯质比 $\mu$ 为 $(m_d \cdot (\cos\theta)^2)/m$ ,式(1)可以等效换为:

$$m\ddot{u}_s(t) + \frac{c}{1+\mu}\dot{u}_s(t) + \frac{k}{1+\mu}u_s(t) = -\frac{m}{1+\mu}a_g(t) \quad (2)$$

对比式(1)和式(2)可知,通过直连拉索连接惯容系统调整单自由度结构的质量信息,我们可以获得等效的阻尼折减,刚度折减及地震输入减小。该特性是由惯容双端质量特性引起的,惯容显著的表现质量增

加了式(1)左半部分的质量信息的改变而相对较小的物理质量对右半部分的地震输入的影响几乎可以忽略。应当注意的是,此处定义的地震输入减小是指输入到主体结构的加速度减小,而非减少地震力本身。这是基于接地惯容的加速度补偿机制实现的,部分地震加速度通过惯容直接传递。广义而言,直连拉索连接惯容系统具备以下控制特点:

(1)通过等效折减结构刚度,将结构周期延长至原周期的 $\sqrt{1+\mu}$ 倍;

(2)通过等效折减结构阻尼,将结构的固有阻尼系数降低为原固有阻尼系数的 $1/\sqrt{1+\mu}$ ;

(3)安装直连拉索连接惯容系统的单自由度结构地震输入等效折减为了原结构的 $1/(1+\mu)$ ;

应当注意的是,此处定义的地震输入减小是指输入到主体结构的加速度减小,而非减少地震力本身。这是基于接地惯容的加速度补偿机制实现的,部分地震加速度通过惯容直接传递。

### 1.3 模态参与消减特性

模态参与消减特性,最初由 Furuhashi 等<sup>[11]</sup>针对直连惯容装置提出。当考虑如图 1 所示的多自由度结构体系时,通过适当调整直连拉索连接惯容系统在结构中的分布,可以有效的控制结构的模态特性。安装有直连拉索连接惯容系统的多自由度结构受地震激励的控制方程可以表达为:

$$(\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d)\ddot{\mathbf{X}}_s(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_s(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}_s(t) = -\mathbf{M}_0\mathbf{I}a_g(t) \tag{3}$$

式中: $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_d$ 质量矩阵和直连拉索惯容系统的惯容表观质量矩阵,表达式见式(4)和式(5),其中 $\beta_c$ 是拉索的传递系数,表达式见式(6)和式(7); $\mathbf{C}, \mathbf{K}$ 是结构的阻尼矩阵和刚度矩阵表达式见式(8)和式(9); $\ddot{\mathbf{X}}_s(t), \dot{\mathbf{X}}_s(t)$ 和 $\mathbf{X}_s(t)$ 代表结构的加速度、速度及位移的响应向量; $\mathbf{I}$ 为地震激励系数,指代地震输入对于多自由度各个楼层的一致激励。

$$\mathbf{M}_0 = \text{diag} \{ m_1, m_2, \dots, m_n \} \tag{4}$$

$$\mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} m_{d,1}\beta_{c,1} + m_{d,2}\beta_{c,2} & -m_{d,2}\beta_{c,2} & & & 0 \\ -m_{d,2}\beta_{c,2} & \ddots & & & \\ & \ddots & m_{d,n-1}\beta_{c,n-1} + m_{d,n}\beta_{c,n} & -m_{d,n}\beta_{c,n} & \\ 0 & & -m_{d,n}\beta_{c,n} & m_{d,n}\beta_{c,n} & \end{bmatrix} \tag{5}$$

当充分利用结构的宽度,并采用滑轮式拉索支撑时,拉索的传递效率可以依据式(6)进行计算:

$$\beta_{c,i} = \frac{B^2}{B^2 + h_i^2} \tag{6}$$

式中: $B$ 是结构的立面宽度; $h_i$ 是结构第*i*层的结构高度。当定义等效地震激励系数:

$$\beta = (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d)^{-1} \mathbf{M}_0 \mathbf{I} \tag{7}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & & & 0 \\ -c_2 & \ddots & & & \\ & \ddots & c_{n-1} + c_n & -c_n & \\ 0 & & -c_n & c_n & \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & 0 \\ -k_2 & \ddots & & & \\ & \ddots & k_{n-1} + k_n & -k_n & \\ 0 & & -k_n & k_n & \end{bmatrix} \tag{9}$$

方程(3)可以等效变形为:

$$(\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d)\ddot{\mathbf{X}}_s(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}_s(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}_s(t) = -(\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d)\beta a_g(t) \tag{10}$$

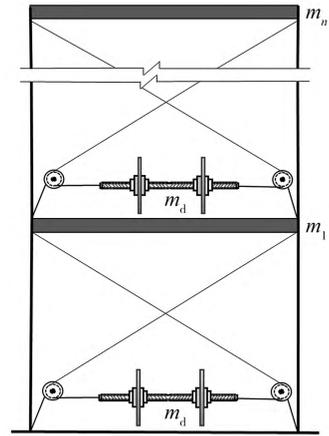


图1 安装直连拉索连接惯容系统的多自由度结构  
Fig. 1 Multi-degree-of-freedom structure equipped with direct connected cable inerter systems

假定受控结构的  $i$  阶模态向量为  ${}_i\phi$ , 则受控结构的  $i$  阶模态响应可以通过求解如下等效单自由度结构的运动方程获取:

$${}_i\phi^T (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d) {}_i\phi \ddot{u}(t) + {}_i\phi^T \mathbf{C} {}_i\phi \dot{u}(t) + {}_i\phi^T \mathbf{K} {}_i\phi u(t) = -{}_i\phi^T (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d) \beta a_g(t) \quad (11)$$

$$\ddot{u}(t) + 2 {}_i\omega_h \dot{u}(t) + {}_i\omega^2 u(t) = -\frac{{}_i\phi^T (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d) \beta}{{}_i\phi^T (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d) {}_i\phi} a_g(t) \quad (12)$$

式中:  ${}_i\omega$  和  ${}_i h$  分别为受控结构的  $i$  阶圆频率和阻尼比。  $i$  阶模态响应的参与因子  $\Gamma$  为:

$$\Gamma = \frac{{}_i\phi^T (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d) \beta}{{}_i\phi^T (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d) {}_i\phi} \quad (13)$$

与无控结构的模态参与因子不同的是, 式(13)中受控结构的模态参与因子可以通过惯容表观质量的合理设定, 来改变地震激励系数从而调整模态参与因子。最为极端的工况为, 地震激励系数与特定的模态向量关于质量矩阵  $(\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d)$  正交, 则此模态向量对应的模态响应在受控结构总体响应的贡献为 0。

从参数分析的层面, 以图 2 中 4 层结构为例, 结构的各层质量均为 1 000 t, 各个楼层的层间刚度均为  $8 \times 10^5$  kN/m, 在其底层接地安装一个直连拉索连接惯容系统, 以各层拉索的传递系数为 0.5 为例, 当直连拉索连接惯容系统的表观质量由 0 t 开始连续变化时, 依据模态参与因子的定义, 可以计算其相对应的各阶模态参与因子。惯容的表观质量与各阶模态参与因子平方值的关系如图 3 所示。由图 3 可知, 在所选取的惯容表观质量范围内, 结构的 1 阶模态参与因子随着表观质量的增加而减小。对于 2 阶、3 阶及 4 阶模态而言, 总是存在特定的表观质量使得相应的模态参与因子降为 0 值。

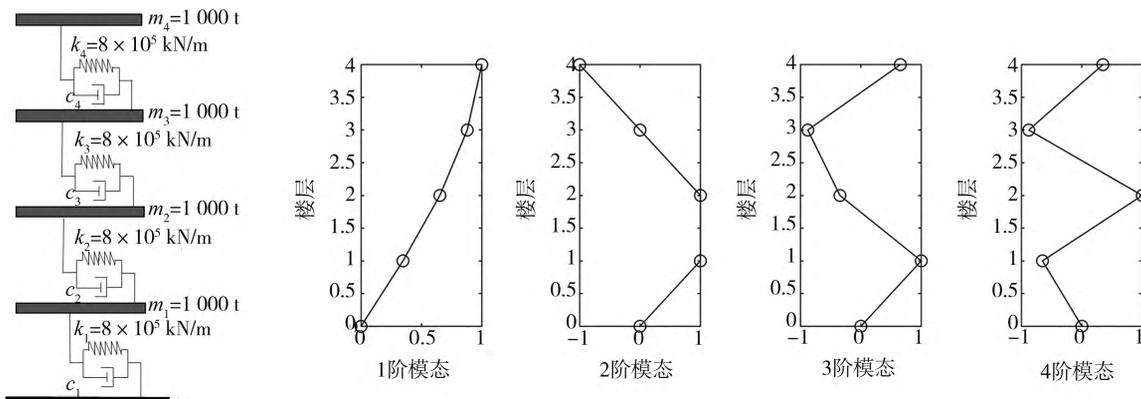


图 2 4层主体结构振型

Fig. 2 Mode shape of 4-story uncontrolled structure

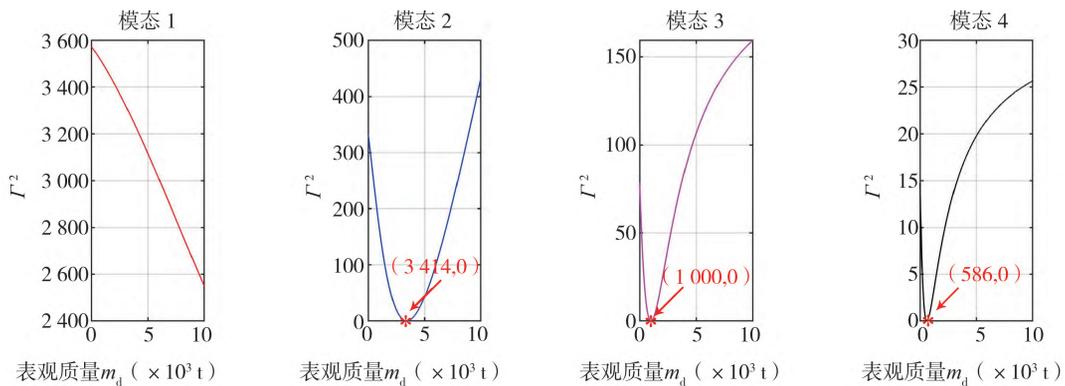


图 3  $m_d - \Gamma^2$  关系

Fig. 3 Relationship between  $m_d$  and  $\Gamma^2$

进一步, 当考虑同时消减多个模态时, 以直连拉索连接惯容系统分别安装于结构的底层及 2 层为例, 其表观质量的变化同样将引起结构各模态参与系数的改变。如图 4 所示, 至少存在一个表观质量的组合使得结构的 2 阶至 4 阶模态中的 2 个同时为零。

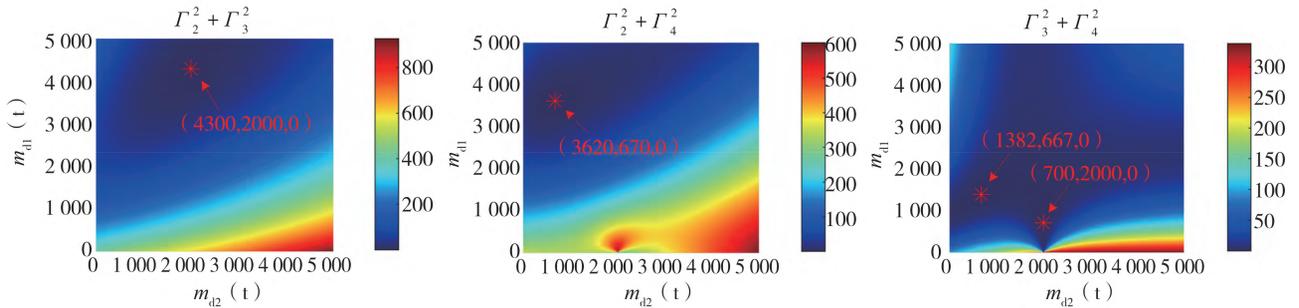


图4 表观质量 - 多个模态参与系数关系图

Fig. 4 Apparent mass-multimodal participation factors

## 2 直连拉索连接惯容系统的简易算法

从解析的层面,观察*i*阶模态响应参与因子的表达式可知,模态参与消减的本质为通过调整惯容表观质量改变受控结构的模态向量 $\phi$ 使得如下方程成立:

$$\phi^T (M_0 + M_d) \beta = \phi^T M_0 I = 0 \quad (14)$$

假定模态向量 $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}^T$ ,则方程(14)可以改写为:

$$\sum_{j=1}^n \phi_j \cdot m_i = 0 \quad (15)$$

又因为 $\phi$ 是模态向量,需要满足特征值方程:

$$i\omega^2 M_i \phi = K_i \phi \quad (16)$$

利用直连拉索连接惯容系统进行模态参与消减设计的本质为求解由式(15)和式(16)组成的关于变量 $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}^T$ 、 $i\omega$ 及惯容表观质量 $m_{d,1}, \dots, m_{d,n}$ 的联立方程。

同样以图2中的4层结构为例,用于消减特定模态 $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}^T$ 的直连拉索惯容系统安装于底层,则控制方程见式(17)和式(18):

$$i\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 + m_{d,1}\beta_{c,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[m_1, m_2, m_3, m_4] \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}^T = 0 \quad (18)$$

将式(17)中的各行相加并减去式(18)可得:

$$i\omega^2 [m_{d,1}\beta_{c,1} \ 0 \ 0 \ 0] \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}^T = [k_1 \ 0 \ 0 \ 0] \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}^T \Rightarrow m_{d,1} = \frac{k_1}{\beta_{c,1} i\omega^2} \quad (19)$$

将式(19)代入式(17)并整理可得到:

$$i\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

上式是一个常规的特征值问题,因此可以采用MATLAB中的“eig( )”函数直接求解。将求解所得到的特征值代入式(19)即可求得对应的惯容表观质量。值得注意的是,由于方程(20)右侧的刚度矩阵非满秩,存在一个数值为0的1阶特征值。因此,当系统尝试控制1阶模态时,则所需的惯容表观质量由式(19)计算为无穷。这与图3中的参数分析结果一致。依据图2中4层结构的参数,可以计算得出用于控制2阶、3阶及4阶的惯容表观质量分别为:3 414.21、1 000.00、585.79 t,这与图4中的参数分析的结果一致。

当考虑多个模态参与消减时,为了简化惯容参数的计算流程,防止控制效果的耦合导致设计困难,在此,指定安装位置较高的直连拉索连接惯容系统用于消减较高阶模态,并尽可能的将直连拉索连接惯容系统安装

于结构下部。同样以在底层和第2层安装直连拉索连接惯容系统的4层结构为例,其控制方程可以写为:

$${}_k\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 + m_{d,1}\beta_{c,1} + m_{d,2}\beta_{c,2} & -m_{d,2}\beta_{c,2} & 0 & 0 \\ -m_{d,2}\beta_{c,2} & m_2 + m_{d,2}\beta_{c,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_k\phi_1 \\ {}_k\phi_2 \\ {}_k\phi_3 \\ {}_k\phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_k\phi_1 \\ {}_k\phi_2 \\ {}_k\phi_3 \\ {}_k\phi_4 \end{Bmatrix} \quad k = i, j \quad (21)$$

$$[m_1, m_2, m_3, m_4] \{ {}_k\phi_1 \quad {}_k\phi_2 \quad {}_k\phi_3 \quad {}_k\phi_4 \}^T = 0 \quad k = i, j \quad (22)$$

式中: $i, j$ 为目标控制模态。

由上述单一模态参与消减的计算流程可知,安装于上层的直连拉索连接惯容系统的控制效果不受下层系统影响。因此,从较高层的直连拉索连接惯容系统的表现质量开始计算。假定,第2层直连拉索连接惯容系统所控制的模态向量为: ${}_j\phi_2 = \{0 \quad {}_j\phi_2 \quad {}_j\phi_3 \quad {}_j\phi_4\}^T$ ,则将方程(21)的第2行至第4行相加并减去方程(22)可得:

$$\begin{aligned} & {}_j\omega^2 [-m_{d,2}\beta_{c,2} \quad m_{d,2}\beta_{c,2} \quad 0 \quad 0] \{0 \quad {}_j\phi_2 \quad {}_j\phi_3 \quad {}_j\phi_4\}^T = \\ & [-k_2 \quad k_2 \quad 0 \quad 0] \{0 \quad {}_j\phi_2 \quad {}_j\phi_3 \quad {}_j\phi_4\}^T \Rightarrow m_{d,2} = \frac{k_2}{\beta_{c,2}{}_j\omega^2} \end{aligned} \quad (23)$$

将式(23)带入式(22)并整理可得:

$${}_j\omega^2 \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_j\phi_2 \\ {}_j\phi_3 \\ {}_j\phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 & 0 \\ -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_j\phi_2 \\ {}_j\phi_3 \\ {}_j\phi_4 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

方程(24)是一个传统的特征值问题。考虑到方程(24)右侧的刚度矩阵为秩为2的矩阵,因此在此假定下,安装于结构2层的直连拉索惯容系统仅能消减第3或第4阶模态。将求解所得的特征值带入式(23)即可求得对应的惯容表现质量。进一步的,获取安装于2层的直连拉索连接惯容系统的相关参数后,则安装于底层的直连拉索连接惯容系统的参数求解与消减单一模态的流程完全一致。依据图2中的4层结构的参数,可以计算得出用于同时控制2阶和3阶,2阶和4阶及3阶和4阶的惯容表现质量的组合分别为:(4 303, 2 000), (3 618, 667)和(1 382, 667),这与图4中的参数分析结果一致。同理,依据上述流程设计的用于消减结构2阶至4阶模态的直连拉索连接惯容系统应安装于结构的底层,2层及3层,相应的惯容表现质量应选取为:5 000, 2 666.67, 1 000。

如果将结构除了1阶模态以外的高阶模态的参与系数通过逐层安装惯容装置消减为0时,此控制方法一般称为全模态控制,由式(13)可知, $i$ 阶模态响应的参与因子消减为0的条件可以描述为结构的第 $i$ 阶模态向量 $\phi$ 与等效地震激励系数关于结构质量矩阵正交。依据结构各阶模态关于其质量矩阵正交可知,令等效地震激励系数与受控结构的一阶模态相同时,对1阶以外的模态而言,其参与因子恒为0。

若结构的1阶模态向量与等效地震激励系数相等,则下式成立:

$${}_1\omega^2 (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d)\beta = \mathbf{K}\beta \quad (25)$$

将等效地震激励系数代入式(25)可得:

$$\begin{cases} {}_1\omega^2 m_1 = -k_2(\beta_2 - \beta_1) + k_1\beta_1 \\ {}_1\omega^2 m_2 = -k_3(\beta_3 - \beta_2) + k_2(\beta_2 - \beta_1) \\ \vdots \\ {}_1\omega^2 m_{n-1} = -k_n(\beta_n - \beta_{n-1}) + k_{n-1}(\beta_{n-1} - \beta_{n-2}) \\ {}_1\omega^2 m_n = k_n(\beta_n - \beta_{n-1}) \end{cases} \quad (26)$$

对式(26)由下至上逐项累加可得:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{{}_1\omega^2 \left( \sum_{i=1}^n m_i \right)}{k_1} \\ \beta_i &= \beta_{i-1} + \frac{{}_1\omega^2 \left( \sum_{j=i}^n m_j \right)}{k_i} \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (27)$$

考虑到控制  $n-1$  阶模态仅需  $n-1$  个直连拉索连接惯容系统,且尽可能将直连拉索惯容系统安装于下部,顶层未安装惯容系统。由此可知  $m_{d,n} = 0$ 。根据等效地震激励系数的定义可知:

$$(\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_d) \{\beta_1 \ \cdots \ \beta_{n-1} \ \beta_n\}^T = \mathbf{M}_0 \mathbf{I} \Rightarrow \beta_n = 1 \quad (28)$$

将  $\beta_n = 1$  代入式(27)可以得到全模态控制的受控结构的1阶圆频率:

$${}_1\omega^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \left( \sum_{j=i}^n m_j \right)} \quad (29)$$

因此,将式(29)代入式(27)可以得到等效地震激励系数。将等效地震激励系数代入式(28)可以求解出各层直连拉索连接惯容系统的惯容表观质量:

$$m_{d,1} = \frac{(1 - \beta_1)m_1 + \beta_{c,2} \cdot m_{d,2}(\beta_2 - \beta_1)}{\beta_1 \beta_{c,1}}$$

$$m_{d,i} = \frac{m_i + \beta_{c,i+1} \cdot m_{d,i+1} \left( 1 - \frac{1 - \beta_{i+1}}{1 - \beta_i} \right)}{\left( \frac{1 - \beta_{i-1}}{1 - \beta_i} - 1 \right) \beta_{c,i}} \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad (30)$$

$$m_{d,n} = 0$$

以图2中的4层结构为例,依据上述流程设计的全模态消减模态的直连拉索连接惯容系统应安装于结构的底层,2层及3层,相应的惯容表观质量应选取为:5 000,2 666.67,1 000 t,得到的惯容减震结构的参与模态向量如图5所示,依据文中所提的简易算法设计的直连拉索连接惯容系统有效地消减了结构的2~3阶模态。

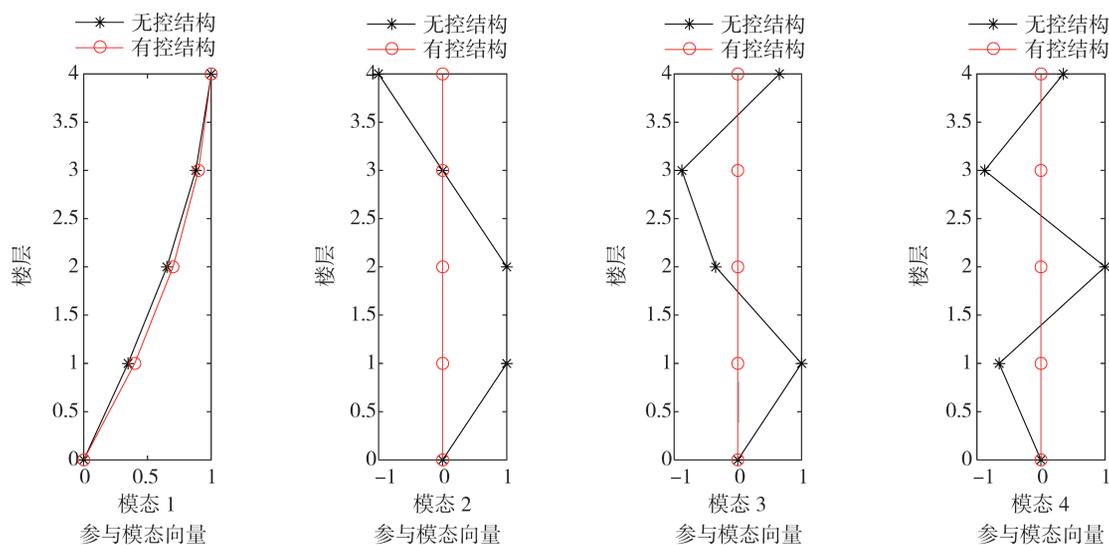


图5 4层结构的参与模态向量

Fig. 5 Participation mode vectors of the 4-story structure

### 3 算例分析及减震性能验证

为了验证基于全模态参与消减设计的直连拉索连接惯容系统的减震性能,采用日本隔震结构协会提出的2个基准结构作为算例,设计对应的直连拉索连接惯容系统并验证其减震性能。2个基准结构的立面图如图6所示,底层层高均为6 m,标准层层高为4 m。基准结构的等效剪切模型的各层弹性刚度及楼层质量以及基于文中所提全模态参与消减简易算法设计的直连拉索连接惯容系统的表观质量汇总于表1和表2中。

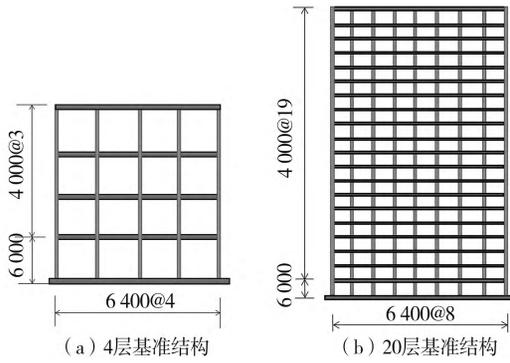


图 6 基准结构立面图(单位:m)

Fig. 6 Elevations of the reference structures(Unit:m)

表 1 4层基准结构的参数及惯容系统的设计参数

Table 1 Basic parameters of the reference 4 – story structure and the design parameters of the inerter systems

楼层	质量(t)	刚度(kN/m)	惯容表观质量(t)
4	489.4	62 950	0.00
3	366.8	73 360	399.75
2	369.2	91 910	992.50
1	376.2	56 460	1 346.48

表 2 20层基准结构的参数及惯容系统的设计参数

Table 2 Basic parameters of the reference 20-story structure and the design parameters of the inerter systems

楼层	质量(ton)	刚度(kN/m)	惯容表观质量(t)	楼层	质量(t)	刚度(kN/m)	惯容表观质量(t)
20	1 830.3	278 890	0.00	10	1 417.9	630 600	53 551.41
19	1 363.6	292 940	825.80	9	1 417.9	638 150	65 949.58
18	1 368.4	312 500	2 263.77	8	1 421.3	694 730	77 521.74
17	1 368.4	342 860	4 462.74	7	1 426.0	729 130	86 956.18
16	1 384.2	444 000	8 858.29	6	1 426.0	736 710	111 273.17
15	1 384.2	452 990	12 374.12	5	1 430.6	854 990	124 792.12
14	1 389.1	473 310	16 725.11	4	1 438.0	875 890	144 310.43
13	1 401.9	491 330	21 658.17	3	1 443.6	930 850	163 452.51
12	1 407.2	599 170	32 063.61	2	1 449.3	974 220	153 746.36
11	1 412.4	613 920	38 832.26	1	1 495.2	842 840	53 551.41

图 7 和图 8 显示了无控结构及有控结构的底层、顶层和中间层的位移传递函数和在 El Centro 地震波作用下结构各层的响应。以 4 层基准结构的频响函数为例,无控结构在 1 阶、2 阶、3 阶以及 4 阶模态对应的频率处存在局部峰值,通过全模态参与消减简易算法进行设计的有控结构针对位移频响函数在高阶模态的峰值均有较好的消除作用。这与全模态参与消减算法的目标是一致的,即消除高阶模态的参与,使结构以 1 阶模态为主。通过位移传递函数的对比,可以验证基于全模态参与消减机理设计的直连拉索连接惯容系统可以有效去除高阶模态的影响。通过逐层安装直连拉索连接惯容系统,可以实现惯容减振结构的模态参与消减,在频域范围内验证了文中提出的全模态参与消减简易算法的有效性以及该方法所推导的惯容系统表观质量解析公式的便捷性。

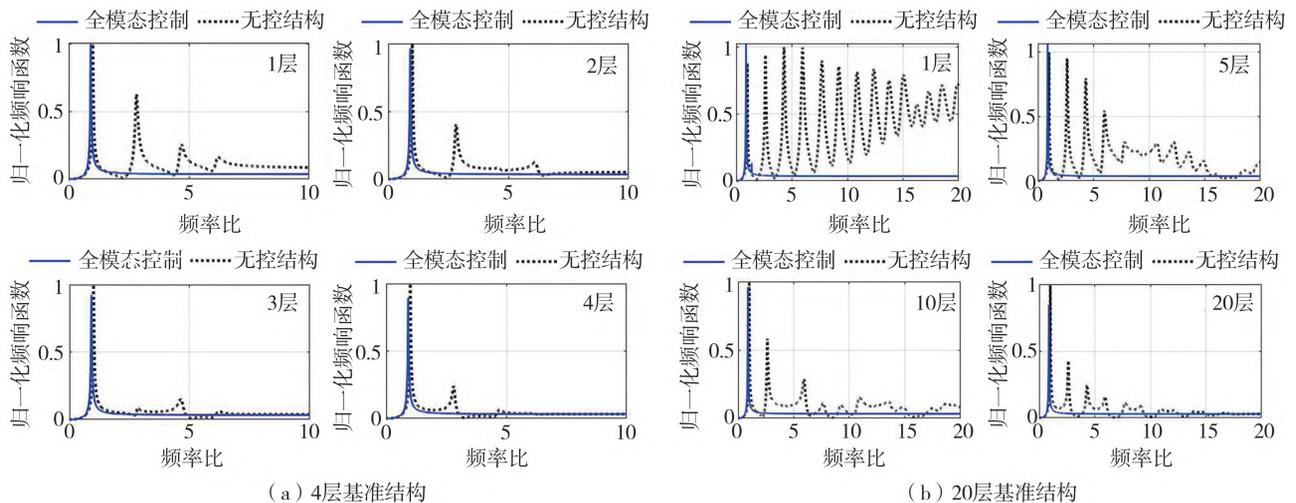


图 7 2个基准结构的频响函数

Fig. 7 Frequency response functions of two reference structures

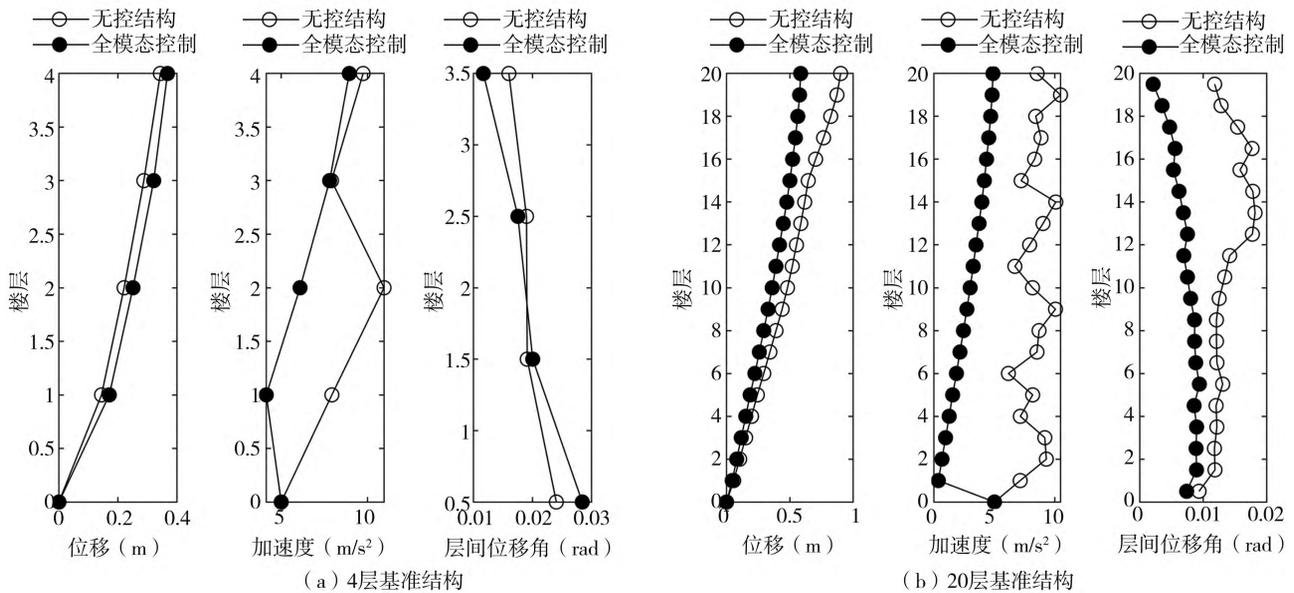


图8 2个基准结构的控制效果

Fig. 8 Control effect of two reference structures

在时域分析的角度,对于2个4层和20层的结构而言,在地震激励作用下,20层结构的位移和加速度的控制效果优于4层结构的位移和加速度的控制效果。尤其对于加速度的控制效果,越是高层结构,加速度的控制效果越显著,这正是因为,高层或超高层建筑的楼面加速度响应往往同时受到多阶模态的控制,高阶模态的参与因子较大。通过使用全模态参与消减简易算法设计的直连拉索连接惯容系统对于高层结构的位移、加速度和层间位移角的控制效果是显著的。

## 4 结论

文中从惯容元件入手,通过模态参与消减机制来探究高层结构的模态参与因子对结构振动响应的影响,探究基于模态参与消减机制的拉索连接惯容系统的减震机理及其控制优势。主要结论如下:

(1)介绍了直连拉索连接惯容系统的地震输入减小性能及模态参与消减特性,给出了直连拉索连接惯容系统的控制特点。

(2)推导了基于模态参与消减机制的直连拉索连接惯容系统的解析解,并和参数分析结果相吻合,从解析的层面揭示了惯容的表观质量与各阶模态参与因子的关系。通过惯容表观质量的合理设定进行模态参与因子的调节,为惯容系统的参数设计提供了理论依据。

(3)结合结构各阶模态关于其质量矩阵正交给出了全模态参与消减的简易算法。该算法不存在求解耦合方程和指定的模态特征值,在数值稳定及工程应用方面具有一定的价值。

(4)通过位移传递函数的对比,可以验证基于全模态参与消减机理设计的直连拉索连接惯容系统可以有效去除高阶模态的影响。因此,通过使用全模态参与消减简易算法设计的直连拉索连接惯容系统可以实现对高层结构的位移、加速度和层间位移角的有效控制。

## 参考文献:

- [1] 周福霖. 工程结构减震控制[M]. 北京: 地震出版社, 1997: 14 - 25.  
ZHOU Fulin. Seismic Mitigation and Control of Engineering Structures[M]. Beijing: Seismological Press, 1997: 14 - 15. (in Chinese)
- [2] SOONG T T, SPENCER B F. Active, semi-active and hybrid control of structures[J]. Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering, 2000, 33(3): 387 - 402.
- [3] YAO J T P. Concept of structural control[J]. Journal of the Structural Division, 1972, 98(7): 1567 - 1574.
- [4] 张瑞甫, 曹嫣如, 潘超. 惯容减震(振)系统及其研究进展[J]. 工程力学, 2019, 36(10): 8 - 27.  
ZHANG Rui fu, CAO Yan ru, PAN Chao. Inerter system and its research progresses[J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(10): 8 - 27. (in Chinese)

- [5] IKAGO K, SAITO K, INOUE N. Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper[J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2012, 41(3): 453 – 474.
- [6] SMITH M C. Synthesis of mechanical networks: the inerter[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(10): 1648 – 1662.
- [7] MAKRIS N, KAMPAS G. Seismic protection of structures with supplemental rotational inertia[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2016, 142(11): 4016089.
- [8] HATANAKA T, XUE S T, FUNAKI N. Dynamic behavior of single story frame passively controlled by liquid damper with inertia mass effect [C]// *Proceedings of the 15th Japan Earthquake Engineering Symposium*, Sendai, Japan: [s.n.], 2018: PS2-02-39.
- [9] XUE S T, KANG J F, XIE L Y, et al. Cross-layer installed cable-bracing inerter system for MDOF structure seismic response control[J]. *Applied Sciences*, 2020, 10(17): 5914.
- [10] 康建飞, 薛松涛, 谢丽宇. 双向地震作用下拉索支撑惯容系统及其在钢结构中的应用[J/OL]. *建筑结构学报*, 2022, 1 – 10[2022-06-28]. <https://doi.org/10.14006/j.jzjgxb.2021.0718>  
KANG Jianfei, XUE Songtao, XIE Liyu. Cable – bracing inerter system and its application in steel structure subjected to bi-directional ground motions[J/OL]. *Journal of Building Structures*, 2022, 1 – 10[2022-06-28]. <https://doi.org/10.14006/j.jzjgxb.2021.0718> (in Chinese)
- [11] FURUHASHI T, ISHIMARU S. Mode control seismic design with dynamic mass [C]// *Proceedings of the 14th World Conference on Earthquake Engineering*. Beijing, China: [s.n.], 2008: 14\_11-0028.
- [12] KAWAMATA S. Liquid type mass damper with elongated discharge tube: US4872649[P]. 1989 – 10 – 10.
- [13] KAWAMATA S. Development of a Vibration Control System of Structures by Means of Mass Pumps[R]. Tokyo, Japan: Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 1973.
- [14] KAWAMATA S, FUNAKI N, ITOH Y. Passive control of building frames by means of liquid dampers sealed by viscoelastic materia [C]// *Proceedings of the 12th World Conference on Earthquake Engineering*. Auckland, Newland: New Zealand Society for Earthquake Engineering Upper Hutt, N.Z.2000, 2000: 12\_0981.
- [15] PAPAGEORGIU C, HOUGHTON N E, SMITH M C. Experimental testing and analysis of inerter devices[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2009, 131(1): 1 – 11.
- [16] SMITH M C, WANG F C. Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2004, 42(4): 235 – 257.
- [17] WANG F C, HONG M F, LIN T C. Designing and testing a hydraulic inerter[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2010, 225(1): 66 – 72.
- [18] MA R S, BI K M, HAO H. A novel rotational inertia damper for amplifying fluid resistance: experiment and mechanical model[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 149: 107313.
- [19] SHEN Y J, CHEN L, LIU Y L, et al. Optimized modeling and experiment test of a fluid inerter[J]. *Journal of Vibroengineering*, 2016, 18(5): 2789 – 2800.
- [20] DOMENICO D D, RICCIARDI G, ZHANG R F. Optimal design and seismic performance of tuned fluid inerter applied to structures with friction pendulum isolators[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2020, 132: 106099.
- [21] SAITO K, YOGO K, SUGIMURA Y, et al. Application of rotary inertia to displacement reduction for vibration control system[C]// *Proceedings of the 13th World Conference on Earthquake Engineering*. Vancouver, Canada: [s.n.], 2004: 13\_1764.
- [22] FURUHASHI T, ISHIMARU S. Mode isolation by inertia mass: study on response control by inertial mass No. 1[J]. *Journal of Structural and Construction Engineering*, 2004, 69(576): 55 – 62.
- [23] FURUHASHI T, ISHIMARU S. Response control of multi-degree system by inertial mass: study on response control by inertial mass No. 2[J]. *Journal of Structural and Construction Engineering*, 2006, 71(601): 83 – 90.
- [24] HESSABI R M, MERCAN O. Investigations of the application of gyro-mass dampers with various types of supplemental dampers for vibration control of building structures[J]. *Engineering Structures*, 2016, 126: 174 – 186.
- [25] HESSABI R M, MERCAN O. Application of gyro-mass dampers to mitigate the seismic failure in soft first story buildings [C]// *Structures Congress 2015*. Portland, Oregon. Reston, VA, USA: American Society of Civil Engineers, 2015: 2032 – 2043.