



同濟大學

TONGJI UNIVERSITY

硕士学位论文

(专业学位)

基于向量自回归模型的新型快速系统识别方法研究

姓名：刘雯月

学号：1932520

学院：土木工程学院

专业学位类别：工程

专业领域：建筑与土木工程

指导教师：谢丽宇 副教授

二〇二二年六月



同濟大學  
TONGJI UNIVERSITY

A dissertation submitted to

Tongji University in conformity with the requirements for  
the degree of Master of Engineering

**A Novel System Identification Method Based  
on Vector Autoregressive Moving Average  
Models**

Candidate: Wenyue Liu

Student Number: 1932520

School/Department: College of Civil Engineering

Discipline: Master of Engineering

Major: Architecture and Civil Engineering

Supervisor: Associate Professor Liyu Xie

June 2022

基于向量回归模型的新型快速系统识别方法研究

刘雯月

同济大学

## 摘要

在无法测量随机环境激励的情况下,识别实际复杂工程结构的动力系统和模态参数往往具有挑战性,对此问题还缺乏高效方法。本文基于向量自回归模型提出了一种新型快速系统识别方法。

首先将系统的运动方程写成状态空间模型的形式,建立状态转换方程,推导连续时间下结构的响应。考虑到实际情况中测量得到的是离散时间的响应数据,进一步将连续时间响应进行离散化,推导得出结构动力响应的递推表达式。

其次,基于用状态空间表示的动力系统,推导向量自回归模型与结构运动方程的等价性。首先考虑结构不受外力,仅在初始条件下的自由衰减振动,证明了可以用向量自回归模型描述自由振动的结构系统。在此基础上考虑受迫振动的情况,推导结果表明,受稳态随机激励的结构系统也可以表示为向量自回归模型的形式。

然后本文建立 VAR 模型的特征值问题与结构模态参数的关系,从 VAR 模型的参数矩阵中提取结构的模态参数。以模态参数作为未知量,以最小化模型预测响应及测量响应的差值为目标构造优化问题,通过优化得到结构模态参数的优化值。

将提出的方法应用于识别环境荷载激励下的四层剪力结构动力系统。基于测量的结构加速度响应,该方法能快速解决优化问题得到优化的模态参数及结构动力系统。利用优化的结构动力系统在未知激励的情况下预测结构的响应,预测响应和测量响应拟合良好,表明本文方法的可靠性。

为验证本文提出的算法在实际工程中的应用,对某足尺桥梁进行分析,快速识别得到桥梁的模态参数,利用优化后的模态参数预测其响应并和测量响应进行对比,结果表明对于足尺结构,该方法依旧适用并拥有良好的精度。

**关键词:** 动力系统识别, 运行模态分析, 向量自回归模型, 优化

## ABSTRACT

Without the information of stochastic excitation, it is challenging to identify the dynamic systems and modal parameters of complex engineering structures in practice. Efficient methods are needed for this problem. A new efficient system identification method based on vector autoregressive model (VAR) is developed in this thesis.

It is first shown that the equation of motion of a structural dynamic system can be written in the form of a state space model to establish the state transition equations and structural responses in continuous time. Considering that the measured responses are obtained in discrete time, the continuous time response is discretized and a recursive expression for the dynamic response of the structure is derived.

With the dynamic system represented in state space, the equivalence between the equation of motion of a structural dynamic system and a VAR model is derived. It is first shown that a free-vibration structure can be represented by a VAR model. Based on this conclusion, it is further shown that a structure under stationary stochastic excitations is equivalent to a VAR model.

The relationship between the eigenvalue problem of a VAR model and structural modal parameters is then established. Modal parameters can thus be extracted from the VAR parameter matrices. Given measured data, modal parameters are obtained by solving an optimization problem, where the modal parameters are treated as the unknown parameters and the difference of the model-predicted and measured responses is minimized.

The proposed method was applied for modal analysis of a four-story shear building under ambient excitation. By using the measured acceleration responses, optimization was done within several minutes to obtain the optimal modal parameters. The optimal dynamic system can well predict the structural responses without the information of excitation, indicating the good performance of the proposed method.

Furthermore, in order to verify the proposed method in practical applications, system identification of a full-scale footbridge was conducted, and the modal parameters of the bridge were quickly identified. The model-predicted responses were calculated using the identified modal parameters without the information of the excitation. The model-predicted responses can well fit the measured responses.

**Key Words:** dynamic system identification, operational modal analysis, vector autoregressive model, optimization

同济大学

## 目录

第 1 章 引言	1
1.1 研究背景	1
1.2 模态识别的频域方法	2
1.2.1 峰值拾取法	2
1.2.2 频域分解法	3
1.3 模态识别的时域方法	4
1.3.1 随机减量法	4
1.3.2 随机子空间法	5
1.3.3 时间序列法	5
1.4 本文研究内容	6
第 2 章 基于向量自回归模型的结构动力系统	8
2.1 结构动力系统的状态空间模型	8
2.2 自由振动结构系统与向量自回归模型的等价性	12
2.3 受迫振动结构系统与向量自回归模型的等价性	15
2.4 本章小结	21
第 3 章 基于向量自回归模型的新型快速模态分析方法	22
3.1 结构动力系统与向量自回归动力系统的特征值问题	22
3.2 求解最优模态参数的新型迭代算法	28
3.3 本章小结	35
第 4 章 缩比剪力结构模态和动力响应分析	36
4.1 结构概况及动力测试	36
4.2 系统识别及模态分析	38
4.3 所提方法的优越性分析	43
4.4 本章小结	48
第 5 章 足尺人行桥动力特性和动力响应分析	49
5.1 工程背景及环境振动测试	49
5.2 桥梁动力系统识别及模态分析	51
5.3 本章小结	67
第 6 章 结论与展望	69
6.1 结论	69
6.2 进一步工作的方向	69
参考文献	71
致谢	75
个人简历、在读期间发表的学术成果	76

# 第 1 章 引言

## 1.1 研究背景

系统识别是利用测量数据识别动力系统的数学模型,拟合模型的预测响应和实测响应。系统的概念很宽泛,例如太阳能暖房,船舶操舵,人的发声都属于动力系统<sup>[1]</sup>。在土木工程领域,系统识别用来识别结构的特性,如结构的刚度、质量和阻尼等。系统识别可以由结构的响应直接识别得到,也可以先进行模态识别,再由结构的模态参数得到结构的参数<sup>[2]</sup>。

模态分析是系统识别的一个分支,通常是利用测量的响应识别结构的模态参数,即自振频率、阻尼比和振型。模态参数控制结构的动态响应,可用于模型更新<sup>[3][4]</sup>,验证预测模型,进行结构健康监测和损伤检测<sup>[5]~[11]</sup>。

模态分析主要有运行模态分析和试验模态分析<sup>[12]</sup>。研究系统在环境振动或正常工作条件下的模态特性的工程领域称为运行模态分析<sup>[13]</sup>。传统的试验模态分析中,为了测量频率响应函数或脉冲响应函数,通常需要进行人工激励。但这在现场测试或大型结构中是非常困难的,甚至不可能被测量,例如,交通荷载下的桥梁,海水波浪冲击的轮船,风荷载激励的高层建筑,这些激励都不能被量化<sup>[14]</sup>。通常在实验室环境中,测试的只是结构的一部分或按一定比例缩小的模型,并且需要合理的假设来模拟边界条件,例如需要模拟。在实验室环境中进行的分析会和实际的情况会有很大不同。对已经建成的结构进行有限元的模拟时,使用的数据来源于结构设计阶段的图纸,这些数据不能反映结构的实际运行状态情况下的动力特性。和试验模态分析相比,运行模态分析的实施成本低,速度快,不需要复杂的激励设备和边界条件<sup>[16]</sup>,因此近些年环境振动试验广泛用于获得结构的动力特性。

在土木工程中,有限元模型为预测结构的动态特性提供了系统、有效的方法。但由于缺少一些必要的条件,在设计阶段建立的有限元模型的模态特性可能和实际建造的结构模态特性。因此为了使有限元模型的预测更为准确,根据现场测量的模态参数进行模态更新。

Brownjohn 等人对亨伯河大桥进行了环境振动调查<sup>[17]</sup>。评估仪表和系统识别的现有技术,并生成一个实验性的模态属性数据集,用于验证和更新情景模拟和结构健康监测的有限元模型。Liu 等人<sup>[18]</sup>提出了一种利用给定环境振动数据的子集模拟优化的贝叶斯模型更新方法,通过一个四层框架结构的数值应用验证了所提方法的有效性,最后将所提方法用于一个具有重要保护意义的现代文物建



筑，一个大型双塔砖石结构的研究。利用所提方法更新了选定的子结构的弹性模量，模型预测的模态参数与更新后的振动试验所确定的模态参数之间存在良好的一致性，更新后的有限元模型为该结构的长期结构健康监测提供基础。Lam 等人<sup>[19]</sup>介绍了位于香港的一栋船型建筑的环境振动测试和模态识别工作，利用快速贝叶斯快速傅里叶变换法识别结构模态识别。该方法有效地识别模态参数的最可能值，并为评估模态参数的准确性提供重要工具。Zhang 等人<sup>[20]</sup>对汲水门大桥根据现场测量的动态特性对开发的有限元模型进行了更新，以使预测的自然频率和测量的自然频率之间的差异最小。最终更新的汲水门大桥的有限元模型能够产生与测量结果一致的自然频率，并有助于进行更精确的动态响应预测。

模态分析方法按照识别信号域的不同可以分为频域方法和时域方法。

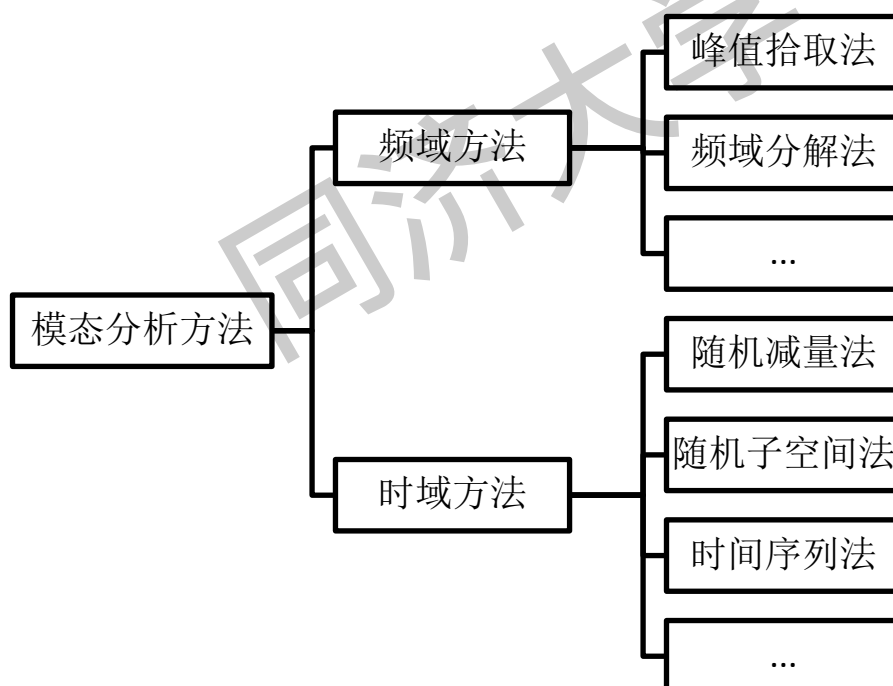


图 1.1 模态分析方法

## 1.2 模态识别的频域方法

### 1.2.1 峰值拾取法

峰值拾取法是环境激励下最简单的估计模态参数的方法，它的基本思想是：结构在环境激励的条件下，自然频率附近会产生强烈的响应，这些频率可以从结构的功率谱密度图中确定。基于快速傅里叶变换，所以应用方便，计算快速，仍在土木工程领域广泛应用<sup>[25]</sup>。

在改造评估中,需要创建模型来预测桥梁的反应和地震荷载造成的破坏程度。为了更有把握地确定破坏程度需要对结构的模型进行验证,但由在现有结构上进行实验需要关闭桥梁的交通,测试成本过高且不能快速提供结果,无法满足常规使用, Felber 在已建桥梁上将峰值拾取法应用到了实际工程。他由频谱矩阵计算得到平均正规化功率谱密度,由此得到特征频率的全貌。由此可以通过观察平均正规化功率谱密度图的峰值得到系统的自振频率<sup>[27]</sup>。

峰值拾取法假定阻尼较小且模态较为分散,利用功率谱密度函数在结构自然频率处出现峰值对系统模态进行识别,不符合该假定,方法的有效性会降低。除此之外,选取峰值的过程是一个主观的过程,会因操作人员的疲劳、失误、个人主观看法等对结果产生影响。也是由于这些特点使得峰值拾取法在实时监测和长期监测的时候存在一定的困难。

随着科技的进步和研究的发展,学者们开始将机器学习和一些传统方法相结合,提出更高效的模态分析方法。Cho<sup>[26]</sup>提出了自动识别峰值的峰值拾取法用于斜拉桥。绳索的阻尼通常很小,符合峰值拾取的假定前提,因此得到的频谱图的模态峰值通常更高更锋利,易于识别。Jin 等人<sup>[28]</sup>开发了一种完全自动化的挑峰方法,可以在不需要事先设置超参数和预训练的情况下有效去除虚假峰值,识别可靠的峰值。Naderpour<sup>[29]</sup>提出两步法进行模态识别:先将结构的自由振动响应使用小波包变换进行分解减少噪音,提高准确度。再将与主信号具有相同能量的分解信号采用峰值选取法识别模态参数。

## 1.2.2 频域分解法

为了克服峰值识别法的缺点, Brincker 提出频域分解法<sup>[30]</sup>。

频域分解法的基本思想是:将功率谱密度函数矩阵进行奇异值分解,可以将响应分解成一组单自由度系统功率谱,每个系统对应一个单独的模态。输入激励为白噪声,结构为弱阻尼,模态较接近时模态阵型在几何上正交,满足这三个条件时,模态识别结果是准确的。如果不满足这三个假设,对单自由度体系的分解是近似的,但得到的结果仍比经典的峰值拾取法准确。通过使用这种分解技术,即使在信号受到强烈噪声污染的情况下,也能以较高的精度识别近似模态。

Brincker 介绍了遗产法院大楼结构的环境响应分析<sup>[31]</sup>。将响应数据基于频域分解进行分析,并使用随机子空间识别算法进行对比。两种技术确定的自然频率有很好的-致性,估计的模态形状几乎相同,阻尼比也很接近。Brincker 对当时世界上最大的悬索桥——大贝尔特桥的环境响应进行分析<sup>[32]</sup>,探讨从交通和环境响应中估计可靠的阻尼值的可能性,期望建立一个识别大型桥梁模态的程序,获得阻尼风速之间的关系,以便可以更准确地获得风引起的振荡的振幅。频域分解

法很容易识别所有四个测试案例的所有五种模态, 阻尼估计值虽然由于信号泄露造成了误差, 但也优于通过其他方法获得的估计值。

在许多运行模态分析的应用中, 测量响应中存在谐波成分是不可避免的, 因此 Jacobsen 等人<sup>[33]</sup>提出了增强频域分解技术的新方法, 以消除这些谐波成分在模态参数提取过程中的影响。增强频域分解法中, 使用离散傅里叶逆变换将在共振峰值周围识别的单自由度功率谱密度函数转换回时域。通过确定作为时间函数的过零次数来获得自然频率, 并通过相应的单自由度归一化自相关函数的对数递减来确定阻尼。该方法被证明是一个易于使用和强大的工具, 可以处理具有确定性和随机性内容的响应。

### 1.3 模态识别的时域方法

频域方法也有一定的局限, 当结构的频率接近或过阻尼时, 使用频域方法进行模态参数识别时不能得到准确的模态参数, 而时域的方法可以识别接近的频率。时域方法可以直接应用环境激励产生的振动响应, 使用实时的加速度和力信号, 无需经过傅里叶变换对数据进行转换, 也不依赖于激励和获得设计激励所需的设备。通常情况下, 时域方法需要更少的响应数据, 但需要更高的信噪比<sup>[14]</sup>。

频域方法使用的不是原始的测量数据, 是由时间响应数据进行傅里叶变换得到的频响函数数据, 由频响函数数据几乎可以看到振动模态, 但时间响应数据不能表现出明显的模态信息如共振。因此需要更加严格的分析技巧。

#### 1.3.1 随机减量法

随机减量法最初是为了从受随机或环境激励的动力系统的响应中提取自由衰减响应数据而开发的<sup>[15]</sup>。该方法仅适用于白噪声激励的情况, 利用样本平均的方法去掉响应中的随机成分而获得初始激励下的自由响应, 然后利用结构响应数据建立特征矩阵的数学模型, 通过特征矩阵方程求得特征值和特征向量, 再利用模态频率和模态阻尼与特征值之间的关系求得振动系统的模态频率及模态阻尼比。该方法与其他时域方法的主要区别用于模态分析的随机递减方法依赖于提取的自由衰减响应数据来继续进行模态数据识别<sup>[12][14]</sup>。

在随机减量法中, 确定段的初始点的触发条件在平均化过程中会导致重叠, 这会导致残余激励。为了提高随机减量法的准确性。Sim 等人<sup>[34]</sup>提出了一种新的分散的数据聚合方法, 用于基于随机递减技术的系统识别。并在钢桁架结构上进行了验证, 从数值分析结果和实验结果来看, 基于随机减量法的分散式数据聚合策略的识别动态特性的准确性已经被证明。逯静洲等人<sup>[35]</sup>对基于随机减量技术分

布式结构模态参数识别方法进行深入研究,并与集中式算法的识别结果对比分析,表明该方法可以满足工程应用。Zhang 等人提出非重叠随机减量法<sup>[36]</sup>,通过保持相邻触发点之间的距离长于随机减量信号的长度来避免重合。如果重叠是不可避免的,则采用一个临界值来限制重叠。

### 1.3.2 随机子空间法

子空间识别方法起源于经典实现理论的输入、状态、输出的概括,是基于系统理论、线性代数和统计学的概念。随机子空间方法通过构建 Hankel 矩阵,利用 QR 分解计算特定分块 Hankel 矩阵的行空间投影,利用奇异值分解求出可观测矩阵,进而求得离散状态矩阵,基于离散状态空间方程完成识别过程<sup>[37][38]</sup>。

子空间识别程序,使用的是全状态空间模型,唯一需要确定的参数是系统的阶数,因此可以避免一些最小化参数带来的问题。除此之外,由于子空间识别法不需要迭代,即使应用了奇异值分解和 QR 分解,也会因此比一些传统的识别方法,如最小化误差法的计算更为快速,更容易收敛。最后,在子空间识别中,可以直接由输入或输出数据得到缩减的模型,因此不需要从高阶模型开始计算<sup>[39]</sup>。

虽然数学形式上复杂,并且难以解释高维空间的物理意义,但在很多时候子空间识别仍不能被其他非迭代方法取代,尤其是对于没有先验信息的复杂和模糊系统<sup>[39]</sup>。随机子空间识别也因为它的输入参数少,更易收敛和无需高阶次模型这三方面的优点广泛应用于实际工程中<sup>[40][41]</sup>。

Mugnaini 等人<sup>[42]</sup>将此前一些频域分析方法和子空间识别方法归为半自动的,因此提出了全自动的运行模态分析方法,完全独立于用户体验,完全可观,并基于统计学原理和机器学习聚类方法。Sadeqi 等人<sup>[43]</sup>首次提出了不使用几何和统计工具的、基于子空间的模态分析方法。这有助于减少计算工作,并以更现实的方式扩大输入源的范围,用于未来的纯输出分析。Zhou 等人<sup>[44]</sup>提出了一种基于蒙特卡洛稳定图的改进的子空间算法,可以有效将物理模式与假模式区分开,精确识别地震荷载下高层建筑模态参数的精确识别。

### 1.3.3 时间序列法

时间序列法是根据测量的随机响应对结构进行模态分析的方法,它的基本思想是利用过去的输入和输出信息预测现在和未来的响应。自回归移动平均模型 (autoregressive moving average, ARMA) 可以分为自回归 (autoregressive, AR) 和移动平均 (moving average, MA) 两个部分。将经典的预测误差方法<sup>[1]</sup>应用于 ARMA 模型会由 MA 部分引起高度非线性的参数估计问题。优点在于它的基本

模型虽然是 ARMA 模型，但会以线性的方法实现 AR 参数的识别<sup>[25]</sup>。

Pi 等人提出了一种基于振动结构的多变量 ARMA 模型的自然频率和阻尼比以及模态形状的识别方法。该方法可应用于现有结构的环境振动测试，也可用于实验室情况，只需要 AR 模型的相关矩阵来识别特征向量。Bao 等人<sup>[45]</sup>为海底管道系统的结构健康监测开发了一种集成的 ARMA 模型算法。经过验证，所提出的方法对损坏敏感，对噪声不敏感。它高效地为海底管道系统的损伤检测和定位提供了非常好的结果，它可以用于海底管道系统以及其他结构的损伤识别。Bertha 等人<sup>[46]</sup>关注的是时变系统的模态识别问题，基于以前关于用于线性时间不变系统模态识别的矢量自回归移动平均模型和用于非稳态系统识别的时变自回归移动平均模型的工作，提出了一个时变模型用于时变系统的多变量识别。它不仅能识别系统的时变极点，还能识别其各自的时变模态形状。Chen 等人<sup>[47]</sup>提出了一种新的短时线性变化假设与时变 ARMA 模型相结合来估计模态参数的方法，该方法简化模型并降低计算难度。其有效性和准确性也通过数值例子和实验得到了验证。

选择模型的阶数控制着 ARMA 模型的复杂程度，在应用 ARMA 模型进行模态分析时很重要。Beck 等人<sup>[48]</sup>阐述了贝叶斯方法，并应用于选择最合理的动态模型类，由此可以选择合适的 ARMA 模型的阶数。Haseyama 等人<sup>[49]</sup>讨论了一种基于模糊推理的 ARMA 模型阶数选择方法。Sadabad<sup>[50]</sup>提出了一种二维高斯 ARMA 模型阶数确定方法。在提出的方法中，首先独立确定 AR 和 MA 的阶数，然后概述了二维 ARMA 模型的模型阶数确定程序。

## 1.4 本文研究内容

传统的模态识别方法可以有效识别最佳模态参数，但由于测量数据中存在噪声，用于模态识别的数学模型中也总有误差，这会给识别的模态带来不确定性。因此，解决识别的模态参数的不确定性是很重要的。对于全尺寸结构的运行模态分析，由于无法测量环境激励，模态参数只能通过结构的测量响应识别得到，和已经激励的模态分析相比，不确定性会更大。所以需要较为复杂的方法识别模态参数并量化不确定性<sup>[51]</sup>。

Reynders 等人<sup>[52]</sup>和 Döhler 等人<sup>[53]</sup>从随机子空间识别方法中开发了量化模态参数不确定性的分析公式。Ni 等人<sup>[54]</sup>提出新型的贝叶斯方法，利用已知输入的地震期间收集的数据进行模态识别，并评估相关的后验不确定性。Shi 等人<sup>[55]</sup>研究针对随机状态空间模型的（渐近）无偏估计器，通过 Cramér-Rao 约束快速计算模态参数的不确定性下限。

本文提出基于自回归模型的模态识别方法,建立了向量自回归模型和结构动力模型的关系后,推导了如何从向量自回归模型的参数矩阵中提取结构模态参数并进行优化,未来可以在此基础上进行模态参数的后验不确定度分析。基于真实测量数据得到的模态参数可以更可靠地评估结构在使用荷载、强风和地震下的响应,据此可以更准确的评估结构的性能,从而确保结构安全。

具体工作如下:

第一章简要介绍了模态分析的应用,并按照输入信号域的不同分别介绍频域和时域范围内的模态分析方法。

对于全尺寸结构,用简单的数学形式确定结构模型是简单有效的,因此选用向量自回归模型表示结构模型。第二章基于前人的工作,进一步研究结构动力系统与 VAR 模型的等价性。

第三章在证明结构动力系统与向量自回归模型等价性的基础上,研究 VAR 模型特征值问题,从模型的参数矩阵中提取结构的模态参数。以模态参数作为未知量,以最小化模型预测响应及测量响应的差值为目标构造优化问题,通过优化得到结构模态参数的最可能值。

第四章以一个缩比四层剪力结构为例,利用所提出的方法,识别结构的模态参数,并将模态参数视为不确定参数进行优化。验证了基于向量自回归模型的系统识别方法的高效性和有效性,为下一步将所提方法用于足尺寸结构的模态分析打下基础。

第五章用所提的方法识别一个足尺桥梁的模态参数,获得初始模态参数后应用迭代算法优化模态参数。利用优化后的模态参数预测结构响应,在没有激励的情况下,预测响应曲线和测量曲线拟合良好。

第六章给出结论,指出存在不足。

## 第 2 章 基于向量自回归模型的结构动力系统

对于全尺寸结构，以简单的数学形式确定结构模型是方便有效的。向量自回归(vector autoregressive, VAR)模型形式简单，可以将复杂的结构用线性形式表达出来，这为直接运用测量数据进行建模分析提供了优势。本章基于 Lam<sup>[56]</sup>，Meirovitch<sup>[57]</sup>和 Pi<sup>[58]</sup>的工作，进一步研究结构动力系统与 VAR 模型的等价性。

### 2.1 结构动力系统的状态空间模型

为了将结构动态系统转化为 VAR 模型，首先将结构的运动方程写成一个状态空间模型。研究状态空间模型的结构是为了建立状态转换方程。这个方程有助于建立不同时间点动力响应之间的关系。

状态空间模型为研究大规模的动力系统提供了便利。描述系统状态的变量称为状态变量，它与系统的输入决定系统的动力行为。状态空间模型通常用于表示一个线性时变系统。它用一组使用输入、输出和状态变量的一阶微分或差分方程来描述一个系统。

多自由度体系的动力学方程可写成如下的形式

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t) \quad (2.1)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{u}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t)$$

式中  $\mathbf{u}$ ， $\dot{\mathbf{u}}$ ，和 $\ddot{\mathbf{u}}$ 分别为该多自由度体系的位移、速度和加速度， $\mathbf{M}$ 为质量矩阵， $\mathbf{K}$ 为刚度矩阵， $\mathbf{C}$ 阻尼矩阵。将 (2.1) 中的两个等式写成一个矩阵等式的形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_d \times N_d} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{F}(t) \quad (2.2)$$

引入列向量 $\mathbf{w}(t) = [\mathbf{u}(t)^T, \dot{\mathbf{u}}(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{2N_d}$ ，其中， $N_d$ 为该结构的自由度个数， $\mathbf{I}$ 为单位方阵。可将 (2.2) 式写成如下形式

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}\mathbf{F}(t) \quad (2.3)$$

即为该结构动力系统的状态空间模型，其中 $\mathbf{w}(t)$ 即为状态变量， $\mathbf{A}$ 为结构特性矩阵， $\mathbf{B}$ 为激励系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_d \times N_d} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

由此可求解状态空间模型。在无激励的情况下，有 $\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{w}(t)$ ，(2.3) 式

为一阶齐次微分方程，解的形式如下

$$\mathbf{w}(t) = e^{At}\mathbf{w}(0) \quad (2.5)$$

其中， $\mathbf{w}(0)=[\mathbf{u}(0)^T, \dot{\mathbf{u}}(0)^T]^T \in \mathbb{R}^{2N_d}$ ，为初始条件。定义 $\mathbf{w}(\tau)$ 到 $\mathbf{w}(t)$ 状态转移矩阵：

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} \quad (2.6)$$

进一步定义当 $\tau = 0$ 时的转移矩阵，

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (2.7)$$

它表示从 0 到 t 的状态转移，也即为 (2.5) 中的指数函数矩阵。

为了得到状态空间模型的解，首先推导动力特性矩阵 $\mathbf{A}$ 的联系。

**定理 1:** 给定状态空间模型 (2.3)，则结构特性矩阵 $\mathbf{A}$ 可用状态转移矩阵表示为如下形式：

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \dot{\Phi}(t)\Phi(-t) \\ \mathbf{A} &= \Phi(t)\dot{\Phi}(-t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

**证明:**

将 $e^{At}$ 进行泰勒展开如下

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathbf{I}_{2N_d \times 2N_d} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!} \quad (2.9)$$

对 $\Phi(t)$ 求一阶导数有

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= \frac{de^{At}}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{iA(At)^{i-1}}{i!} = A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^{i-1}}{(i-1)!} \\ &= Ae^{At} = e^{At}A \end{aligned} \quad (2.10)$$

可得

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A \quad (2.11)$$

将 (2.9) 写成如下形式

$$\Phi(-t) = e^{-At} = \Phi^{-1}(t) \quad (2.12)$$

故可将  $\mathbf{A}$  表示成两个状态转移矩阵相乘的形式

$$\mathbf{A} = \dot{\Phi}(t)\Phi(-t) \quad (2.13)$$



另一方面,

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(-t) &= \mathbf{A}\Phi(-t) = \Phi(-t)\mathbf{A} \\ \Phi(t)\dot{\Phi}(-t) &= e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A} = \mathbf{A}\end{aligned}\quad (2.14)$$

所以 $\mathbf{A}$ 也可写成 (2.14) 的形式。

■

下面利用定理 1 推导状态空间模型 (结构动力方程) 的解。将 (2.14) 中的  $\mathbf{A}$  代入 (2.3), 有

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \Phi(t)\dot{\Phi}(-t)\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}\mathbf{F}(t) \quad (2.15)$$

在 (2.15) 等式两边同时左乘  $\Phi(-t)$ , 得

$$\begin{aligned}\Phi(-t)\dot{\mathbf{w}}(t) &= \Phi(-t)\Phi(t)\dot{\Phi}(-t)\mathbf{w}(t) + \Phi(-t)\mathbf{B}\mathbf{F}(t) \\ \Phi(-t)\dot{\mathbf{w}}(t) - \dot{\Phi}(-t)\mathbf{w}(t) &= \Phi(-t)\mathbf{B}\mathbf{F}(t)\end{aligned}\quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt}(\Phi(-t)\mathbf{w}(t)) = \Phi(-t)\mathbf{B}\mathbf{F}(t)$$

左右两边同时在  $0 \sim t$  上积分得

$$\Phi(-t)\mathbf{w}(t) - \Phi(0)\mathbf{w}(0) = \int_0^t \Phi(-\tau)\mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau \quad (2.17)$$

$$\Phi(-t)\mathbf{w}(t) = \Phi(0)\mathbf{w}(0) + \int_0^t \Phi(-\tau)\mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau$$

因为  $\Phi(0) = \mathbf{I}_{N_d \times N_d}$ , (2.17) 可写成如下形式

$$\Phi(-t)\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(0) + \int_0^t \Phi(-\tau)\mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau \quad (2.18)$$

(2.18) 等式左右两边同时左乘  $\Phi(t)$ , 有

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(t) &= \Phi(t)\mathbf{w}(0) + \Phi(t) \int_0^t \Phi(-\tau)\mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t)\mathbf{w}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau\end{aligned}\quad (2.19)$$

(2.19) 为连续时间下结构动力方程的解。等式右侧第一项是由初始条件引起的, 第二项是由于激励引起的。但在实际条件中, 通常测得的响应是离散时间下的, 所以对该解的形式进行离散化。假定时间步长为常数  $\Delta t$ , 令  $t_i = i\Delta t, i = 0, 1, 2, \dots, \mathbf{w}_i = \mathbf{w}(i\Delta t)$ , 得到  $t_i = i\Delta t$  时刻下结构的响应

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_i &= \Phi(i\Delta t)\mathbf{w}_0 + \int_0^{i\Delta t} \Phi(i\Delta t - \tau) \mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau \\
&= e^{A i\Delta t}\mathbf{w}_0 + \int_0^{i\Delta t} e^{A(i\Delta t - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{2.20}$$

由以上离散时间响应可进一步得到结构响应的递推关系。根据上式写出  $t_{i+1} = (i+1)\Delta t$  时刻下结构响应

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{i+1} &= \Phi((i+1)\Delta t)\mathbf{w}_0 + \int_0^{(i+1)\Delta t} \Phi((i+1)\Delta t - \tau) \mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau \\
&= e^{A(i+1)\Delta t}\mathbf{w}_0 + \int_0^{(i+1)\Delta t} e^{A((i+1)\Delta t - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{2.21}$$

上式中第二项可拆成两个积分相加的形式, (2.21) 可写成如下形式

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{i+1} &= e^{A(i+1)\Delta t}\mathbf{w}_0 + \int_0^{i\Delta t} e^{A((i+1)\Delta t - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau \\
&\quad + \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} e^{A((i+1)\Delta t - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau \\
&= e^{A\Delta t} \left( e^{A i\Delta t}\mathbf{w}_0 + \int_0^{i\Delta t} e^{A(i\Delta t - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau \right) \\
&\quad + \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} e^{A((i+1)\Delta t - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{2.22}$$

和 (2.20) 对比可知 (2.21) 等式右侧第一项括号内即等于  $\mathbf{w}_i$

$$\mathbf{w}_{i+1} = e^{A\Delta t}\mathbf{w}_i + \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} e^{A((i+1)\Delta t - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau \tag{2.23}$$

实际情况中, 激励也是离散的。假定一个常数时间步长为  $\Delta t$ , 将激励离散化,  $\mathbf{F}(\tau) \approx \mathbf{F}(i\Delta t) = \mathbf{F}_i$ 。为进行下一步化简, 令  $t = (i+1)\Delta t - \tau$ , 则  $\tau = (i+1)\Delta t - t$ ,  $dt = -d\tau$ 。(2.23) 中的积分项可写为

$$\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} e^{A((i+1)\Delta t - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{F}(\tau)d\tau \approx \int_{\Delta t}^0 e^{At} \mathbf{B}\mathbf{F}_i d(-t) = \int_0^{\Delta t} e^{At} \mathbf{B}\mathbf{F}_i dt \tag{2.24}$$

定义单位时间步长内的状态转移矩阵  $\Phi$  以及常数矩阵  $\mathbf{C}$

$$\Phi = e^{A\Delta t} \tag{2.25}$$

$$\mathbf{C} = \left( \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}t} dt \right) \mathbf{B} = \left( \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}t} \Big|_0^{\Delta t} \right) \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}_{2N_d \times 2N_d}) \mathbf{B} \quad (2.26)$$

最后得出离散时间下结构响应的递推公式

$$\mathbf{w}_{i+1} = \Phi \mathbf{w}_i + \mathbf{C} \mathbf{F}_i \quad (2.27)$$

根据 (2.27),  $t_{i+2} = (i+2)\Delta t$  时刻下的响应  $\mathbf{w}_{i+2}$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{i+2} &= \Phi \mathbf{w}_{i+1} + \mathbf{C} \mathbf{F}_{i+1} \\ &= \Phi (\Phi \mathbf{w}_i + \mathbf{C} \mathbf{F}_i) + \mathbf{C} \mathbf{F}_{i+1} \\ &= \Phi^2 \mathbf{w}_i + \Phi \mathbf{C} \mathbf{F}_i + \mathbf{C} \mathbf{F}_{i+1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$t_{i+3} = (i+3)\Delta t$  时刻下的响应  $\mathbf{w}_{i+3}$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{i+3} &= \Phi \mathbf{w}_{i+2} + \mathbf{C} \mathbf{F}_{i+2} \\ &= \Phi (\Phi^2 \mathbf{w}_i + \Phi \mathbf{C} \mathbf{F}_i + \mathbf{C} \mathbf{F}_{i+1}) + \mathbf{C} \mathbf{F}_{i+2} \\ &= \Phi^3 \mathbf{w}_i + \Phi^2 \mathbf{C} \mathbf{F}_i + \Phi \mathbf{C} \mathbf{F}_i + \mathbf{C} \mathbf{F}_{i+2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$t_{i+4} = (i+4)\Delta t$  时刻下的响应  $\mathbf{w}_{i+4}$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{i+4} &= \Phi \mathbf{w}_{i+3} + \mathbf{C} \mathbf{F}_{i+3} \\ &= \Phi (\Phi^3 \mathbf{w}_i + \Phi^2 \mathbf{C} \mathbf{F}_i + \Phi \mathbf{C} \mathbf{F}_i + \mathbf{C} \mathbf{F}_{i+2}) + \mathbf{C} \mathbf{F}_{i+3} \\ &= \Phi^4 \mathbf{w}_i + \Phi^3 \mathbf{C} \mathbf{F}_i + \Phi^2 \mathbf{C} \mathbf{F}_i + \Phi \mathbf{C} \mathbf{F}_i + \mathbf{C} \mathbf{F}_{i+3} \end{aligned} \quad (2.30)$$

由递推法易证明  $t_{i+j} = (i+j)\Delta t$  时刻下的响应  $\mathbf{w}_{i+j}$  与  $t_i = i\Delta t$  时刻下响应  $\mathbf{w}_i$  间的关系

$$\mathbf{w}_{i+j} = \Phi^j \mathbf{w}_i + \sum_{k=0}^{j-1} \Phi^{j-1-k} \mathbf{C} \mathbf{F}_{i+k} \quad (2.31)$$

## 2.2 自由振动结构系统与向量自回归模型的等价性

有了状态空间表示的动力系统以及动力响应的递推表达式 (2.30), 首先推导结构只在初始条件下的自由衰减振动与 VAR 模型的等价性。

向量自回归模型利用过去的响应来预测未来响应, 即将响应的第  $i$  项表示为第  $(i-1)$  项至第  $(i-n)$  项, 即该项前  $n$  项响应的线性组合的形式, 写成矩阵形式如下:

$$\mathbf{y}_i = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \dots \quad \mathbf{P}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i-1} \\ \mathbf{y}_{i-2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i-n} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

其中,  $\{\mathbf{P}_j \in \mathbb{R}^{N_0 \times N_0}; j = 1, 2, \dots, n\}$  是参数矩阵,  $n$  是 VAR 模型的阶数。实际情况中, 不可能测量一个结构的所有自由度, 故引入选择矩阵  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N_0 \times 2N_d}$ , 以此来选择所测量自由度的响应。

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{S} \mathbf{w}_i \quad (2.33)$$

$\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{N_0}$  表示所测量的  $N_0$  个自由度的响应。  $\mathbf{S} = [\mathbf{I}_{N_0 \times N_0} \quad \mathbf{0}_{N_0 \times (2N_d - N_0)}]$  的元素只有 0 和 1, 它表示只选择向量  $\mathbf{w}_i$  的前  $N_0$  个元素。

构造自由振动情况下扩展响应向量  $\mathbf{v}_n$ , 即为第  $(i+1)$  时刻至第  $(i+n)$  时刻的测量响应所构成的列向量。将 (2.31) 和 (2.33) 代入  $\mathbf{v}_n$  可得

$$\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i+1} \\ \mathbf{y}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+j} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \mathbf{w}_{i+1} \\ \mathbf{S} \mathbf{w}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{S} \mathbf{w}_{i+j} \\ \vdots \\ \mathbf{S} \mathbf{w}_{i+n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \Phi \mathbf{w}_i \\ \mathbf{S} \Phi^2 \mathbf{w}_i \\ \vdots \\ \mathbf{S} \Phi^j \mathbf{w}_i \\ \vdots \\ \mathbf{S} \Phi^n \mathbf{w}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S} \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{S} \Phi^{j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{S} \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \Phi \mathbf{w}_i = \mathbf{D} \Phi \mathbf{w}_i \quad (2.34)$$

其中  $\mathbf{D}$  为观测矩阵,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S} \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{S} \Phi^{j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{S} \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

结构的可观测性是指只用输出测量的信息来了解中定义的状态空间变量的所有动态行为。根据定理, 线性离散时间系统当且仅当观察矩阵为满秩矩阵时该系统为完全可观测的<sup>[59]</sup>。假定振动结构是完全可观测的, 即观测矩阵  $\mathbf{D}$  是非奇异矩阵,  $n = \frac{2N_d}{N_0}$

根据 (2.34) 式,  $\mathbf{v}_{n+1}$  可写成如下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{n+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i+2} \\ \mathbf{y}_{i+3} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+j} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \mathbf{w}_{i+2} \\ \mathbf{S} \mathbf{w}_{i+3} \\ \vdots \\ \mathbf{S} \mathbf{w}_{i+j} \\ \vdots \\ \mathbf{S} \mathbf{w}_{i+n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \Phi^2 \mathbf{w}_i \\ \mathbf{S} \Phi^3 \mathbf{w}_i \\ \vdots \\ \mathbf{S} \Phi^j \mathbf{w}_i \\ \vdots \\ \mathbf{S} \Phi^{n+1} \mathbf{w}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S} \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{S} \Phi^{j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{S} \Phi^{n-1} \end{bmatrix} \Phi^2 \mathbf{w}_i \\ &= \mathbf{D} \Phi^2 \mathbf{w}_i \end{aligned} \quad (2.36)$$

单位矩阵  $\mathbf{I} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D}$ , 代入 (2.35) 有

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{D} \Phi^2 \mathbf{w}_i = \mathbf{D} \Phi \mathbf{I} \Phi \mathbf{w}_i = \mathbf{D} \Phi \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D} \Phi \mathbf{w}_i = \mathbf{G} \mathbf{v}_n \quad (2.37)$$

其中,

$$\mathbf{G} = \mathbf{D}\Phi\mathbf{D}^{-1} \quad (2.38)$$

将 (2.38) 代入 (2.35) 有

$$\mathbf{G} = \mathbf{D}\Phi\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}(\mathbf{D}\Phi^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S}\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}\Phi^{-1} \\ \mathbf{S} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-2} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.39)$$

根据 Pi<sup>[58]</sup>的方法研究 $\mathbf{G}$ 的结构。为便于推演, 将 $\mathbf{G}$ 写成分块矩阵的形式

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.40)$$

其中

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S}\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^n \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}\Phi^{n-1} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{S}\Phi^{-1} \quad (2.43)$$

将 (2.40) 中的逆矩阵写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}^{-1} = [\mathbf{L}^{\{-1\}} \quad \mathbf{H}^{\{-1\}}] \quad (2.44)$$

其中,  $\mathbf{L}^{\{-1\}}$ 和 $\mathbf{H}^{\{-1\}}$ 都不是传统意义上的逆矩阵, (2.44) 等式左右两边同时左乘

$\begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$ , 有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} [\mathbf{L}^{\{-1\}} \quad \mathbf{H}^{\{-1\}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{L}\mathbf{L}^{\{-1\}} & \mathbf{L}\mathbf{H}^{\{-1\}} \\ \mathbf{H}\mathbf{L}^{\{-1\}} & \mathbf{H}\mathbf{H}^{\{-1\}} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (2.45)$$

由上式可得以下性质

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^{\{-1\}} = \mathbf{I} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^{\{-1\}} = \mathbf{I} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{L}^{\{-1\}} = \mathbf{L}\mathbf{H}^{\{-1\}} = \mathbf{0} \quad (2.48)$$

将 (2.44)、(2.46) ~ (2.48) 代入 (2.40)

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} [\mathbf{L}^{\{-1\}} \quad \mathbf{H}^{\{-1\}}] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{L}^{\{-1\}} & \mathbf{H}\mathbf{H}^{\{-1\}} \\ \mathbf{J}\mathbf{L}^{\{-1\}} & \mathbf{J}\mathbf{H}^{\{-1\}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{J}\mathbf{L}^{\{-1\}} & \mathbf{J}\mathbf{H}^{\{-1\}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.49)$$

将 (2.49) 中  $\mathbf{JL}^{-1}$ ,  $\mathbf{JH}^{-1}$  重新分组成一系列低阶矩阵  $\{\mathbf{P}_k: k = 1, \dots, n\}$ , 则 (2.49) 的元素可重新排列后写成如下形式

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{I}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \dots & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} \\ \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{I}_{N_0 \times N_0} & \dots & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \dots & \mathbf{I}_{N_0 \times N_0} \\ \mathbf{P}_n & \mathbf{P}_{n-1} & \mathbf{P}_{n-2} & \dots & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

将 (2.50) 代入 (2.36) 得到

$$\mathbf{v}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i+2} \\ \mathbf{y}_{i+3} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+j} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{I}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \dots & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} \\ \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{I}_{N_0 \times N_0} & \dots & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \dots & \mathbf{I}_{N_0 \times N_0} \\ \mathbf{P}_n & \mathbf{P}_{n-1} & \mathbf{P}_{n-2} & \dots & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i+1} \\ \mathbf{y}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+j} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+n} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

展开等式的最后一行可得

$$\mathbf{y}_{i+n+1} = [\mathbf{P}_n \quad \mathbf{P}_{n-1} \quad \dots \quad \mathbf{P}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i+1} \\ \mathbf{y}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+n} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

令  $j = i + n + 1$ , 代入 (2.52) 有

$$\mathbf{y}_j = [\mathbf{P}_n \quad \mathbf{P}_{n-1} \quad \dots \quad \mathbf{P}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{j-n} \\ \mathbf{y}_{j-n+1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{j-1} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

式 (2.53) 与式 (2.32) 定义的 VAR 模型相同, 这表明自由振动下的结构可以表示为 VAR 模型的形式。

### 2.3 受迫振动结构系统与向量自回归模型的等价性

在第 2.2 节自由振动的基础上, 进一步研究结构在激励下是否也有简单的 VAR 模型的数学形式。数学上的处理与上一节自由振动情况的类似。

与自由振动下的情况相同, 首先构造扩展响应向量  $\mathbf{v}_n$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_n &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i+1} \\ \mathbf{y}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+j} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+n} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}\Phi\mathbf{w}_i \\ \mathbf{S}\Phi^2\mathbf{w}_i \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^j\mathbf{w}_i \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^n\mathbf{w}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \vdots & & \\ & \mathbf{S}\Phi^{j-1}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{j-2}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \vdots & & \\ & \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-3}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{S}\Phi^2\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-2} \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \end{bmatrix} \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S}\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \Phi\mathbf{w}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \vdots & & \\ & \mathbf{S}\Phi^{j-1}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{j-2}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \vdots & & \\ & \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-3}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{S}\Phi^2\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-2} \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{D}\Phi\mathbf{w}_i + \mathbf{E}\tilde{\mathbf{F}}_{n-1}
 \end{aligned}$$

其中,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \vdots & & \\ & \mathbf{S}\Phi^{j-1}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{j-2}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \vdots & & \\ & \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-3}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{S}\Phi^2\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{n-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-2} \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

根据 (2.54) 可写出下一时间点  $\mathbf{v}_{n+1}$  时的表达式,

$$\mathbf{v}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i+2} \\ \mathbf{y}_{i+3} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+j} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+n+1} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} S\Phi^2 w_i \\ S\Phi^3 w_i \\ \vdots \\ S\Phi^j w_i \\ \vdots \\ S\Phi^{n+1} w_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} SC & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ S\Phi C & SC & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \\ S\Phi^{j-1} C S\Phi^{j-2} C \dots & 0 & 0 & 0 & & \\ & \vdots & & & & \\ S\Phi^{n-2} C S\Phi^{n-3} C \dots S\Phi C & SC & 0 & & & \\ S\Phi^{n-1} C S\Phi^{n-2} C \dots S\Phi^2 C S\Phi C S C & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ F_{i+1} \\ \vdots \\ F_{i+j-1} \\ \vdots \\ F_{i+n-2} \\ F_{i+n-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} S \\ S\Phi \\ \vdots \\ S\Phi^{j-1} \\ \vdots \\ S\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \Phi^2 w_i + \begin{bmatrix} S \\ S\Phi \\ \vdots \\ S\Phi^{j-1} \\ \vdots \\ S\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \Phi C \begin{bmatrix} SC & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ S\Phi C & SC & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \\ S\Phi^{j-1} C S\Phi^{j-2} C \dots & 0 & 0 & 0 & & \\ & \vdots & & & & \\ S\Phi^{n-2} C S\Phi^{n-3} C \dots S\Phi C & SC & 0 & & & \\ S\Phi^{n-1} C S\Phi^{n-2} C \dots S\Phi^2 C S\Phi C S C & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ F_{i+1} \\ \vdots \\ F_{i+j-1} \\ \vdots \\ F_{i+n-1} \\ F_{i+n} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

和  $\tilde{F}_{n-1}$  类似的, 定义  $\tilde{F}_n$ ,

$$\tilde{F}_n = \begin{bmatrix} F_{i+1} \\ F_{i+2} \\ \vdots \\ F_{i+j-1} \\ \vdots \\ F_{i+n-1} \\ F_{i+n} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

因此, (2.57) 可写成如下分块矩阵形式

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= D\Phi^2 w_i + [D\Phi C \quad E] \begin{bmatrix} F_i \\ \tilde{F}_n \end{bmatrix} \\
 &= D\Phi I \Phi w_i + D\Phi C F_i + E \tilde{F}_n \\
 &= D\Phi D^{-1} D\Phi w_i + D\Phi C F_i + E \tilde{F}_n
 \end{aligned} \quad (2.59)$$

将 (2.38), (2.54) 代入 (2.59)

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= D\Phi D^{-1} D\Phi w_i + D\Phi C F_i + E \tilde{F}_n \\
 &= G D\Phi w_i + D\Phi C F_i + E \tilde{F}_n \\
 &= G(v_n - E \tilde{F}_{n-1}) + G D\Phi w_i + E \tilde{F}_n \\
 &= G v_n - G E \tilde{F}_{n-1} + G D\Phi w_i + E \tilde{F}_n \\
 &= G v_n - G(E \tilde{F}_{n-1} - D C F_i) + E \tilde{F}_n
 \end{aligned} \quad (2.60)$$



$$\mathbf{DCF}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S}\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{CF}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-1}\mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1}\mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-2} \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

根据 (2.55) (2.56) 和 (2.61) 有,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\tilde{\mathbf{F}}_{n-1} - \mathbf{DCF}_i \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-1}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{j-2}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-3}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{S}\Phi^2\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-2} \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-1}\mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1}\mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-2} \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{SC} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\Phi^{j-2}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\Phi^{n-3}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{S}\Phi^2\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-2} \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.62)$$

对等式右侧进行变形, 删去第一列的  $\mathbf{0}$  元素和右侧矩阵第一行的  $\mathbf{F}_i$ , 且在第一个矩阵最后一列后加一列  $\mathbf{0}$  元素, 在第二个矩阵最后一行加  $\mathbf{F}_{i+n}$ 。虽然改变了矩阵的形式, 但不改变做乘法后得到的结果。(2.62) 写成如下的形式,

$$\mathbf{E}\tilde{\mathbf{F}}_{n-1} - \mathbf{DCF}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{SC} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-2}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-3}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{S}\Phi^2\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} \\ \mathbf{F}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \\ \mathbf{F}_{i+n} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

于是可得 (2.60) 式中  $\mathbf{G}(\mathbf{E}\tilde{\mathbf{F}}_{n-1} - \mathbf{DCF}_i)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}(\mathbf{E}\tilde{\mathbf{F}}_{n-1} - \mathbf{DCF}_i) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{I}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \cdots & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} \\ \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{I}_{N_0 \times N_0} & \cdots & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \cdots & \mathbf{I}_{N_0 \times N_0} \\ \mathbf{P}_n & \mathbf{P}_{n-1} & \mathbf{P}_{n-2} & \cdots & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{SC} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-2}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-3}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{S}\Phi^2\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} \\ \mathbf{F}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \\ \mathbf{F}_{i+n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{j-3}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-3}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}_j \mathbf{S}\Phi^{n-j-1}\mathbf{C} & \sum_{j=1}^{n-2} \mathbf{P}_j \mathbf{S}\Phi^{n-j-2}\mathbf{C} & \dots & \sum_{j=1}^2 \mathbf{P}_j \mathbf{S}\Phi^{2-j}\mathbf{C} & \mathbf{P}_1 \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} \\ \mathbf{F}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \\ \mathbf{F}_{i+n} \end{bmatrix}$$

由此可得, (2.60) 式的后两项

$$-\mathbf{G}(\mathbf{E}\tilde{\mathbf{F}}_{n-1} - \mathbf{DC}\mathbf{F}_i) + \mathbf{E}\tilde{\mathbf{F}}_n$$

$$= - \begin{bmatrix} \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{j-3}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-3}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}_j \mathbf{S}\Phi^{n-j-1}\mathbf{C} & \sum_{j=1}^{n-2} \mathbf{P}_j \mathbf{S}\Phi^{n-j-2}\mathbf{C} & \dots & \sum_{j=1}^2 \mathbf{P}_j \mathbf{S}\Phi^{2-j}\mathbf{C} & \mathbf{P}_1 \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} \\ \mathbf{F}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \\ \mathbf{F}_{i+n} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{j-3}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-3}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \dots & \mathbf{S}\Phi^2\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} \\ \mathbf{F}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \\ \mathbf{F}_{i+n} \end{bmatrix}$$

(续 (2.65))

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{j-3}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-3}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{S}\Phi^2\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{j-3}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-3}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{S}\Phi\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}_j \mathbf{S}\Phi^{n-j-1}\mathbf{C} & \sum_{j=1}^{n-2} \mathbf{P}_j \mathbf{S}\Phi^{n-j-2}\mathbf{C} & \cdots & \sum_{j=1}^2 \mathbf{P}_j \mathbf{S}\Phi^{2-j}\mathbf{C} & \mathbf{P}_1 \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} \\ \mathbf{F}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \\ \mathbf{F}_{i+n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1}\mathbf{C} - \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}_j \mathbf{S}\Phi^{n-j-1}\mathbf{C} & \mathbf{S}\Phi^{n-2}\mathbf{C} - \sum_{j=1}^{n-2} \mathbf{P}_j \mathbf{S}\Phi^{n-j-2}\mathbf{C} & \cdots & \mathbf{S}\Phi^2\mathbf{C} - \sum_{j=1}^2 \mathbf{P}_j \mathbf{S}\Phi^{2-j}\mathbf{C} & \mathbf{SC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} \\ \mathbf{F}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \\ \mathbf{F}_{i+n} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

以看出上式是由两个矩阵的乘积得到,且第一个矩阵仅有最后一行的元素非  $\mathbf{0}$ ,其余元素皆为  $\mathbf{0}$ ,用  $\{\mathbf{Q}_i: i = 1, 2, \dots, n\}$  分块表示该矩阵最后一行的元素,得到

$$-\mathbf{G}(\mathbf{E}\tilde{\mathbf{F}}_{n-1} - \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{F}_i) + \mathbf{E}\tilde{\mathbf{F}}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_n & \mathbf{Q}_{n-1} & \cdots & \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} \\ \mathbf{F}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \\ \mathbf{F}_{i+n} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

将 (2.66) 代入 (2.60) 有

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{n+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i+2} \\ \mathbf{y}_{i+3} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+j} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{G}\mathbf{v}_n - \mathbf{G}(\mathbf{E}\tilde{\mathbf{F}}_{n-1} - \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{F}_i) + \mathbf{E}\tilde{\mathbf{F}}_n \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{I}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \cdots & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} \\ \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{I}_{N_0 \times N_0} & \cdots & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \mathbf{0}_{N_0 \times N_0} & \cdots & \mathbf{I}_{N_0 \times N_0} \\ \mathbf{P}_n & \mathbf{P}_{n-1} & \mathbf{P}_{n-2} & \cdots & \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i+1} \\ \mathbf{y}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+j} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_n & \mathbf{Q}_{n-1} & \cdots & \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} \\ \mathbf{F}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n-1} \\ \mathbf{F}_{i+n} \end{bmatrix} \quad (2.67)
\end{aligned}$$

将上式的最后一行展开可到

$$\mathbf{y}_{i+n+1} = [\mathbf{P}_n \quad \mathbf{P}_{n-1} \quad \cdots \quad \mathbf{P}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{i+1} \\ \mathbf{y}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{i+n} \end{bmatrix} + [\mathbf{Q}_n \quad \mathbf{Q}_{n-1} \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{i+1} \\ \mathbf{F}_{i+2} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{i+n} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

进行变量代换,令  $j = i + n + 1$ , 得到受迫振动情况下的 VAR 模型

$$\mathbf{y}_j = [\mathbf{P}_n \quad \mathbf{P}_{n-1} \quad \dots \quad \mathbf{P}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{j-n} \\ \mathbf{y}_{j-n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{j-1} \end{bmatrix} + [\mathbf{Q}_n \quad \mathbf{Q}_{n-1} \quad \dots \quad \mathbf{Q}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{j-n} \\ \mathbf{F}_{j-n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{j-1} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

假设结构主要模态的模态激励服从高斯分布, 即假设在每个主要模态的频域范围内模态激励功率谱密度是平稳分布的, 则 (2.69) 的激励项可合并写成一个高斯随机变量  $\varepsilon_j$ 。因此, 处于环境振动情况下的结构系统也可用 VAR 模型描述,

$$\mathbf{y}_j = [\mathbf{P}_n \quad \mathbf{P}_{n-1} \quad \dots \quad \mathbf{P}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{j-n} \\ \mathbf{y}_{j-n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{j-1} \end{bmatrix} + \varepsilon_j \quad (2.70)$$

## 2.4 本章小结

本章研究了结构动力系统与 VAR 模型的等价性。首先将结构的运动方程写成一个状态空间模型, 建立状态转换方程, 这个方程有助于建立不同时间点动力响应之间的关系。考虑到实际情况中测量得到的是离散时间的响应数据, 进一步将连续时间响应进行离散化, 推导得出结构动力响应的递推表达式。

基于用状态空间表示的动力系统, 推导 VAR 模型与结构运动方程的等价性。首先考虑结构只在初始条件下的自由衰减振动与 VAR 模型的等价性, 然后研究自由振动的基础上研究受迫振动下的情况。结果表明, 处于环境振动情况下的结构系统也可用 VAR 模型描述。

## 第 3 章 基于向量自回归模型的新型快速模态分析方法

第 2 章研究了结构动力系统与 VAR 模型等价性, 本章在此基础上研究状态空间特征值问题、VAR 模型特征值问题与结构运动方程特征值问题之间的关系。通过从 VAR 模型的参数矩阵中提取结构的模态参数, 利用模态参数可以反算出 VAR 参数矩阵。

提出识别模态参数的新型迭代算法, 该算法直接以模态参数为变量, 通过系统地迭代更新模态参数, 每一组模态参数都可反算出一组 VAR 参数矩阵, 再通过 VAR 参数预测结构响应, 计算出这一组模态参数对应的响应误差。通过不断更新模态参数使响应误差最小化, 最终得到最优模态参数。

### 3.1 结构动力系统与向量自回归动力系统的特征值问题

首先, 研究状态空间模型的特征值问题。在自由振动的情况下, (2.3) 激励项为 0, 有

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{w}(t) \quad (3.1)$$

该齐次方程的解的形式如下

$$\mathbf{w}(t) = e^{\lambda t} \boldsymbol{\Psi} \quad (3.2)$$

$\lambda$  和  $\boldsymbol{\Psi}$  都为常数, 将 (3.2) 代入 (3.1) 有

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t} \boldsymbol{\Psi} &= \mathbf{A} e^{\lambda t} \boldsymbol{\Psi} \\ \lambda \boldsymbol{\Psi} &= \mathbf{A} \boldsymbol{\Psi} \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.3) 为状态空间特征值问题, 其中,  $\lambda$  和  $\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{2N_d}$  分别为特征值和该特征值所对应的特征向量。 $\mathbf{A}$  不是对称矩阵, 所以  $\mathbf{A}$  的特征向量可能为实向量, 可能为虚向量, 且不同特征值对应的特征向量不正交。 $\mathbf{A}$  有  $2N_d$  个特征值和  $2N_d$  个特征向量。因为  $\mathbf{A}$  是实矩阵, 则矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值和特征向量将是复共轭对的形式, 即若  $\lambda_m$  和  $\boldsymbol{\Psi}_m$  分别为特征值和特征值对应的特征向量,  $\bar{\lambda}_m$  和  $\bar{\boldsymbol{\Psi}}_m$  (上标  $\bar{\phantom{x}}$  表示共轭复数) 也为特征值和该特征值所对应的特征向量。因此, 状态空间方程有  $N_d$  对特征值和特征向量  $\{\lambda_m, \bar{\lambda}_m; \boldsymbol{\Psi}_m, \bar{\boldsymbol{\Psi}}_m; m = 1, 2, \dots, N_d\}$ 。

下一步建立状态空间特征值问题与结构运动方程特征值问题的关系, 此关系由下述定理给出。

**定理 2:** 状态空间模型与结构运动方程有相同的特征值。设  $\lambda$  为状态空间模

型或结构运动方程的某个特征值， $\Psi$ 为 $\lambda$ 对应的状态空间模型的特征向量， $\phi$ 为 $\lambda$ 对应的结构运动方程的特征向量，则 $\Psi$ 与 $\phi$ 满足下面的关系：

$$\Psi = \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda\phi \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

证明：

状态空间模型所对应的结构运动方程 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ 的解如下：

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}\phi \quad (3.5)$$

将（3.5）代入运动方程可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\lambda^2 e^{\lambda t}\phi + \mathbf{C}\lambda e^{\lambda t}\phi + \mathbf{K}e^{\lambda t}\phi &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{C}\lambda + \mathbf{K})\phi &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$\lambda$ 和 $\phi$ 分别为运动方程的特征值和特征向量，并且 $\phi$ 为结构的振型。由于（3.2）和（3.6）是同一个动力系统的不同表示形式，所以有相同的特征值。

$$\lambda_m = -\xi_m\omega_m \pm i\omega_m\sqrt{1-\xi_m^2}, m = 1, 2, \dots, N_d \quad (3.7)$$

$\xi_m$ 为结构的阻尼比， $\omega_m$ 为圆频率，以单位时间的弧度计量。在振动中，结构的周期通常用秒来计量，更直观的是以 Hz（每秒周期）为单位的频率，即

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.8)$$

虽然特征值相同，但特征向量 $\Psi$ 和 $\phi$ 不同。将 $\Psi$ 写成两个分块矩阵的形式 $\Psi = \begin{bmatrix} \Psi^t \\ \Psi^b \end{bmatrix}$ ，（3.3）展开如下：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_d \times N_d} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^t \\ \Psi^b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \Psi^t \\ \Psi^b \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

将（3.9）写成两个等式的形式有

$$\Psi^b = \lambda\Psi^t \quad (3.10)$$

$$\lambda\mathbf{M}\Psi^b + \mathbf{C}\Psi^b + \mathbf{K}\Psi^t = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

将（3.10）代入（3.11）有：

$$\begin{aligned} \lambda^2\mathbf{M}\Psi^t + \lambda\mathbf{C}\Psi^t + \mathbf{K}\Psi^t &= \mathbf{0} \\ (\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{C} + \mathbf{K})\Psi^t &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.12)$$

比较（3.6）和（3.12）可得到：

$$\Psi^t = \phi \quad (3.13)$$

因此，状态空间模型的特征向量可用该结构的振型 $\phi$ 表示：

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi^t \\ \Psi^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi^t \\ \lambda\Psi^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda\phi \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

为建立状态空间模型特征值、运动方程特征向量（即结构振型）与 VAR 模型的关系，研究（2.50）中由 VAR 参数 $\{\mathbf{P}_k: k = 1, 2, \dots, n\}$ 构成的矩阵 $\mathbf{G}$ 的特征值问题。

**定理 3:** 已知 $\mathbf{G}$ 的数学形式为（2.50），则 $\mathbf{G}$ 的第  $m$  个特征值为 $\mu_m$ ，该特征值对应的特征向量为 $\boldsymbol{\varphi}_m$ ，数学表达形式为（3.15）（3.16）

$$\mu_m = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1} \lambda_m^{i-1}}{(i-1)!} = e^{\lambda_m t} \quad (3.15)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{S}\boldsymbol{\Psi}_m \\ \mu_m \mathbf{S}\boldsymbol{\Psi}_m \\ \vdots \\ \mu_m^{j-1} \mathbf{S}\boldsymbol{\Psi}_m \\ \vdots \\ \mu_m^{n-1} \mathbf{S}\boldsymbol{\Psi}_m \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

**证明:**

在（2.38）等式左右两边同时右乘矩阵 $\mathbf{D}$ ，有

$$\mathbf{G}\mathbf{D} = \mathbf{D}\boldsymbol{\Phi} \quad (3.17)$$

（3.17）形式上与特征值问题相同，将（2.35）入（3.17）有：

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S}\boldsymbol{\Phi} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\boldsymbol{\Phi}^{j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\boldsymbol{\Phi}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S}\boldsymbol{\Phi} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\boldsymbol{\Phi}^{j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\boldsymbol{\Phi}^{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \quad (3.18)$$

由于（3.19）（3.19）包括了状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ ，所以先研究状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的特征值问题。

将结构特性矩阵 $\mathbf{A}$ 表示成特征值和特征向量的形式

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Psi}^{-1} \quad (3.19)$$

其中，

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{2N_d} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

将（3.19）和（3.20）代入（2.9）：

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{I}_{2N_d \times 2N_d} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots \\
 &= \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^{-1} + t\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Psi}^{-1} + \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Lambda}\underbrace{\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Psi}^{-1}}_1 + \frac{t^3}{3!}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Lambda}\underbrace{\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Psi}^{-1}}_1\underbrace{\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Psi}^{-1}}_1 + \dots \\
 &= \boldsymbol{\Psi}\left(\mathbf{I}_{2N_d \times 2N_d} + t\boldsymbol{\Lambda} + \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{\Lambda}^2 + \frac{t^3}{3!}\boldsymbol{\Lambda}^3 + \dots\right)\boldsymbol{\Psi}^{-1} \\
 &= \boldsymbol{\Psi}\left[\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}\lambda_1^{i-1}}{(i-1)!} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}\lambda_{2N_d}^{i-1}}{(i-1)!} \end{array}\right]\boldsymbol{\Psi}^{-1}
 \end{aligned}$$

(3.21) 中的累加项是指数函数的泰勒展开:

$$\mu_m = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}\lambda_m^{i-1}}{(i-1)!} = e^{\lambda_m t} \quad (3.22)$$

$\mu_m$  为离散时间的结构动力系统的特征值,  $\lambda_m$  为连续时间的结构动力系统的特征值, 因此 (3.21) 可写为:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Phi} &= e^{\mathbf{A}t} = \boldsymbol{\Psi}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{\Psi}^{-1} \\
 \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi} &= \boldsymbol{\Psi}e^{\boldsymbol{\Lambda}t}
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

其中,  $e^{\boldsymbol{\Lambda}t}$  是一个对角矩阵

$$\mathbf{Y} = e^{\boldsymbol{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_{2N_d} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

由 (3.23) 可知, 状态转移矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  和结构特性矩阵  $\mathbf{A}$  有相同的特征向量,  $\boldsymbol{\Phi}$  的特征值是指数函数形式, 其中函数的指数是  $\mathbf{A}$  的特征值, 即  $\{\mu_m = e^{\lambda_m t}; m = 1, 2, \dots, 2N_d\}$ .

同理, 状态转移矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  的  $j$  次方可以写成:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Phi}^j &= e^{j\mathbf{A}t} \\
 &= \mathbf{I}_{2N_d \times 2N_d} + t(j\mathbf{A}) + \frac{t^2}{2!}(j\mathbf{A})^2 + \frac{t^3}{3!}(j\mathbf{A})^3 + \dots \\
 &= \boldsymbol{\Psi}\left(\mathbf{I}_{2N_d \times 2N_d} + t(j\boldsymbol{\Lambda}) + \frac{t^2}{2!}(j\boldsymbol{\Lambda})^2 + \frac{t^3}{3!}(j\boldsymbol{\Lambda})^3 + \dots\right)\boldsymbol{\Psi}^{-1}
 \end{aligned} \quad (3.25)$$



$$= \Psi e^{j\Lambda t} \Psi^{-1}$$

$$= \Psi \Upsilon^j \Psi^{-1}$$

(3.25) 可写为

$$\Phi^j \Psi = \Psi \Upsilon^j \quad (3.26)$$

因为 $\Upsilon^j$ 是对角矩阵, 所以(3.26)是 $\Phi^j$ 的特征值问题, 表明 $\Phi^j$ 与结构特性矩阵 $\mathbf{A}$ 有相同的特征向量, 但对应的特征值不同, 分别为 $\{\mu_m^j = e^{j\lambda_m t}: m = 1, 2, \dots, 2N_d\}$ 。

得到了状态转移矩阵 $\Phi$ 特征值和特征向量的形式, 现研究(3.18)的特征值问题。(3.18)等式两端右乘 $\Psi$ ,

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{S}\Psi \\ \mathbf{S}\Phi\Psi \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-1}\Psi \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1}\Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S}\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \Phi\Psi \quad (3.27)$$

将(3.26)代入(3.27)有

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{S}\Psi \\ \mathbf{S}\Psi\Upsilon \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Psi\Upsilon^{j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Psi\Upsilon^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{S}\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \Psi\Upsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{S}\Psi \\ \mathbf{S}\Phi\Psi \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{j-1}\Psi \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Phi^{n-1}\Psi \end{bmatrix} \Upsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{S}\Psi \\ \mathbf{S}\Psi\Upsilon \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Psi\Upsilon^{j-1} \\ \vdots \\ \mathbf{S}\Psi\Upsilon^{n-1} \end{bmatrix} \Upsilon \quad (3.28)$$

(3.28)为矩阵 $\mathbf{G}$ 的特征值问题的解的形式, 第 $m$ 个特征值和特征向量分别为

$$\mu_m \text{ 和 } \boldsymbol{\varphi}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{S}\Psi_m \\ \mu_m \mathbf{S}\Psi_m \\ \vdots \\ \mu_m^{j-1} \mathbf{S}\Psi_m \\ \vdots \\ \mu_m^{n-1} \mathbf{S}\Psi_m \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

■

结构动力系统与向量自回归系统的特征值间的关系总结如图 3.1。

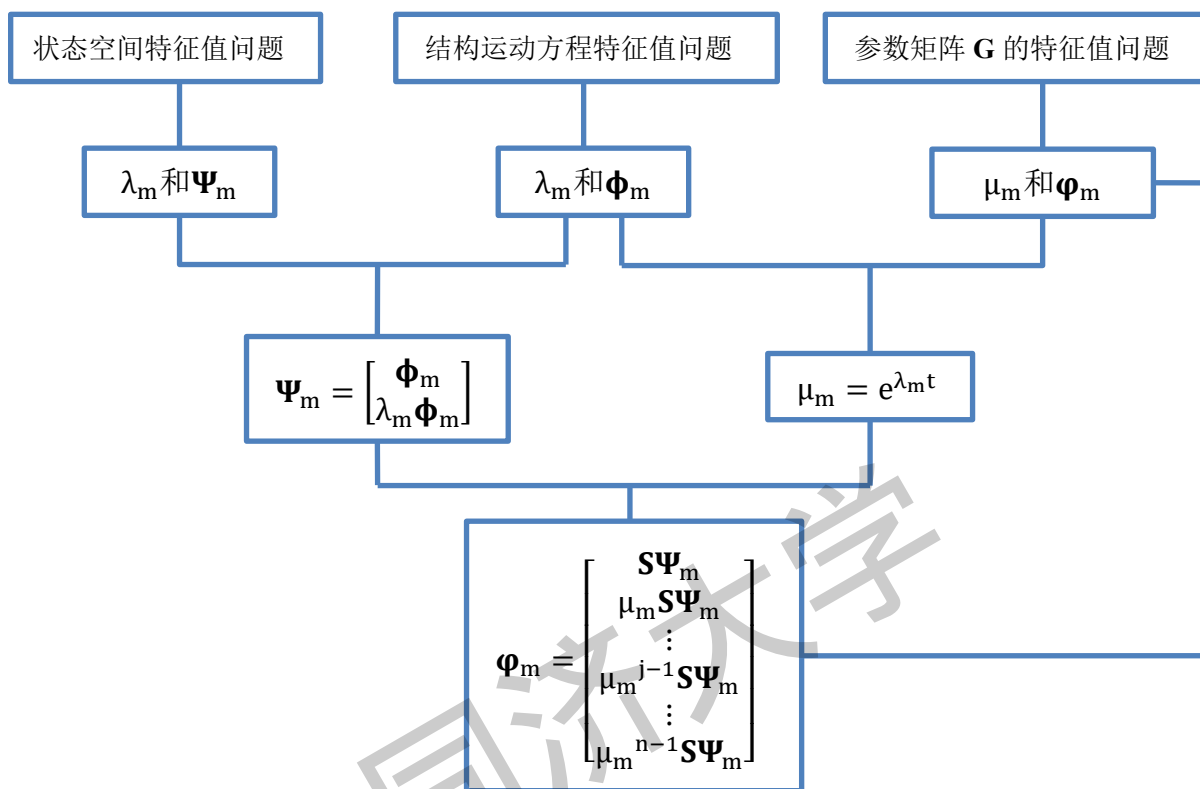


图 3.1 状态空间、结构运动方程和参数矩阵特征值问题间关系

根据 (3.7) (3.22) 和 (3.29) 可由 VAR 模型得到自振频率，阻尼比和振型。在实际情况中，从 VAR 模型提取模态参数的步骤如下：

- 1) 由 (2.70) 得到参数矩阵  $\{P_j\}$
- 2) 由参数矩阵  $\{P_j\}$  构建观测矩阵  $D$
- 3) 解  $D$  的特征值问题得到离散时间动力系统的特征值和特征向量  $\mu_m$  和  $\phi_m$
- 4) 由 (3.22) 可得连续时间动力系统的自振频率和阻尼

$$\lambda_m = \frac{\ln \mu_m}{\Delta t} \quad (3.30)$$

用采样时间步长  $\Delta t$  代替  $t$ 。由 (3.7) 可得系统的自振频率和阻尼比

$$\omega_m = |\lambda_m| = \sqrt{(\lambda_m^R)^2 + (\lambda_m^I)^2}, \xi_m = -\frac{\lambda_m^R}{|\lambda_m|} \quad (3.31)$$

$\lambda_m^R$  和  $\lambda_m^I$  分别为  $\lambda_m$  的实部和虚部。

- 5) 由 (3.14) 可知  $\Psi_m$  的上半部分为振型  $\phi_m$ 。如果测得了系统的前  $N_0$  个自由度， $\phi_m$  的前  $N_0$  部分构成  $\phi_m$ 。

### 3.2 求解最优模态参数的新型迭代算法

基于前文的推导, VAR 模型可表示为模态参数的函数, 当模态参数取最优值时, 这时 VAR 模型的预测结构响应为最优, 即预测响应与测量响应误差最小。以此为基础, 本节提出识别模态参数的新型迭代算法, 该算法直接以模态参数为变量, 通过系统地迭代更新模态参数, 每一组模态参数都可反算出一组 VAR 参数矩阵, 再通过 VAR 参数矩阵反算出预测响应, 然后可以算出这一组模态参数对应的响应误差, 通过不断更新模态参数使响应误差最小化, 最终得到最优模态参数。

功率谱密度 (Power Spectral Density, PSD) 用于提供迭代算法的模态参数初始值<sup>[56]</sup>。功率谱密度矩阵可由 (3.32) 得到,

$$\hat{\mathbf{S}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k,T} \hat{\mathbf{X}}_{k,T}^* \quad (3.32)$$

其中,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_{k,T} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \hat{\mathbf{X}}_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{N_T \Delta t}} \sum_{j=0}^{N_T} \hat{\mathbf{x}}_j \exp\left(-ik \frac{2\pi}{N_T \Delta t} j \Delta t\right) \Delta t \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{\Delta t}{N_T}} \sum_{j=0}^{N_T} \hat{\mathbf{x}}_j \exp\left(\frac{-i2\pi j k}{N_T}\right) \Delta t \\ \hat{\mathbf{X}}_k &= \sum_{j=0}^{N_T} \hat{\mathbf{x}}_j \exp\left(-ik \frac{2\pi}{N_T \Delta t} j \Delta t\right) \Delta t \end{aligned} \quad (3.34)$$

其中,  $\hat{\mathbf{X}}_k$  表示测量加速度  $\{\hat{\mathbf{x}}_j; j = 0, 1, \dots, N_T - 1\}$  在离散频率  $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$  的缩放离散傅里叶变换,  $T = N_T \Delta t$  为时长,  $\Delta t$  为采样时间步长。傅里叶变换对于平稳随机过程不存在, 而在环境激励下测量的结构响应是平稳随机过程, 因此需要乘一个缩放系数  $\frac{1}{\sqrt{T}}$ 。通过检查傅里叶变换的定义可以看出,  $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(t) \exp(-i\omega t) dt$ 。如果  $\mathbf{x}(t)$  是平稳的, 当积分上/下限为无穷大时, 积分值将是无穷大的, 即如果  $\mathbf{x}(t)$  是平稳的, 那么  $X(\omega) \rightarrow \infty$ 。由于  $\frac{1}{T}$  和信号的能量有关, 所以缩放系数为  $\frac{1}{\sqrt{T}}$ 。利用下标 T 表示已经给离散傅里叶变换  $\hat{\mathbf{X}}_k$  乘了缩放系数  $\frac{1}{\sqrt{T}}$ , 得到测量加速度在离散频率  $\omega_k$  的缩放离散傅里叶变换。

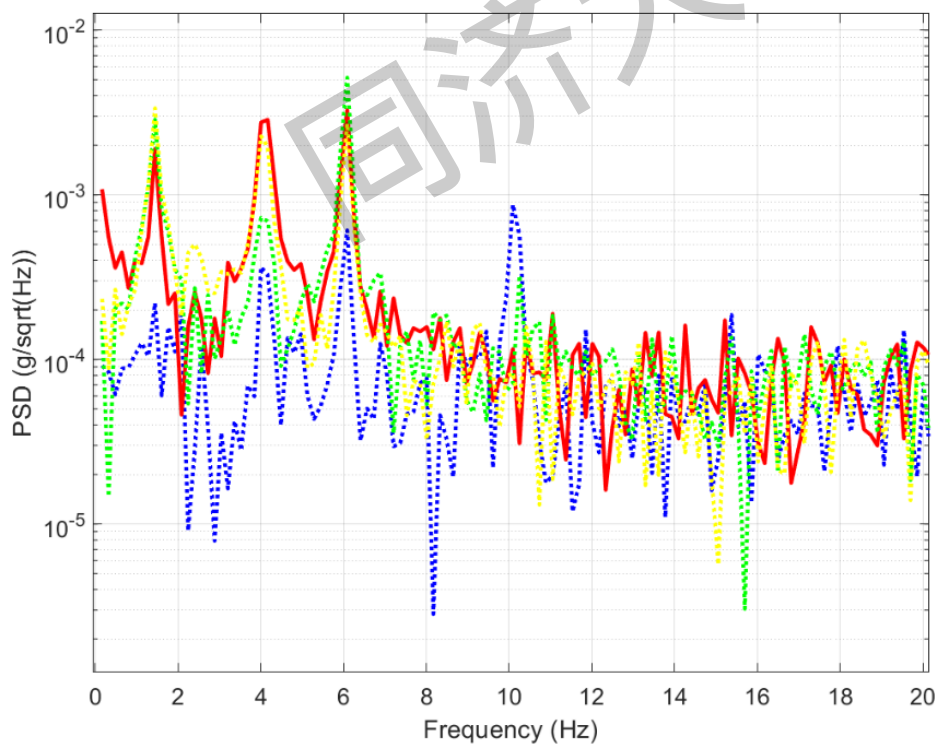
提取 PSD 对角线元素作为数据进行分析,

$$\hat{\mathbf{s}}_k = \text{diag}(\hat{\mathbf{S}}_k) = \text{diag}(\hat{\mathbf{X}}_{k,T} \hat{\mathbf{X}}_{k,T}^*) \quad (3.35)$$

其中，“diag”表示提取矩阵的对角线元素。PSD 矩阵  $\hat{\mathbf{S}}_k$  的对角线上的元素仅包含一个测量自由度的信息，称为自相关 PSD，非对角线元素包含两个不同的测量自由度的信息，称为互相关 PSD。

由 (3.35) 得到的自相关 PSD 包含了用于模态分析的数据中的原始信息，但它得到的频谱图不方便直接观察频率特性。为了减少自相关 PSD 的统计方差得到更好的视觉效果，采用平均的自相关 PSD，它是自相关 PSD 的渐进无偏和收敛的估计，可以更好的观察频率特性。

图 3.2 给出了一个缩比剪力结构的功率谱密度图，(a) 为没有经过平均的，(b) 为经过平均之后的，可以看出经过平均之后的功率谱密度图更加平缓，更易观察到峰值。



(a)

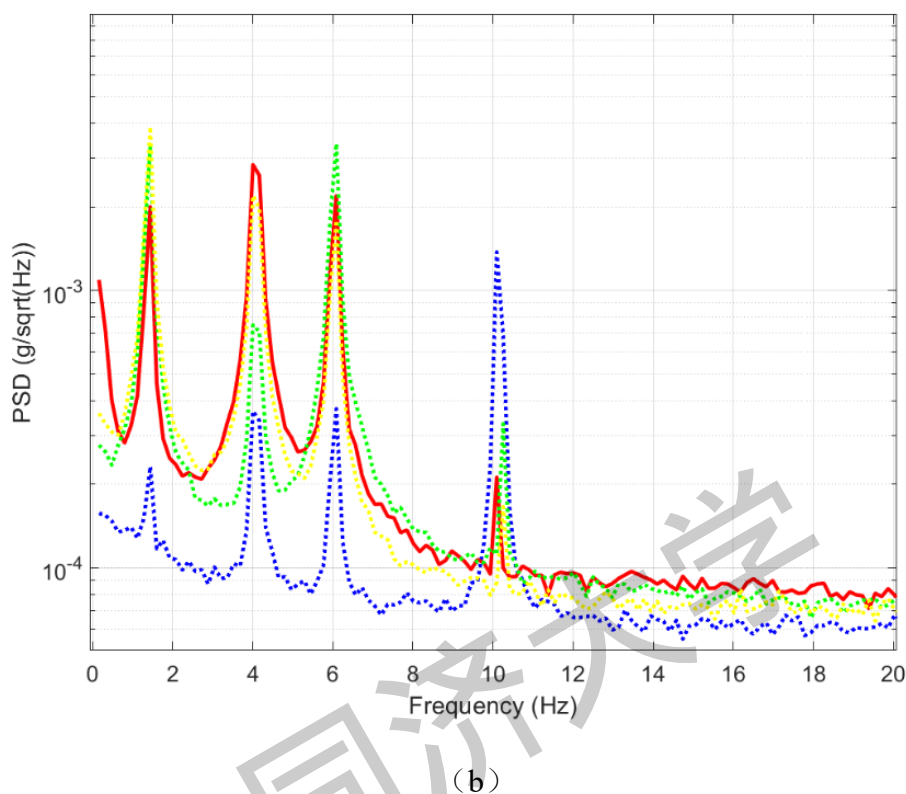


图 3.2 功率谱密度图 (a) (未平均) 功率谱密度图 (b) 平均功率谱密度图

计算平均 PSD, 通常将整体测量的加速度响应 $\{\hat{\mathbf{x}}_j: j = 0, 1, \dots, N_T - 1\}$ 分为  $L$  个长度相等且不重叠的部分, 每部分长为 $N_T/L$ (假定 $N_T/L$ 为整数), 记做 $\{\hat{\mathbf{x}}_j^l: j = 0, 1, \dots, N_T/L - 1; l = 1, 2, \dots, L\}$ , 角标  $l$  代表第  $l$  部分。由(3.35)知, 可由 (3.36) 计算得到每个部分的自相关 PSD。

$$\hat{\mathbf{s}}_k^l = \text{diag}(\hat{\mathbf{S}}_k^l) = \text{diag}(\hat{\mathbf{X}}_{k,T}^l \hat{\mathbf{X}}_{k,T}^{l*}) \quad (3.36)$$

其中,  $\hat{\mathbf{X}}_{k,T}^{l*}$  是 $\{\hat{\mathbf{x}}_j^l\}$  在频率 $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$  时的傅里叶变换, 平均自相关 PSD 可以由各部分的算术平均得到。

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \hat{\mathbf{s}}_k^l \quad (3.37)$$

接下来给出平均自相关 PSD 是自相关 PSD 的渐进无偏和收敛估计的证明。

**证明:**

自相关 PSD 的样本是独立同分布的, 均值 $E(\hat{\mathbf{s}}_k^l) = \bar{\mathbf{u}}_k$ , 协方差矩阵 $\text{Cov}(\hat{\mathbf{s}}_k^l) =$

$\mathbf{C}_k$ ，其中上标  $\bar{\cdot}$  表示均值。根据中心极限定理，当  $L$  趋近无穷时，随机变量  $\sqrt{L}\left(\frac{1}{L}\sum_{l=1}^L \hat{\mathbf{s}}_k^l - \bar{\mathbf{u}}_k\right)$  收敛于正态分布，即

$$\sqrt{L}(\hat{\mathbf{u}}_k - \bar{\mathbf{u}}_k) \sim N(0, \mathbf{C}_k) \quad (3.38)$$

其中， $N(0, \mathbf{C}_k)$  表示一个均值为 0，协方差矩阵为  $\mathbf{C}_k$  的正态分布。因此，由 (3.38) 有

$$\hat{\mathbf{u}}_k \sim N\left(\bar{\mathbf{u}}_k, \frac{\mathbf{C}_k}{L}\right) \quad (3.39)$$

由 (3.39) 可知， $\hat{\mathbf{u}}_k$  的均值为  $\bar{\mathbf{u}}_k$ ，和自相关 PSD 的均值相等，且样本  $\hat{\mathbf{u}}_k$  的方差为  $\frac{\mathbf{C}_k}{L}$ ，是  $\hat{\mathbf{s}}_k^l$  的方差  $\mathbf{C}_k$  的  $\frac{1}{L}$ ，因此平均自相关 PSD 是自相关 PSD 的渐进无偏和收敛估计。 ■

结构的加速度响应进行快速傅里叶变换并平均后得到平均的功率谱密度图，将（平均）功率谱密度函数进行奇异值分解，得到的奇异值谱图。奇异值谱图在结构固有频率处出现峰值，选取峰值，所对应的频率即为需要优化的频率的初始值，记为  $\{\hat{f}_m: m = 1, 2, \dots, N_d\}$ ；PSD 的最大奇异值对应的奇异向量为振型  $\{\hat{\Phi}_m: m = 1, 2, \dots, N_d\}$ ；阻尼比的初始值均设定为 0.01， $\{\hat{\xi}_m = 0.01, m = 1, 2, \dots, N_d\}$ 。

阻尼和频率不在同一数量级，若直接进行优化，需要花费较长的时间寻找最优解。因此，为节省程序运算时间，不直接优化不确定参数，而是给不确定参数分别乘一个系数，使阻尼和频率乘上系数后尽量在同一数量级或相差不大，在优化的过程中仅优化该系数。

优化多维参数的过程是一个多变量函数寻找最小值的过程，这个多变量函数称为目标函数。对于大型结构，振型往往为高维向量，若将振型作为不确定参数进行优化会降低优化的速度，所以本文将频率和阻尼比作为不确定参数进行优化，优化的振型可由优化后的频率在奇异值谱图对应得到。

首先由模态参数表达目标函数。

根据 (3.7) 可得连续时间的结构系统的特征值  $\lambda_m$ 。因为特征值以共轭复数对的形式出现，共轭复数对所对应的特征向量相同，所以对应的特征向量也将成对出现。 $N_d$  个自由度会产生  $2N_d$  个特征值和  $2N_d$  个特征向量，且特征值为共轭复数对。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_{m_1} &= [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_i \quad \dots \quad \lambda_{N_d}] \\ \lambda_i &= -\xi_i \omega_i - i \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N_d \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{m_2} = [\lambda_{N_d+1} \quad \dots \quad \lambda_j \quad \dots \quad \lambda_{2N_d}] \quad (3.41)$$

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_j + i \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}, \quad j = N_d + 1, N_d + 2, \dots, 2N_d$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_{m_1} \quad \boldsymbol{\lambda}_{m_2}] = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_m \quad \dots \quad \lambda_{2N_d}] \quad (3.42)$$

由 (3.15) 可得离散时间下的结构系统的特征值  $\mu_m$  可由 (3.43) 计算得到。

$$\mu_m = e^{\lambda_m t} \quad (3.43)$$

由 (3.44) 可知,

$$\boldsymbol{\Psi}_m = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}}_m \\ \lambda_m \hat{\boldsymbol{\phi}}_m \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

由 (3.29), (3.43) 和 (3.44) 可知, 第  $m$  阶特征值  $\mu_m$  对应的特征向量为  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_m$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\Psi}}_m \\ \mu_m \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\Psi}}_m \\ \vdots \\ \mu_m^{j-1} \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\Psi}}_m \\ \vdots \\ \mu_m^{n-1} \mathbf{S} \hat{\boldsymbol{\Psi}}_m \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

将特征向量  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_m$  按照和特征值  $\mu_m$  一一对应的按顺序写成一个矩阵的形式如 (3.46) 所示,

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}} = [\hat{\boldsymbol{\phi}}_1 \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_2 \quad \dots \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_m \quad \dots \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_{2N_d}] \quad (3.46)$$

为了使振型的比例一致, 需对  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_m$  进行规范化。通常规范化的方法有两种, 一种是采用欧几里得规范化, 使振型的模长为 1; 另一种是令振型某个元素为 1 后等比例放大或缩小。缩放仅会影响模态响应, 但不会影响物理响应, 本文采用后者, 令  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_m$  每一列的第一个元素为 1 进行缩放。

根据 (3.24) 可构建由结构系统的特征值  $\mu_m$  构成的对角矩阵  $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_{2N_d} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

由于已经求得由 VAR 参数  $\{\mathbf{P}_k: k = 1, 2, \dots, n\}$  和一系列单位矩阵构成的矩阵  $\mathbf{G}$  特征值和对应的特征向量, 将 (3.47) 代入 (3.28) 后即可求得参数矩阵  $\mathbf{G}$ 。

$$\mathbf{G} = \hat{\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{Y} \hat{\boldsymbol{\Phi}}^{-1} \quad (3.48)$$

由 (2.50) 可知, 提取参数矩阵  $\mathbf{G}$  的后  $N_0$  行即为由 VAR 参数  $\{\mathbf{P}_k: k = 1, 2, \dots, n\}$  构成的  $\mathbf{T}$  矩阵。

预测结构的响应如下,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{Z}} \quad (3.49)$$

观察 (3.49) 可知, 预测响应是模态参数的函数, 改变模态参数值可得到不

同预测响应。

计算响应与预测响应的差值即为预测响应的误差, 将对应时间点的误差相减可得到每个时间点的预测响应的误差。由 VAR 模型的数学形式可知, 第  $n+1$  个时间点处的响应可以表示为其之前  $n$  个时间点处的响应的线性组合的形式, 因此应从第  $n+1$  项的响应开始计算预测响应和测量响应间的误差, 每个自由度在各个时间点的误差计算如下,

$$e_{i,j} = y_{i,j} - \hat{y}_{i,j}, i = n + 1, n + 2, \dots, N_0, j = 1, 2, \dots, N_t \quad (3.50)$$

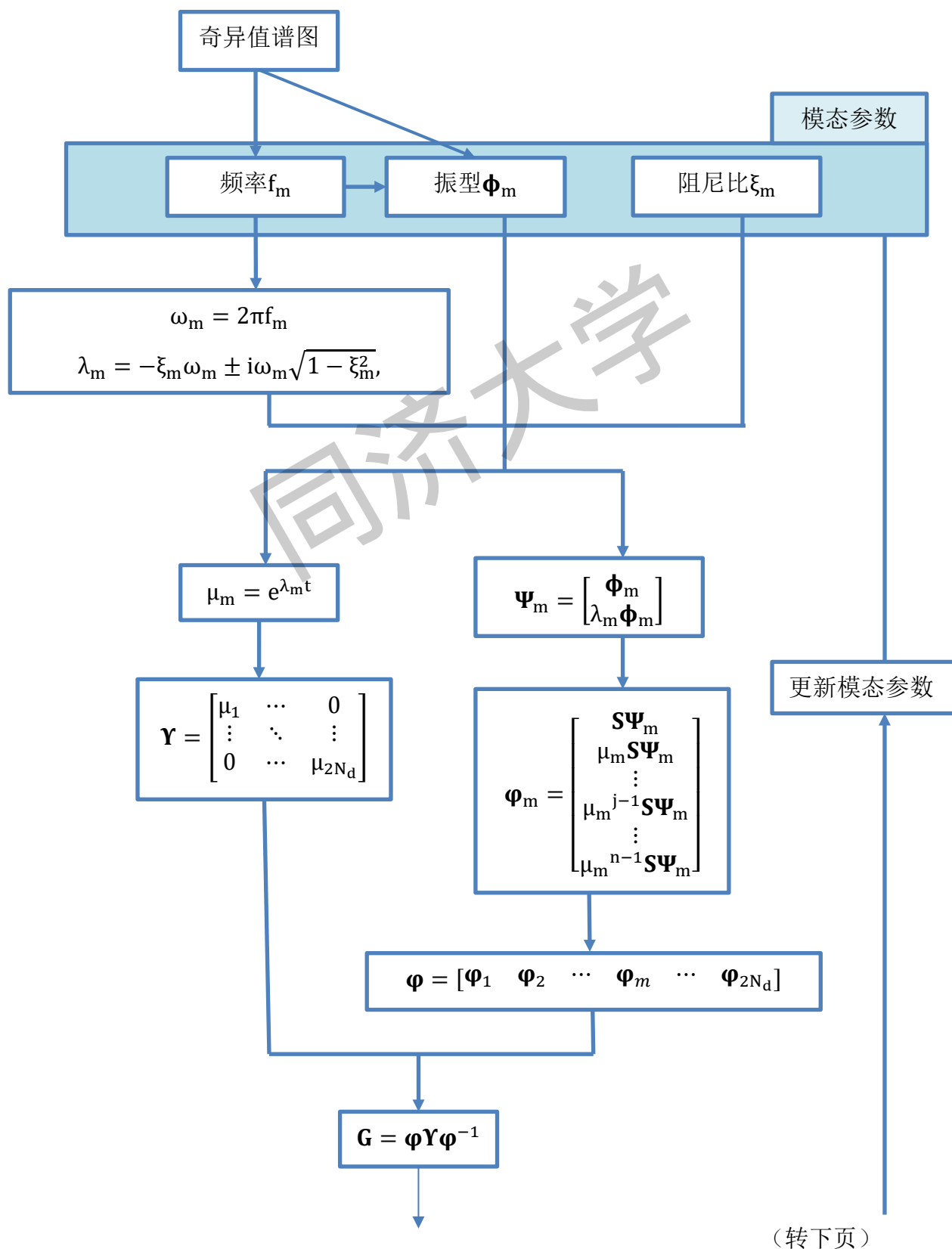
为了消除误差正负号的影响, 将误差平方后求和得到总误差, 即为目标函数。

$$e = \sum_{i=n+1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_t} (e_{i,j})^2 \quad (3.51)$$

有了目标函数后, 接下来使用 Nelder-Mead 单纯形 (N-M 单纯形) 算法<sup>[64]</sup>, 通过迭代模态参数使目标函数最小化。对  $n$  维向量, N-M 单纯形法生成一个  $(n+1)$  维的单纯形, 计算每个单纯形顶点处的函数值, 分析比较顶点的目标函数值, 然后构造新的顶点和单纯形, 再代入到目标函数中, 迭代计算, 直到找到最优解。由此可以得到优化后频率和阻尼比的系数, 将系数与对应的模态参数相乘即为优化后的模态参数。

优化流程总结如图 3.3 所示。





(接上页)

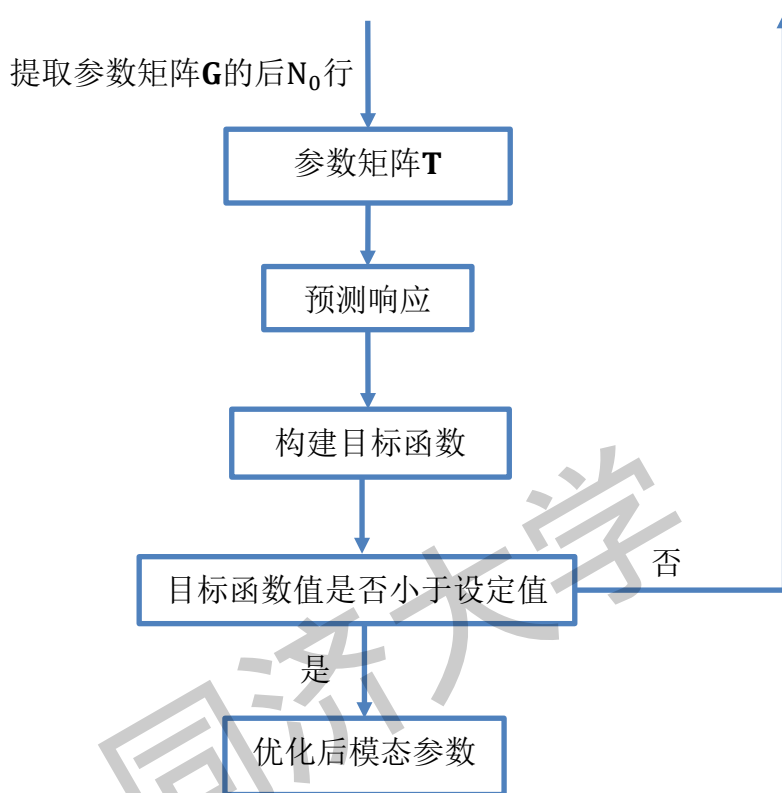


图 3.3 优化流程图

### 3.3 本章小结

本章基于结构动力系统与向量自回归模型等价性，研究了 VAR 模型特征值问题，建立了状态空间特征值问题、结构动力系统特征值问题和 VAR 模型特征值问题间关系。

本章提出识别模态参数的新型迭代算法，以模态参数为变量，反算出 VAR 参数矩阵，通过 VAR 参数矩阵进行预测响应，然后可以算出这一组模态参数对应的响应误差，通过不断更新模态参数使响应误差最小化，最终得到最优模态参数。

## 第 4 章 缩比剪力结构模态和动力响应分析

本章以一个缩比剪力结构为例进行模态分析，利用文章所提的算法，将模态参数视为不确定参数进行优化从而识别模态参数。利用优化后的模态参数预测结构的响应并和测量响应做对比，观察曲线拟合情况，验证所提方法的有效性。设置对比分析，改变振型的设置方法，研究优化结果，分析哪一种优化程序更加快速，响应拟合情况更好。

### 4.1 结构概况及动力测试



(a)

(b)



(c)

图 4.1 (a) 缩比剪力结构, (b) 传感器设置, (c) 激励装置<sup>[63]</sup>

用缩比四层剪力结构验证本文提出的方法, 如图 4.1 (a) 所示。该剪力结构由四个刚性钢板和四个矩形钢柱连接而成, 它们通过焊接固定在钢底板上。矩形钢柱的杨氏模量为 200 Gpa。只考虑沿弱轴方向的振动, 并且只确定了平移模式。

剪力结构的建筑模型的尺寸和材料特性总结如下:

表 4.1 剪力结构的模型尺寸和材料特性

楼层	1	2	3	4
层高 (m)	0.278	0.546	0.546	0.530
柱宽 (m)	0.025			
柱厚 (m)	0.005			
板长 (m)	0.45			
板宽 (m)	0.28			
板厚 (m)	0.025			
板质量 (kg)	26.64	27.17	27.14	26.07
钢的杨氏模量 (GPa)	200			

用四个加速度传感器测量结构的振动，传感器用蜡固定在每层楼的边缘中间位置。传感器 1 至 4 从下至上依次安装在 1 至 4 层。用一个大风扇来模拟环境振动，对剪力结构产生振动。实验以 2048 Hz 的采样频率测量了 10 分钟的数据。

## 4.2 系统识别及模态分析

将测量得到的数据降低采样频率进行重新采样，采样频率为 128 Hz。利用快速傅里叶变换，将时域的数据转化为频域的数据。四个测量的自由度的（平均）功率谱密度函数图一起绘制如图 4.2，不同的颜色对应于四个测量的自由度。将（平均）功率谱密度函数进行奇异值分解得到奇异值谱图（singular value spectrum, SV），如图 4.3 所示，箭头指出四个峰值，这四个峰值对应的频率为模态识别频率的初始值。由图可以看出，图中标出的峰值是一致的，表明它们是剪力结构的四个模态。

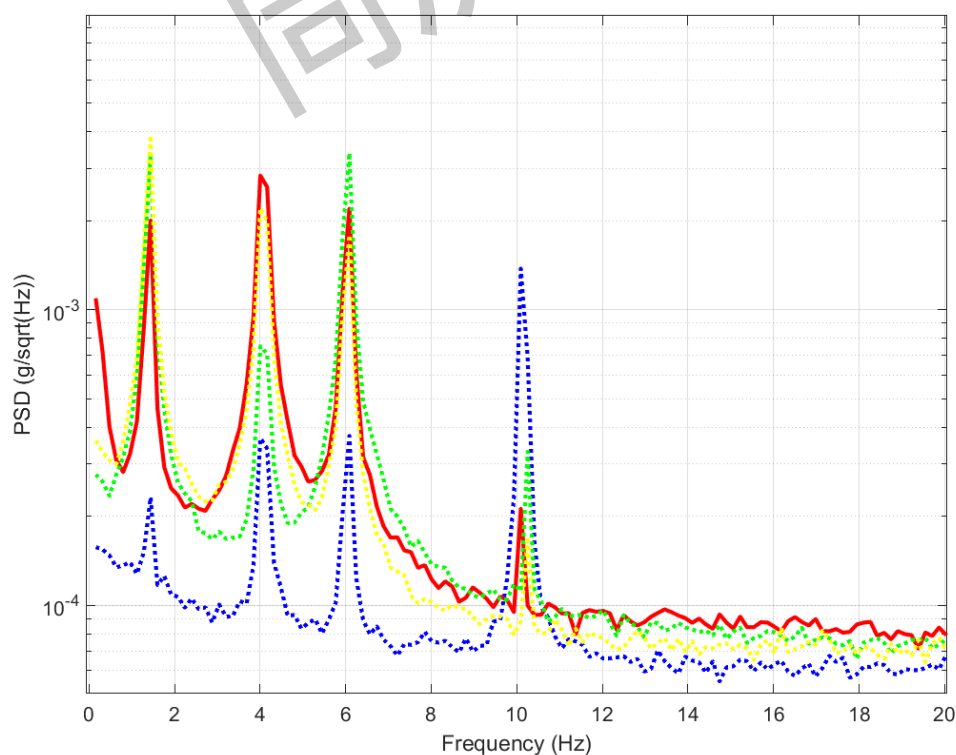


图 4.2 剪力结构功率谱密度函数图

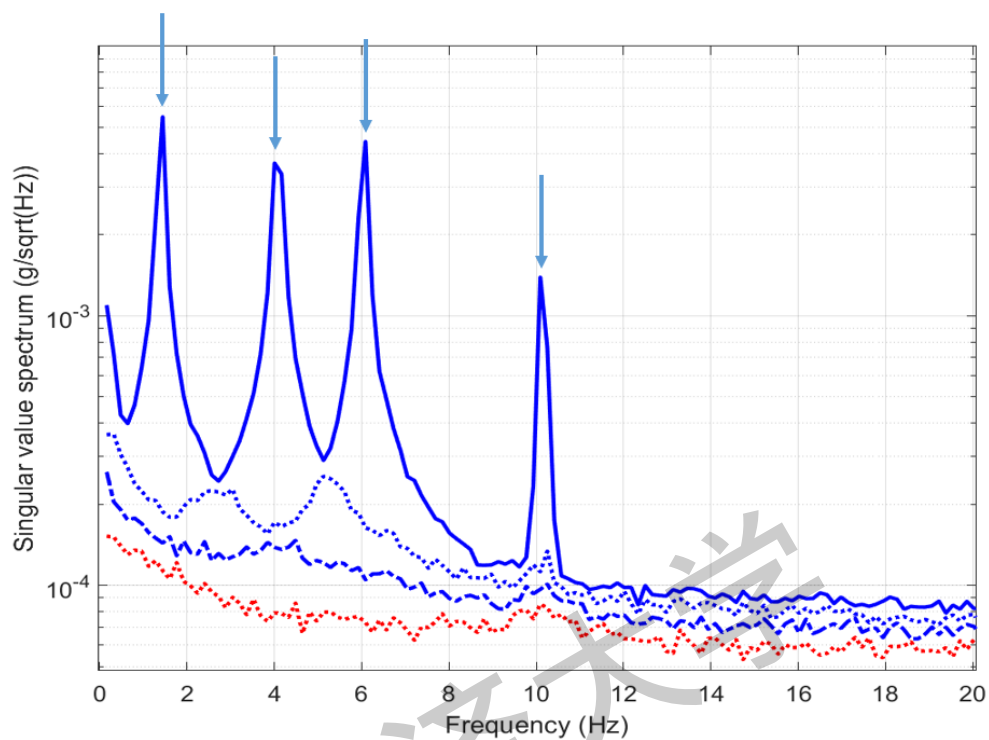


图 4.3 剪力结构奇异值谱图

阻尼的初始值均假定为 0.01，利用 MATLAB 进行优化后，得到最优的频率和阻尼比如下：

表 4.2 优化模态参数

模态	1	2	3	4
频率 (Hz)	1.393	3.958	6.091	10.033
阻尼比	0.0091	0.0072	0.0029	0.0064

从表 4.2 优化模态参数可以看出该剪力结构的阻尼比都小于 1%。

图 4.4 给出了识别的振型，图中带圆圈的红线代表了模态的形状，带方块的蓝线代表了未变形的形状。

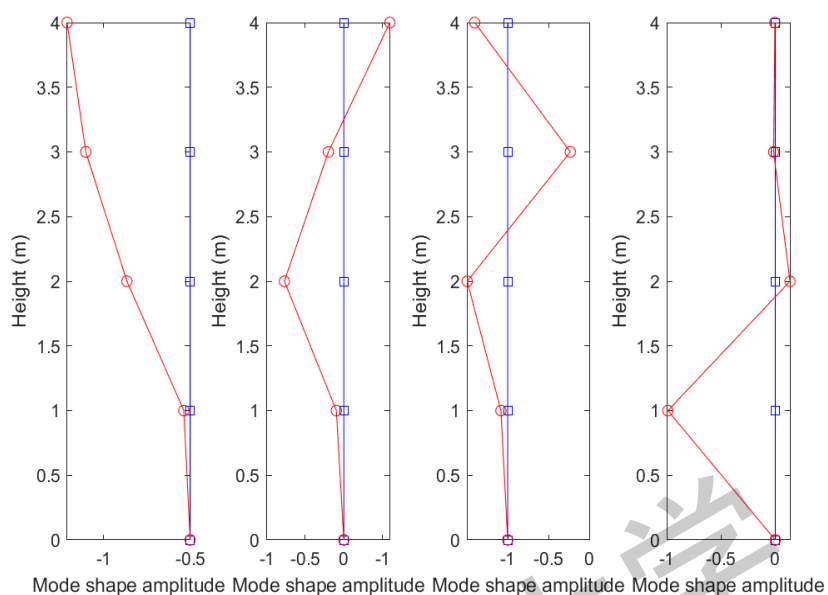
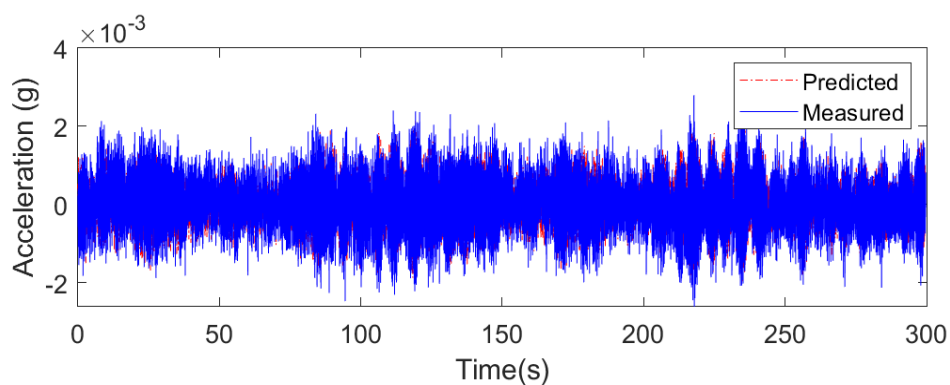


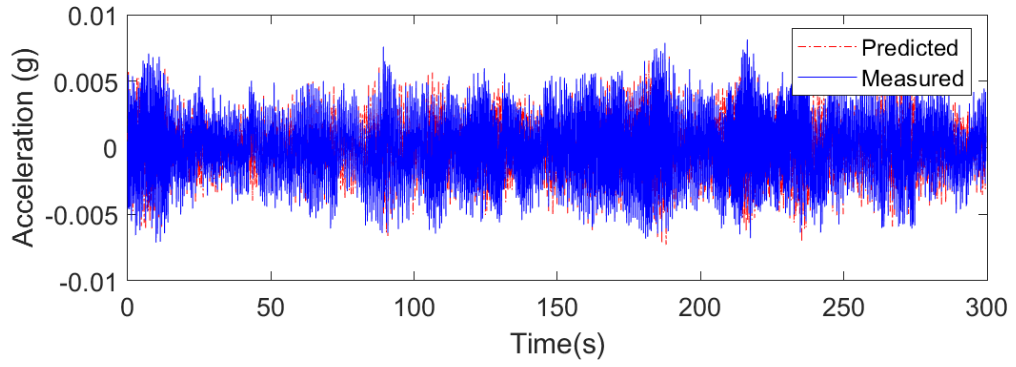
图 4.4 振型

由图 4.4 可看出，剪力结构的振型呈正弦状，从最低阶的模态到最高阶模态的波数不断增加。

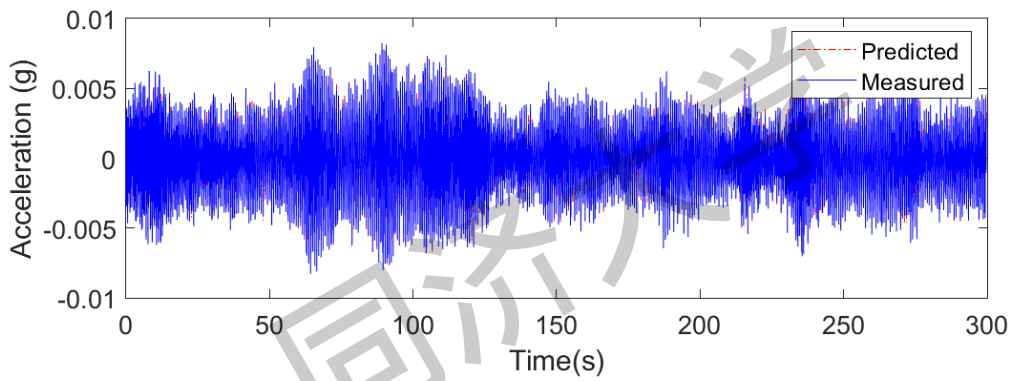
为了检验本文提出方法的准确性，将测量响应和优化后的预测响应对比如图 4.5，其中蓝色实线为测量响应，红色虚线为预测响应。为了方便观察响应的拟合情况，图 4.6 节选出第 28 秒至第 33 秒的详细视图，可以看出在没有激励信息的情况下预测响应和测量响应拟合良好。



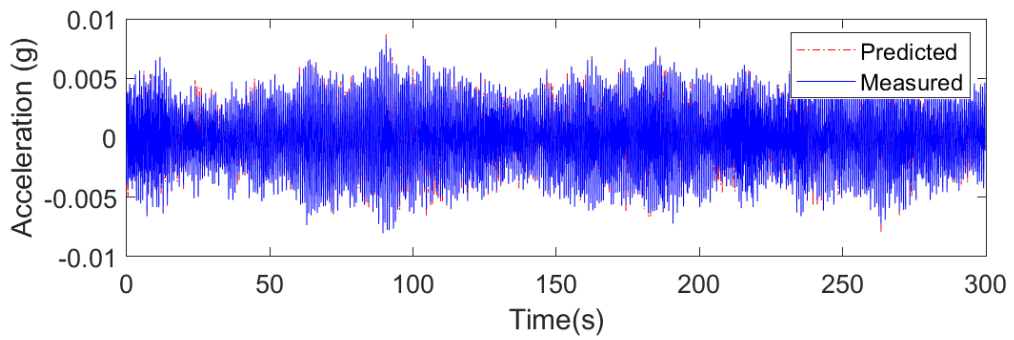
(a)



(b)



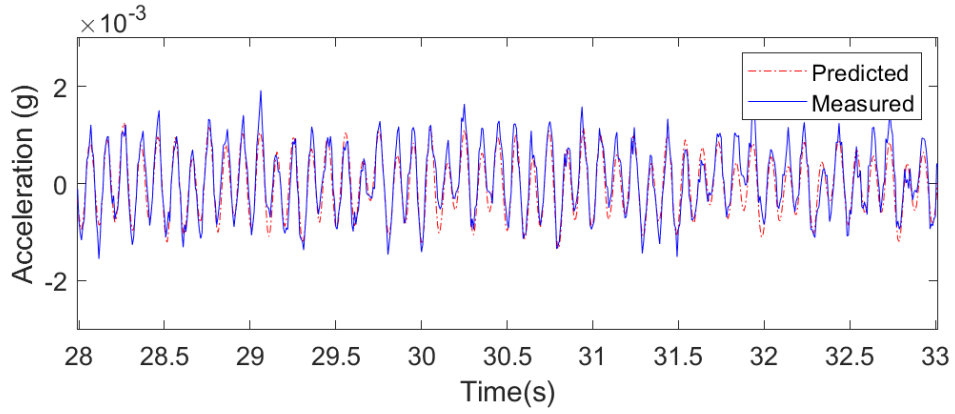
(c)



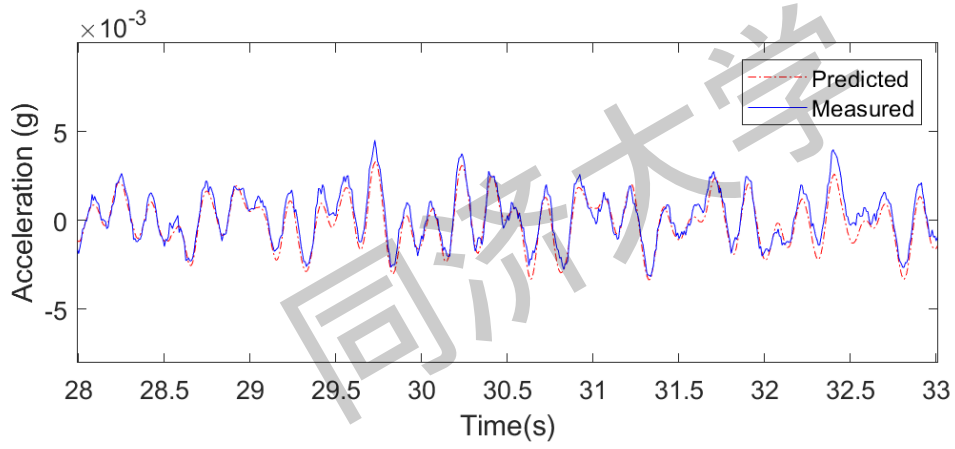
(d)

图 4.5 预测响应和实测响应对比 (a) 第一层 (b) 第二层 (c) 第三层 (d) 第四层

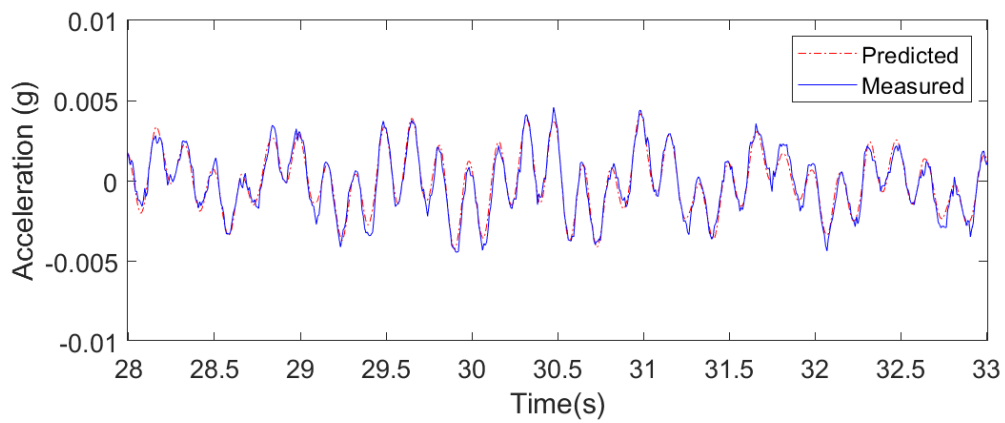




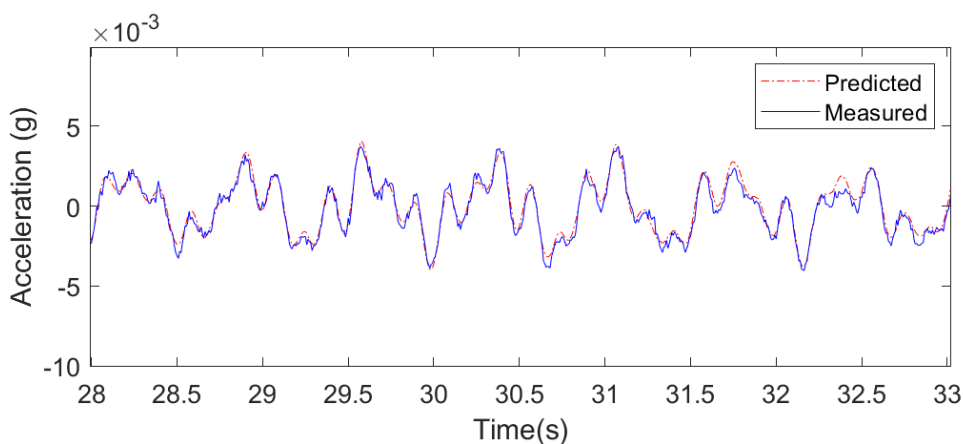
(a)



(b)



(c)



(d)

图 4.6 预测响应和实测响应对比详细视图 (a) 第一层 (b) 第二层 (c) 第三层 (d) 第四层

### 4.3 所提方法的优越性分析

4.2 小节对缩比剪力结构进行的模态识别，在优化过程中选取的频率初始值为奇异值谱图峰值所对应奇异值，振型初始值为所选频率对应的奇异向量，阻尼比初始值设定为 0.01。在更新模态参数的过程中，没有直接将振型作为优化参数，而是研究了基于频率在频域范围内的数学结构，每个更新的频率都可以根据奇异值分解得到相对应的中间过程振型。经过优化后得到的模态参数值均合理，利用优化后的模态参数预测结构的响应，得到的预测响应和测量响应曲线拟合良好。

为了研究所提方法的优越性，采用传统方法，将振型用作优化变量，用相同的优化程序进行优化。本节和 4.2 节相同的采用奇异值谱图峰值所对应的奇异值为频率初始值，阻尼比设定为 0.01，但振型的初始值采用一组随机生成的向量，更新模态参数的过程中，阻尼比，频率和振型均利用 N-M 单纯形法进行更新。

由于将振型直接用作了优化变量，优化变量变得更高维，当程序达到最大迭代次数仍无法收敛，自动退出迭代程序，得出了不合理的优化结果。得到的优化频率和阻尼比如表 4.3，振型如图 4.7，频率出现负数，振型也显然不合理。

表 4.3 传统方法模态参数

模态	1	2	3	4
频率 (Hz)	-0.5913	1.8077	5.8366	5.4489
阻尼比	-0.0207	-0.0334	0.0113	0.0370

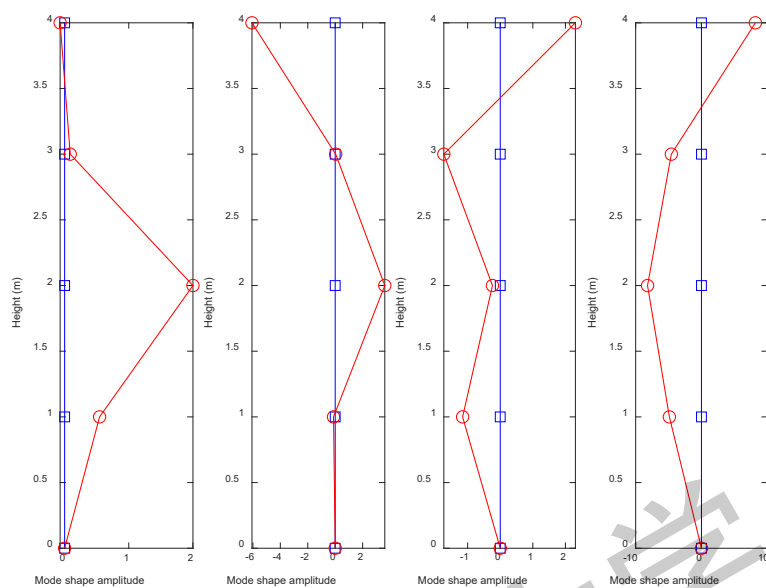
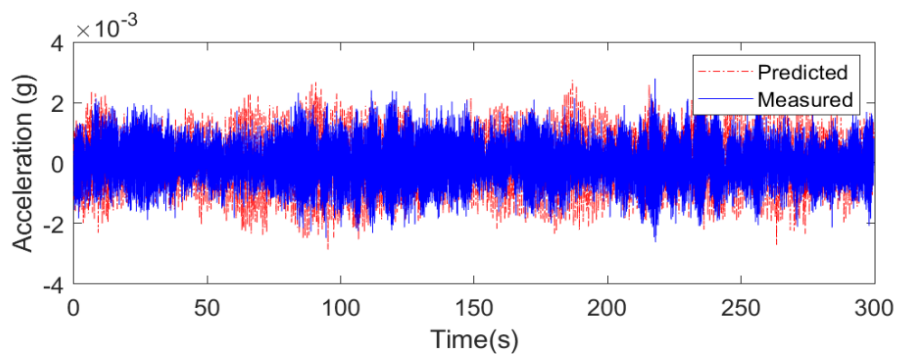
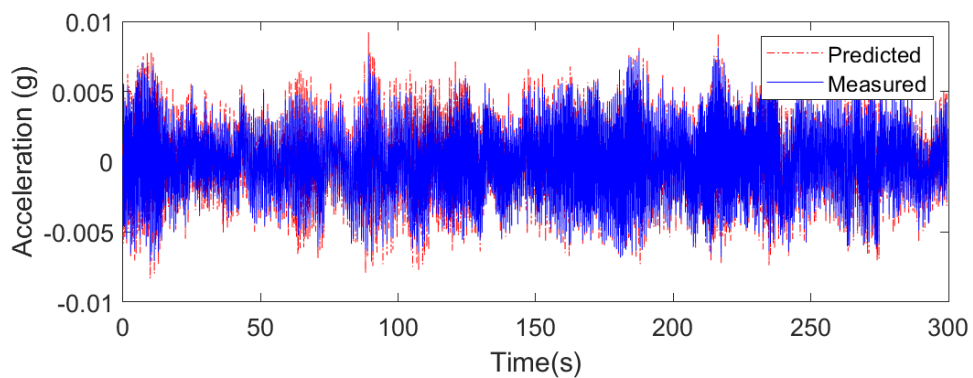


图 4.7 振型

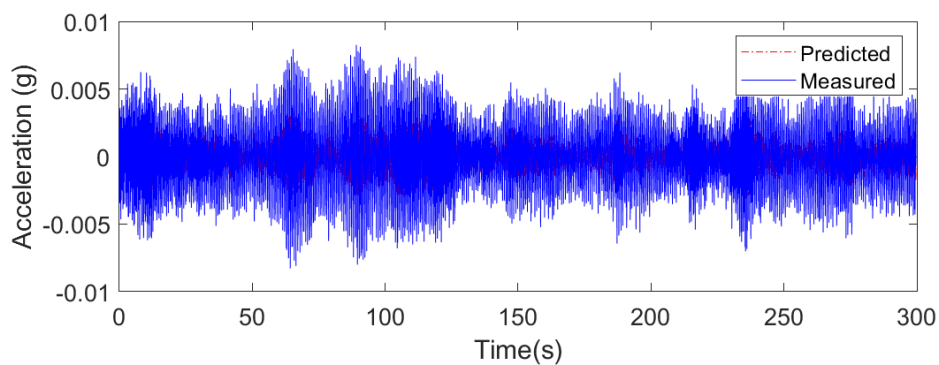
利用优化后的模态参数预测结构的响应，其中蓝色实线为测量响应，红色虚线为预测响应。为了方便观察响应的拟合情况，节选出第 28 秒至第 33 秒的详细视图，可以看出预测响应和测量响应曲线整体不好。



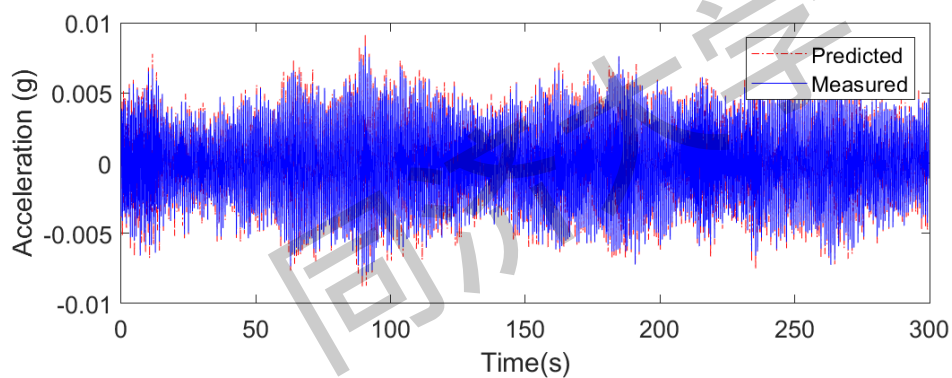
(a)



(b)

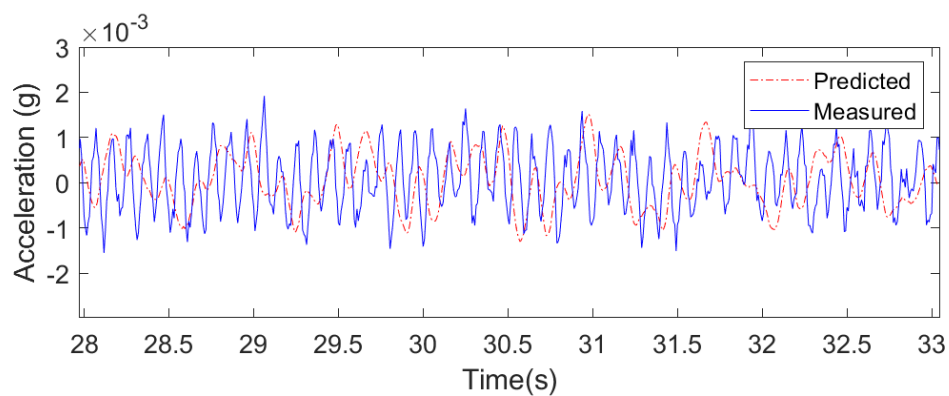


(c)

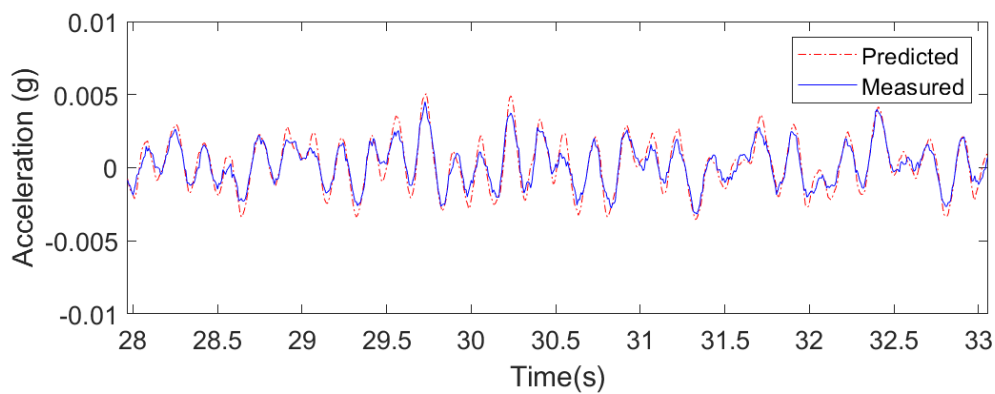


(d)

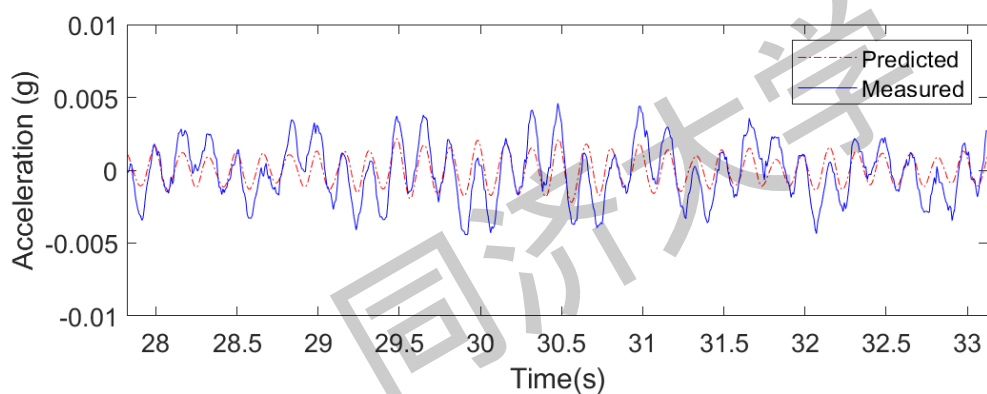
图 4.8 预测响应和实测响应对比 (a) 第一层 (b) 第二层 (c) 第三层 (d) 第四层



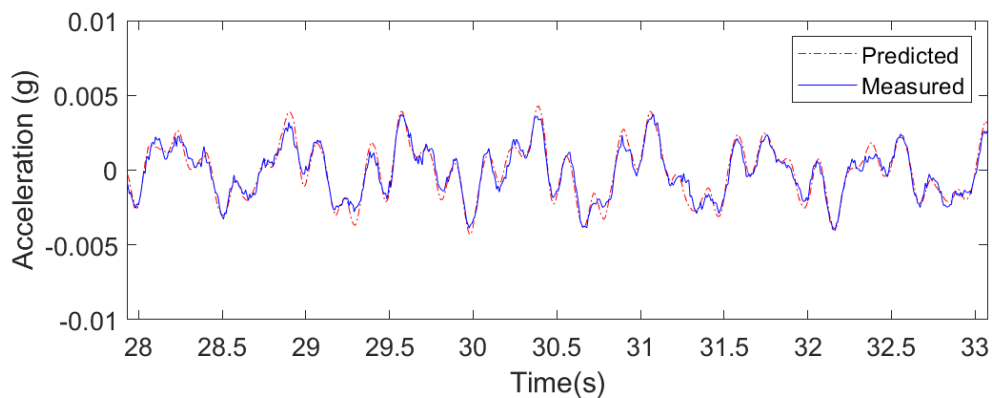
(a)



(b)



(c)



(d)

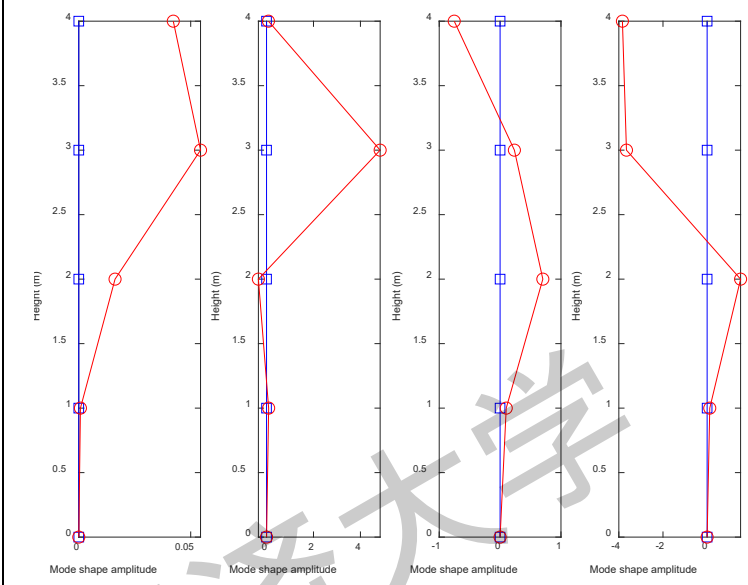
图 4.9 预测响应和实测响应对比详细视图 (a) 第一层 (b) 第二层 (c) 第三层 (d) 第四层

除此之外，随机生成三组振型向量进行优化，利用传统优化方法进行优化，得到了三组不同的优化结果如表 4.4。由表格可以看出，频率没有由小到大排列

且出现了负数值，阻尼比出现了负数值，振型也不合理。

表 4.4 传统 N-M 单纯形法模态参数

模态		1	2	3	4
第一组	频率 (Hz)	2.0030	-0.4748	5.0397	1.7919
	阻尼比	0.0372	0.0149	0.0841	-0.0110
	振型				
第二组	频率 (Hz)	-0.5913	1.8077	5.8366	5.4489
	阻尼比	-0.0207	-0.0334	0.0113	0.0370
	振型				

第三组	频率 (Hz)	-1.1728	7.8200	3.8213	48.3743
	阻尼比	-0.0359	0.0279	0.0241	0.0171
	振型				

#### 4.4 本章小结

本章对一个环境激励下的缩比剪力结构进行模态分析,利用新型迭代算法求得该结构的最优模态参数。得到的优化频率依次为 1.393Hz, 3.958 Hz, 6.091 Hz 和 10.033 Hz, 优化阻尼比结果均小于 0.01.优化后的振型都呈正弦状,并且随着模态阶数的升高波数增加。利用优化后的模态参数预测结构的响应,从预测响应和测量响应的对比图上可以看出,在没有激励信息,仅有结构的加速度响应数据的情况下,预测响应和测量响应拟合情况良好。

## 第 5 章 足尺人行桥动力特性和动力响应分析

本章对某一足尺人行桥进行动力特性分析，通过识别得到桥梁的模态参数，应用求解最优模态参数的新型迭代算法对模态参数进行优化，利用优化后的模态参数预测其响应并和测量响应进行对比，证明本文所提算法对足尺结构同样适用。

### 5.1 工程背景及环境振动测试

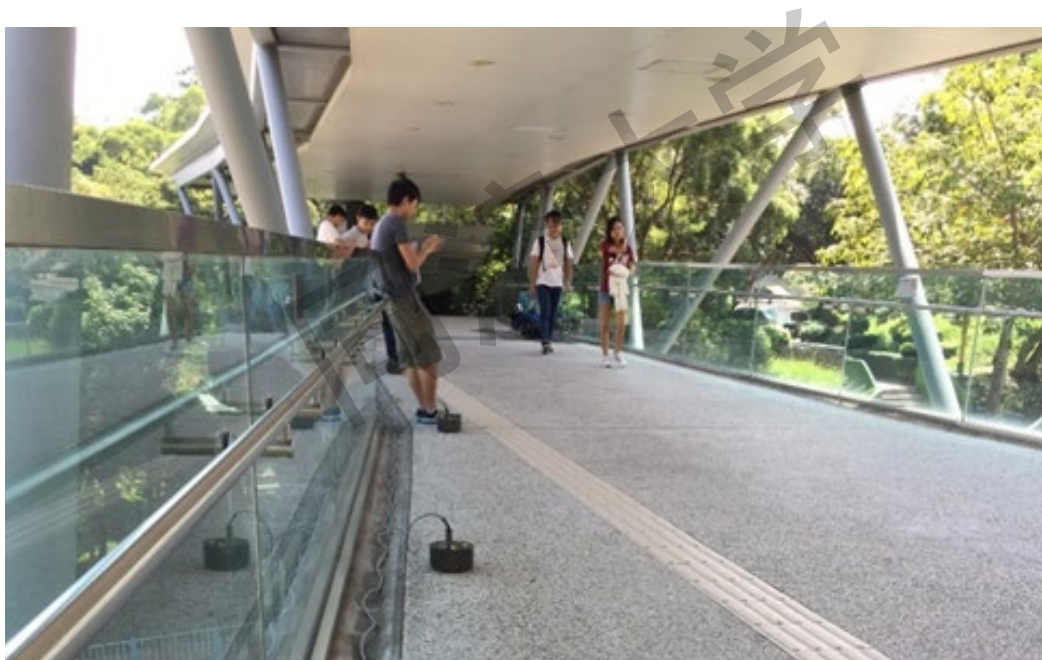


图 5.1 桥梁概况

以一个足尺人行桥为例子进行分析。该人行桥全长 32.8 米，最外侧宽 3.2 米，向内逐渐变窄到 16.3 米。设置十八个测点，对称布置在桥的两侧。传感器采用 Guralp 三向加速度传感器，通过电缆传输到模拟数字仪器 NI-9234 进行处理。由于传感器数量有限，所以使用 6 个加速度传感器，分四次测量，选取部分传感器作为参考，每次测量时都测量这部分的响应，最后在分析结构振型时采用最小二乘法将来自不同设置的部分振型组合在一起。

测点分布如下：



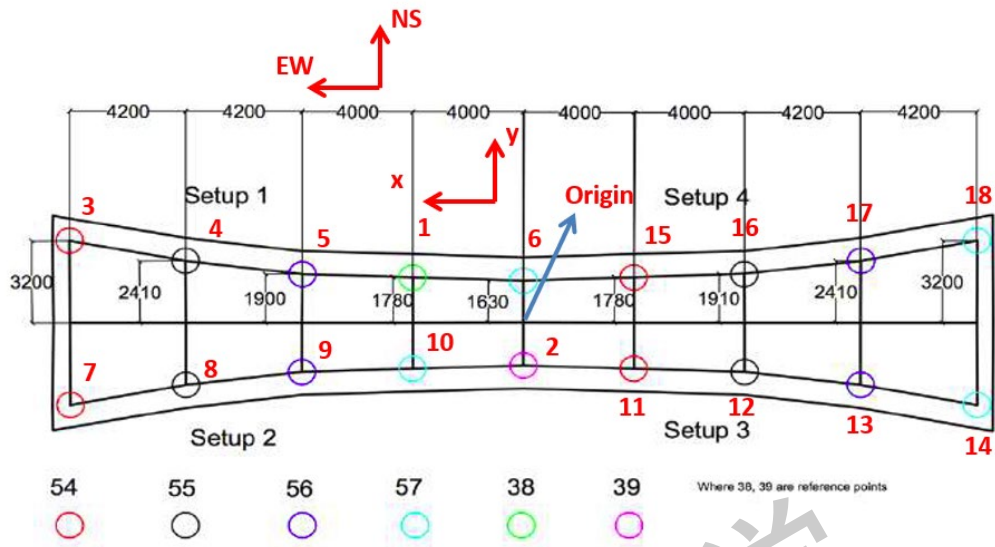


图 5.2 传感器分布

图中用六个不同颜色分别表示六个不同的三轴传感器：38 号传感器测量 1 号位置的响应，39 号传感器测量 2 号位置的响应，54 号传感器测量 3、7、11 和 15 四个位置的响应，55 号传感器测量 4、8、12 和 16 四个位置的响应，56 号传感器测量 5、9、13 和 17 四个位置的响应，57 号传感器测量 6、10、14 和 18 四个位置的响应。传感器有三个数据传输通道分别记录水平方向和竖直方向的响应。测量顺序及测点对应的传感器列表如下：

表 5.1 测点与传感器通道对应列表

传感器	频道	测量步骤 1	测量步骤 2	测量步骤 3	测量步骤 4
38	1	1(x)	1(x)	1(x)	1(x)
	2	1(y)	1(y)	1(y)	1(y)
	3	1(z)	1(z)	1(z)	1(z)
39	4	2(x)	2(x)	2(x)	2(x)
	5	2(y)	2(y)	2(y)	2(y)
	6	2(z)	2(z)	2(z)	2(z)
53	7	3(x)	7(x)	11(x)	15(x)
	8	3(y)	7(y)	11(y)	15(y)
	9	3(z)	7(z)	11(z)	15(z)

54	10	4(x)	8(x)	12(x)	16(x)
	11	4(y)	8(y)	12(y)	16(y)
	12	4(z)	8(z)	12(z)	16(z)
55	13	5(x)	9(x)	13(x)	17(x)
	14	5(y)	9(y)	13(y)	17(y)
	15	5(z)	9(z)	13(z)	17(z)
56	16	6(x)	10(x)	14(x)	18(x)
	17	6(y)	10(y)	14(y)	18(y)
	18	6(z)	10(z)	14(z)	18(z)

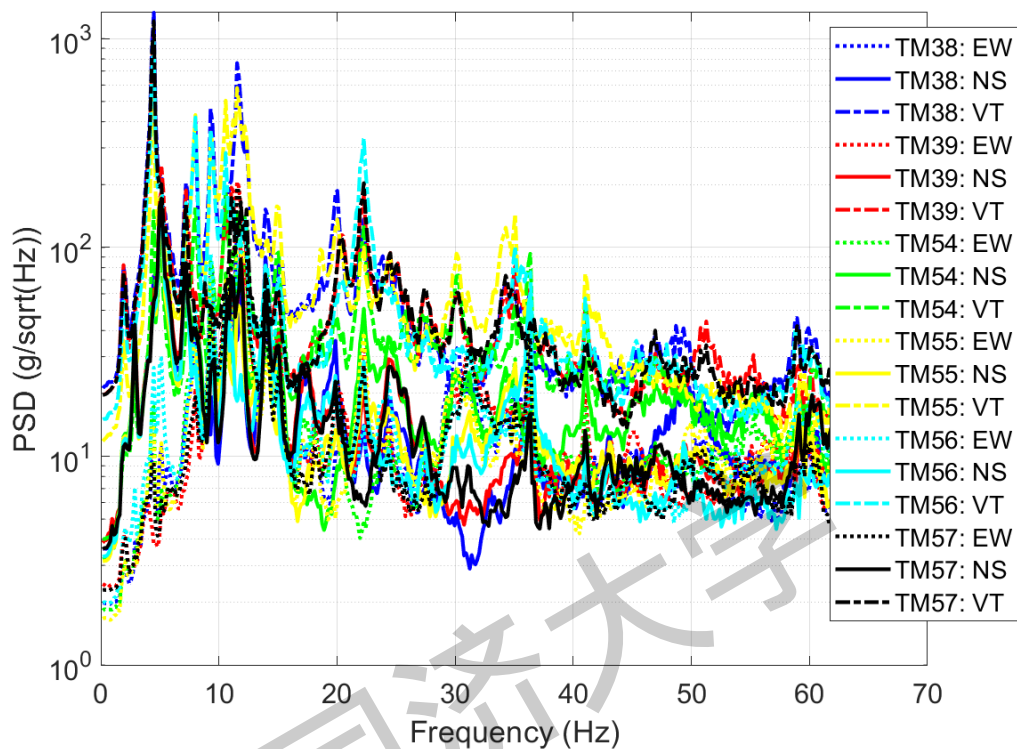
如果仅选取一个点作为参照，模态的振型精度会降低，因此本文选取两个参考点，选取 1 号位置和 2 号位置作为参照，四次测量中每次都要测这两点的响应。识别到振型后分别进行规范化，在理想状态下，1 号和 2 号测点的振型在不同测量步骤应是一样的，因此当这两个测点的振型在不同步骤间误差最小时，组合在一起的振型最接近实际情况。

## 5.2 桥梁动力系统识别及模态分析

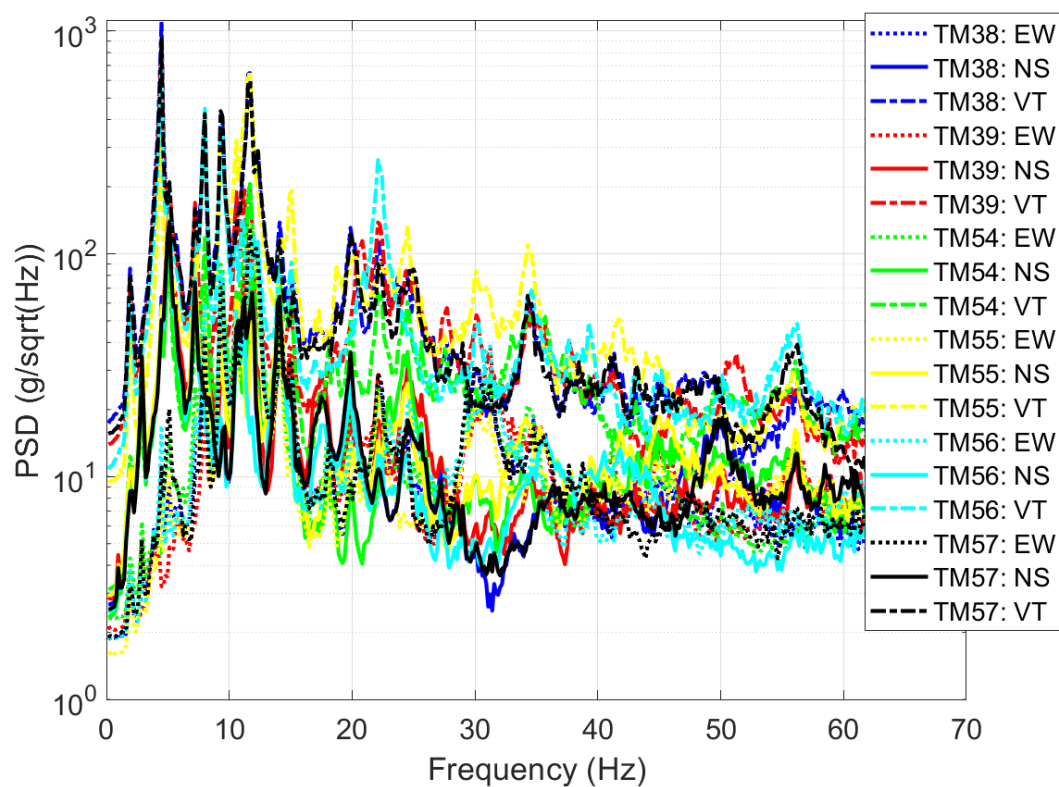
桥梁加速度响应的采样频率为 2048Hz，在分析时将原始数据降频到 128Hz，并仅使用前两分钟的数据进行分析。

VAR 模型的阶数根据贝叶斯模型的选择计算出合适的解，本例子选取阶数为 20，但该部分不属于本文的研究范围，因此不赘述计算的过程。

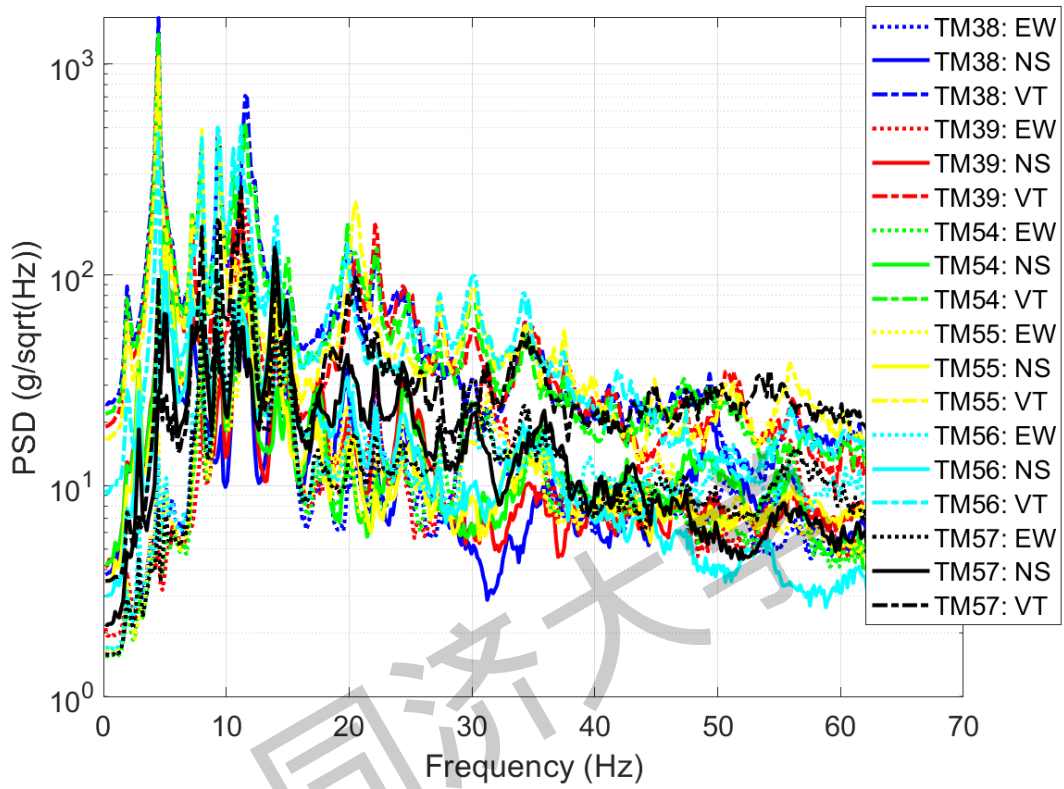
对功率谱密度进行分段平均，得出（平均）功率谱密度的频谱图如下：



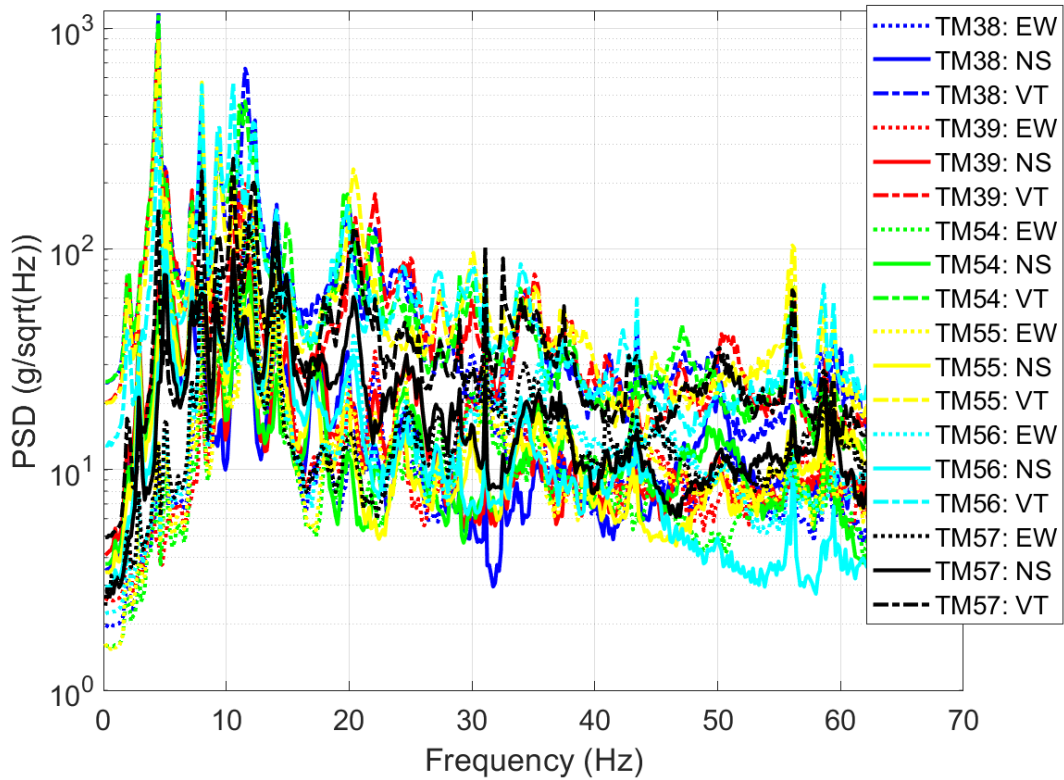
(a)



(b)



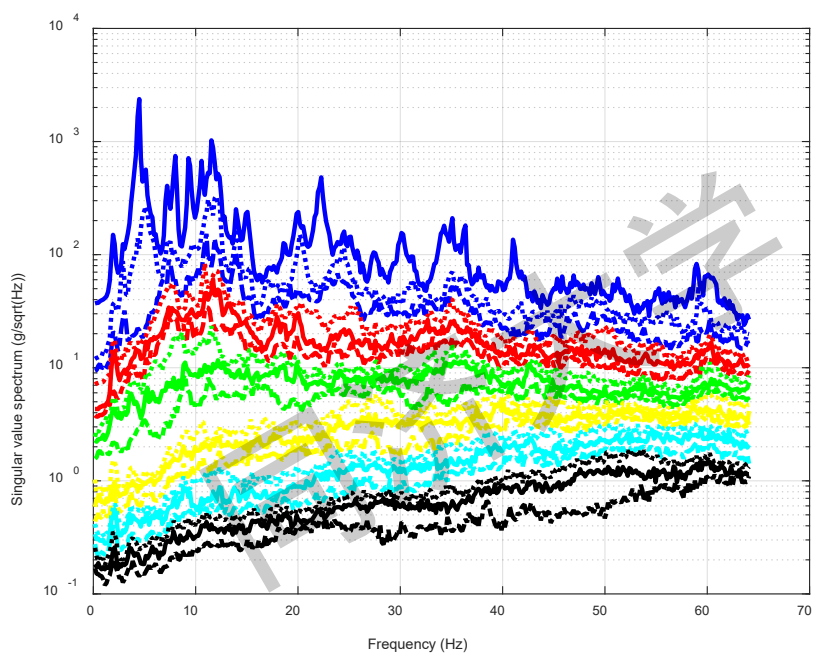
(c)



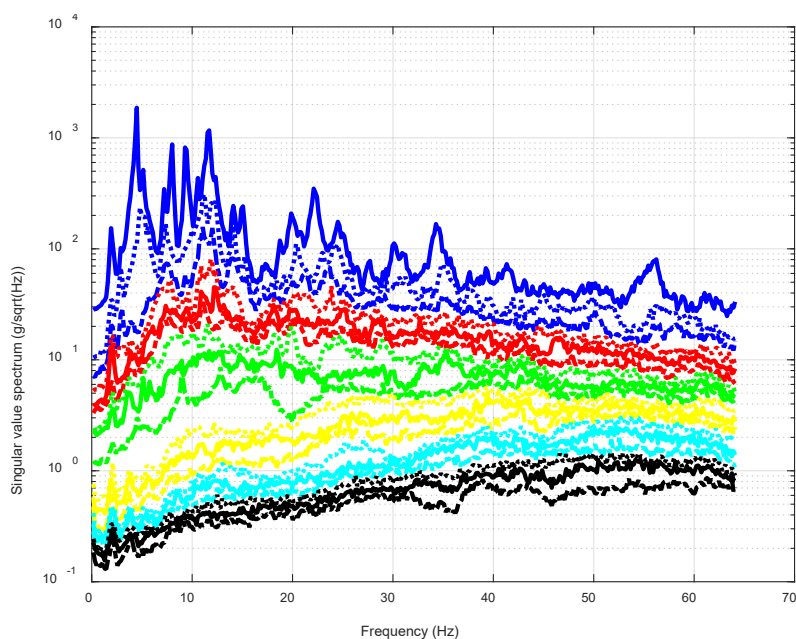
(d)

图 5.3 桥梁功率谱密度图 (a) 测量步骤 1 (b) 测量步骤 2 (c) 测量步骤 3 (d) 测量步骤 4

对 (平均) 功率谱图进行奇异值分解, 得到奇异值谱图如下:



(a)



(b)

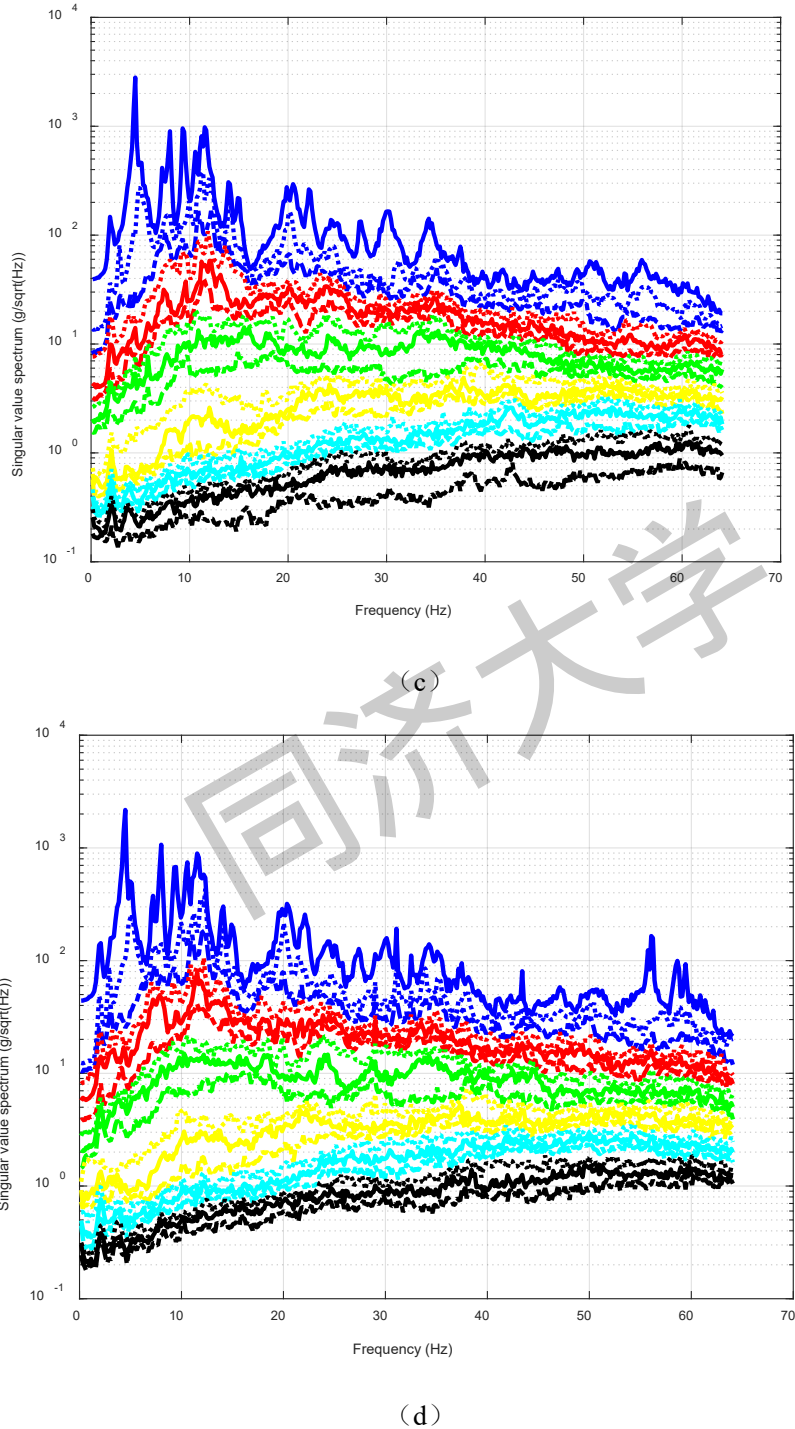


图 5.4 桥梁奇异值谱图 (a) 测量步骤 1 (b) 测量步骤 2 (c) 测量步骤 3 (d) 测量步骤 4

图 5.5 峰值选取示意图的峰值处为模态，根据时不变假设，四个测量步骤应在相同频率位置出现峰值，峰值所对应的频率即为该桥梁的频率初始值。可以根据贝叶斯模型类选择上严格理论确定对哪一些可能模态进行识别及确定模态的

个数，但这不是本文研究重点，这里不讨论。本例选取该结构 9 个主导模态进行识别，选取的 9 个峰值表示在图中如下：

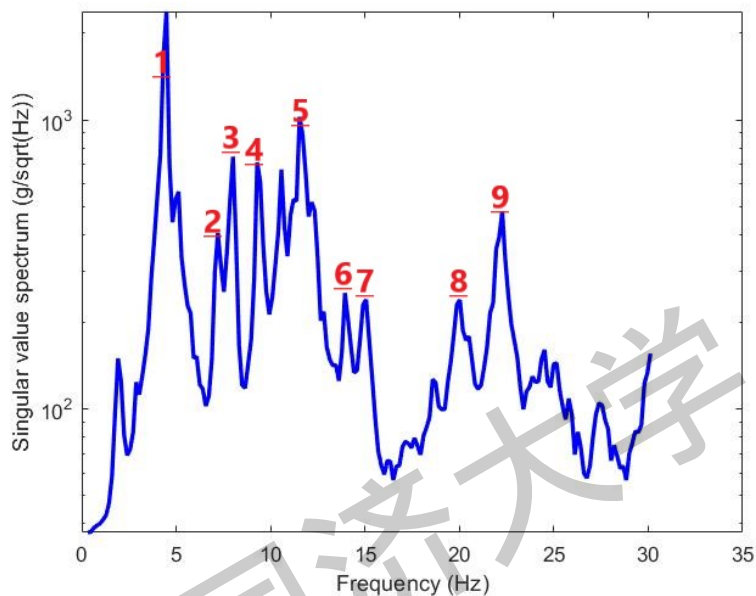


图 5.5 峰值选取示意图

虽然是分为四次测量，但是同一个结构，自振频率应该相同，因此需要在四个奇异值谱图中都达到峰值，在其他三个测量步骤中也选择这九个频率作为频率的初始值。

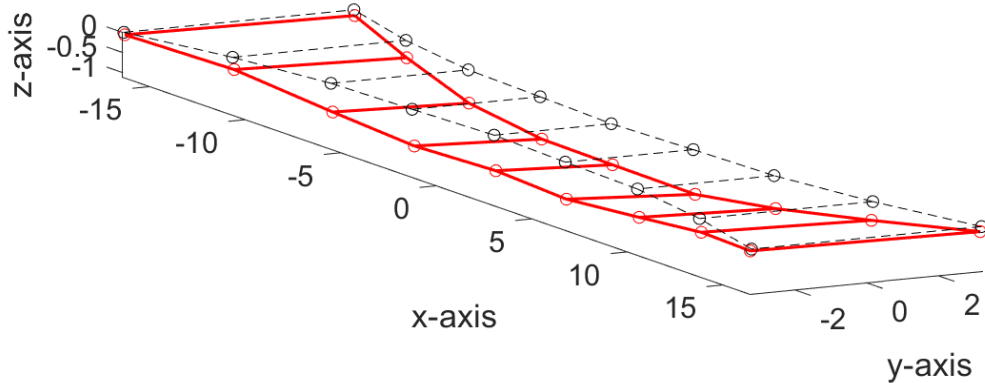
每个频率所对应的初始振型可以由该频率对应的特征向量得到。根据经验，阻尼的初始值均假定为 0.01。进行优化后，得到最优的频率和阻尼比如下：

表 5.2 优化后的参数

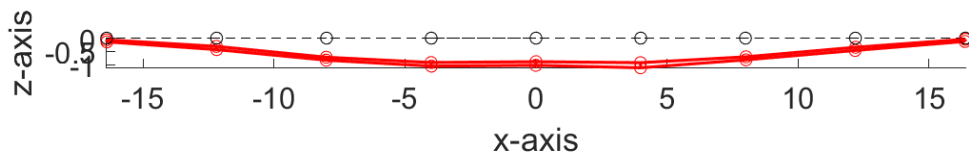
测量步骤	最优频率								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4.4475	7.3552	8.0901	9.7076	11.4543	14.3379	14.8189	19.4642	22.0782
2	4.3938	7.3338	7.8828	9.8523	11.6145	14.3379	15.1201	20.0348	22.0531
3	4.5007	7.6095	7.9362	10.1284	11.4450	14.1777	14.4981	20.6464	22.1409
4	4.4537	7.2891	7.9299	9.3717	11.3778	14.2130	14.6656	20.5857	21.8861
测量步骤	最优阻尼比								
1	0.0098	0.0099	0.0100	0.0102	0.0097	0.0101	0.0103	0.0101	0.0098
2	0.0100	0.0100	0.0100	0.0099	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100	0.0100
3	0.0093	0.0101	0.0103	0.0103	0.0108	0.0099	0.0103	0.0102	0.0099
4	0.0099	0.0098	0.0101	0.0100	0.0099	0.0103	0.0103	0.0097	0.0104

观察上面的表格，同一列为不同测量步骤的最优频率和最优阻尼。根据最小二乘法，将优化后的振型组装在一起。

由图 5.6~图 5.14 可以看出，第一阶振型为沿  $z$  轴方向的弯曲振型，形状呈正弦形状的半个周期；第二阶振型为扭转振型，桥梁沿  $x$ - $y$  平面内中轴线发生扭转，沿桥梁全长扭转方向不发生改变；第三阶振型沿  $z$  轴方向的弯曲振型，形状呈正弦函数的一个周期；第四阶振型沿  $z$  轴方向的弯曲振型，图形呈正弦函数图像的一个周期，和第三阶振型的形状关于平面  $z=0$  对称；第五阶振型为沿  $z$  轴方向的弯曲振型，伴随有微小的扭动，图形呈正弦状，约为两个周期；第六阶振型为扭转振型，约在平面  $x=-5$  的两侧发生不同方向的扭转，同时观察到桥梁在沿  $x$ - $y$  平面方向有水平弯曲变形；第七阶振型以扭转振型为主，在  $x=-10$  和  $x=5$  时，扭转方向发生变化，且在  $x > 5$  部分发生的扭转大于  $x < 5$  部分；第八阶振型在桥梁  $x < 0$  部分沿  $z$  轴方向的弯曲振型为主，伴随有微小的扭转，并且这一部分  $x$ - $z$  平面内位移大于  $x > 0$  部分，桥梁在  $x > 0$  部分振型以扭转为主，并大约在平面  $x=8$  两侧扭转方向发生改变；第九阶振型沿  $z$  轴方向的弯曲振型，呈正弦函数状，约为 2.5 个周期。

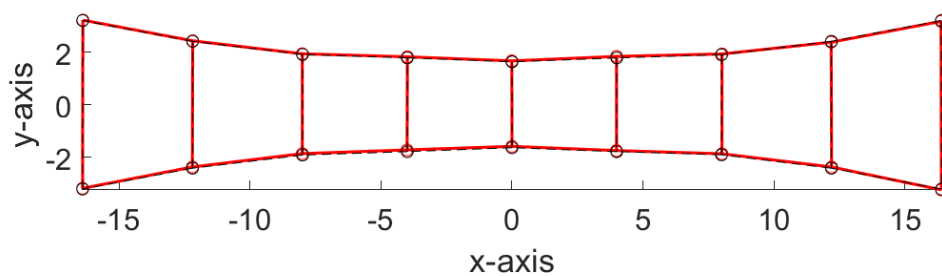


(a)



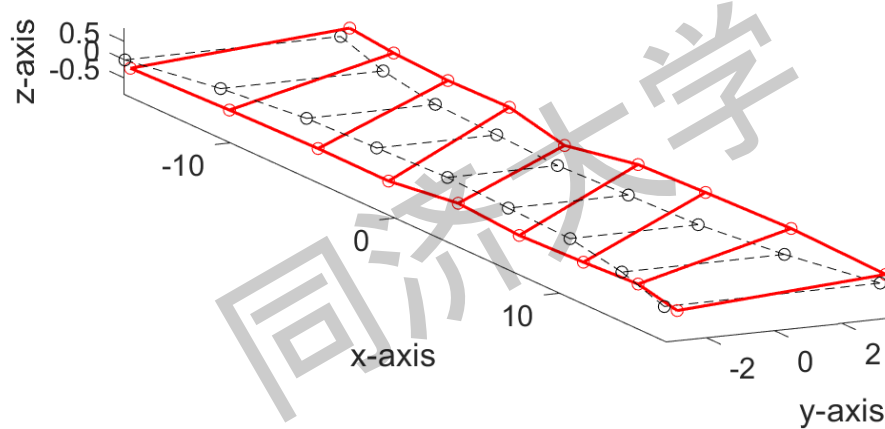
(b)



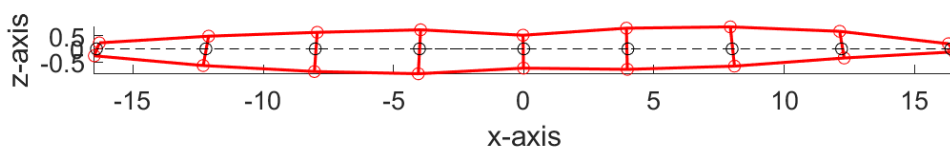


(c)

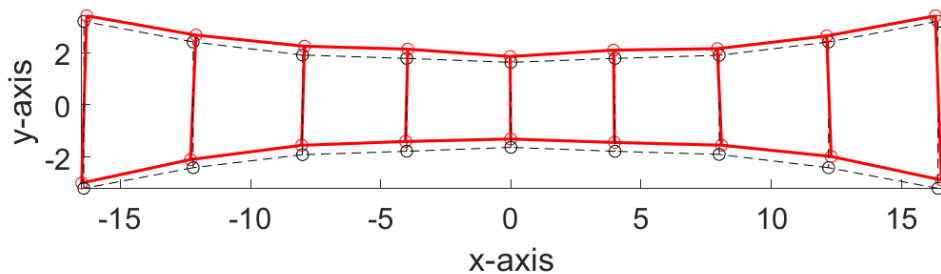
图 5.6 第一阶振型 (a) 三维视图 (b) x-z 平面视图 (c) x-y 平面视图



(a)

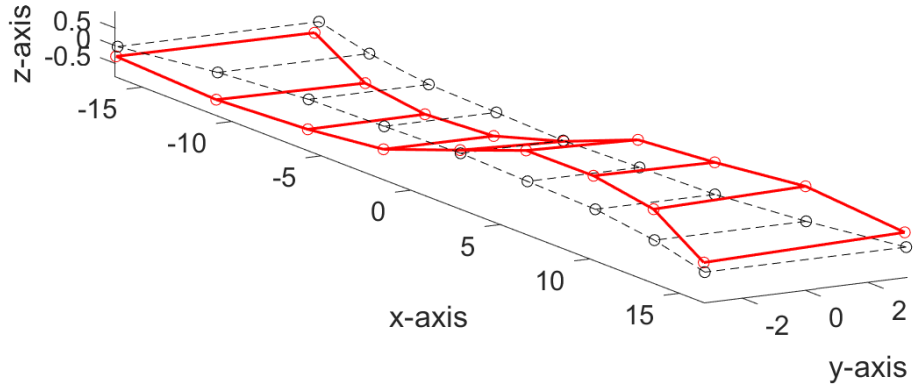


(b)

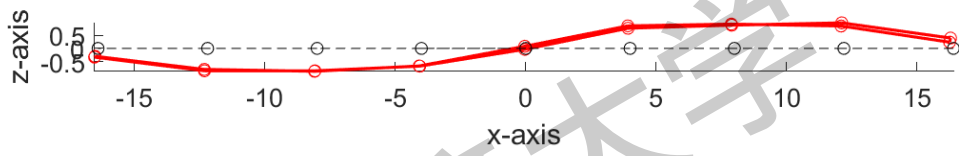


(c)

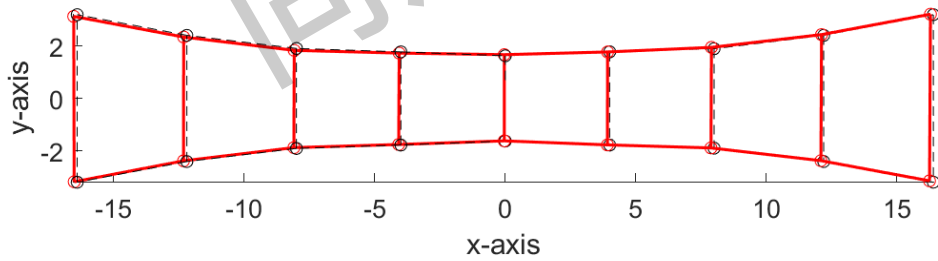
图 5.7 第二阶振型 (a) 三维视图 (b) x-z 平面视图 (c) x-y 平面视图



(a)

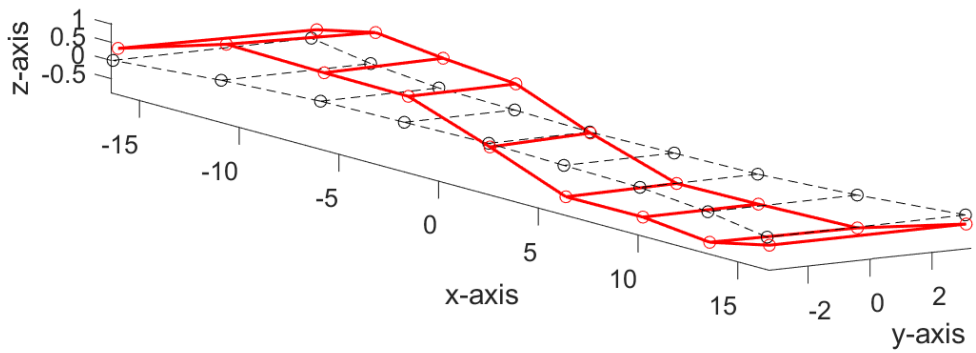


(b)

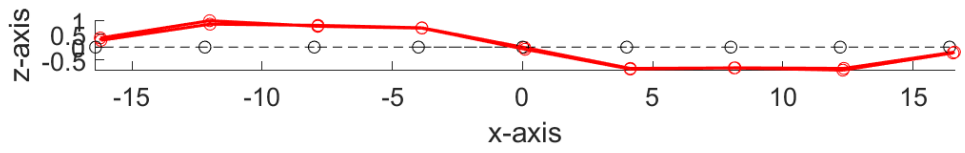


(c)

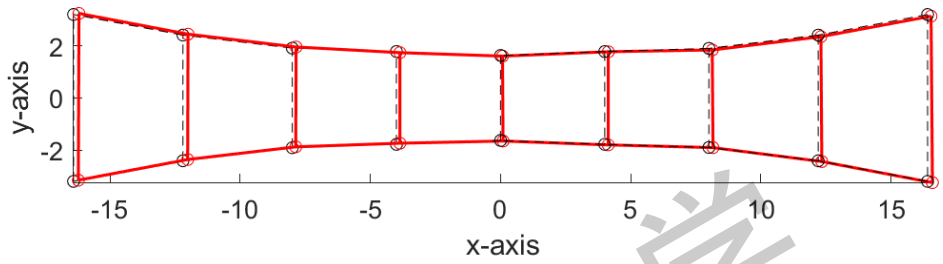
图 5.8 第三阶振型 (a) 三维视图 (b) x-z 平面视图 (c) x-y 平面视图



(a)

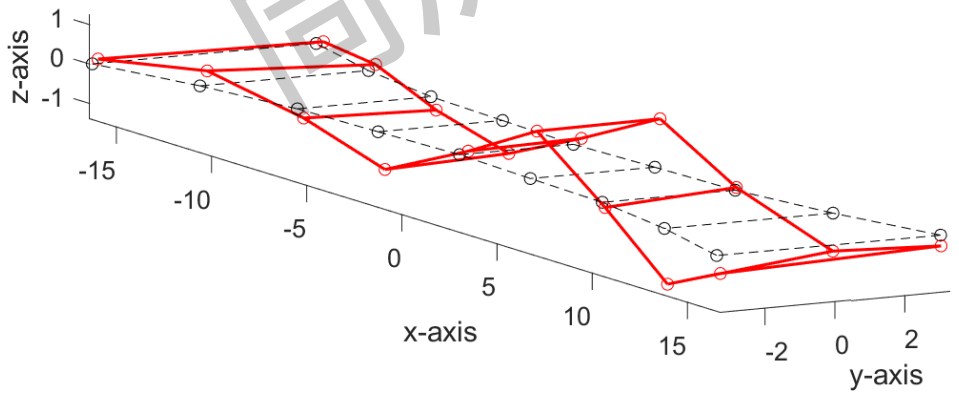


(b)

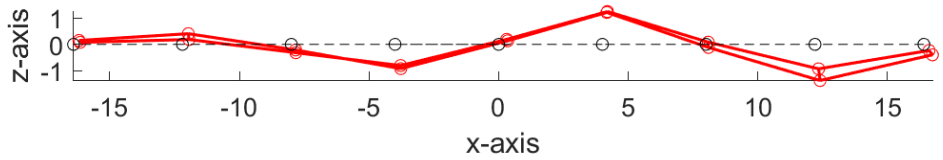


(c)

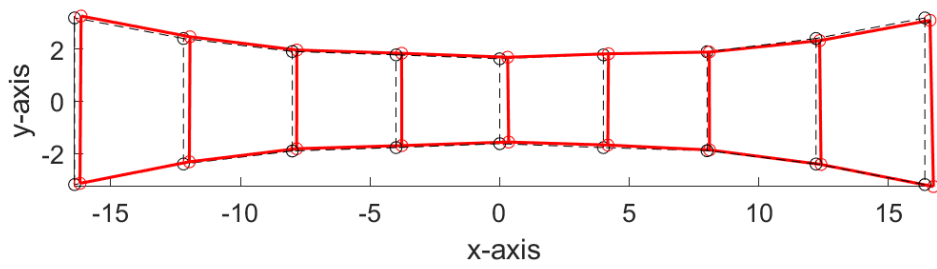
图 5.9 第四阶振型 (a) 三维视图 (b) x-z 平面视图 (c) x-y 平面视图



(a)

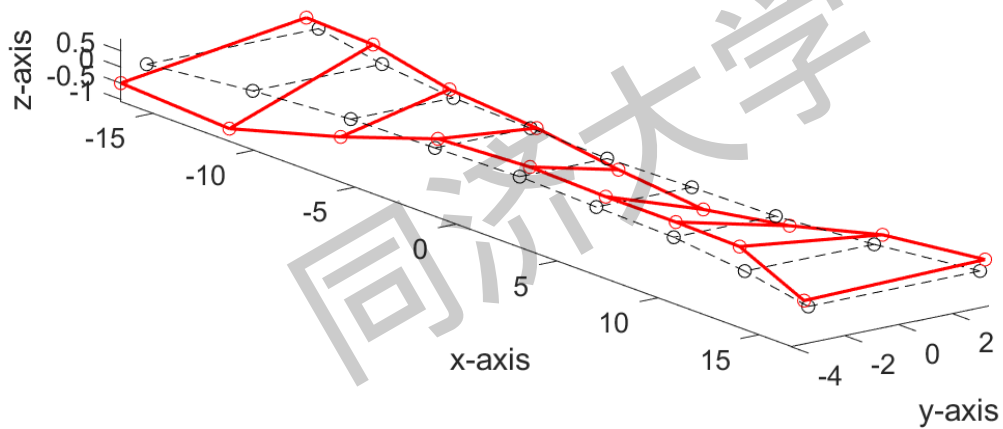


(b)

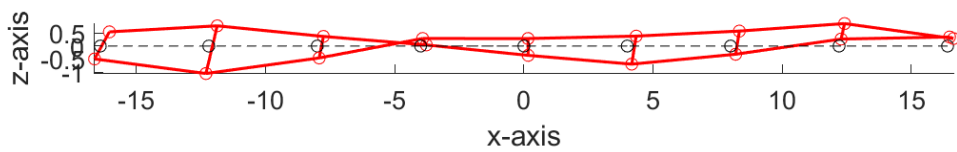


(c)

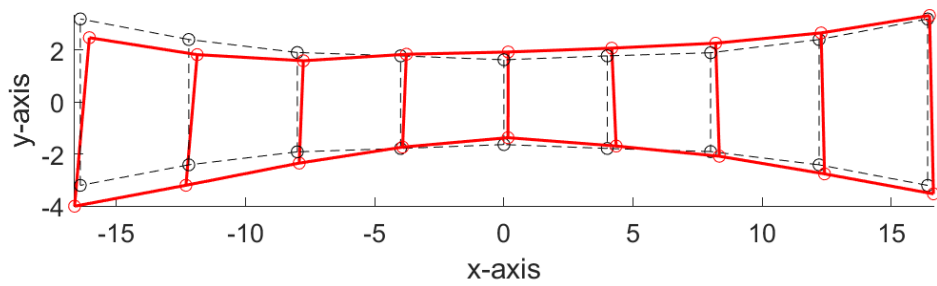
图 5.10 第五阶振型 (a) 三维视图 (b) x-z 平面视图 (c) x-y 平面视图



(a)



(b)



(c)

图 5.11 第六阶振型 (a) 三维视图 (b) x-z 平面视图 (c) x-y 平面视图

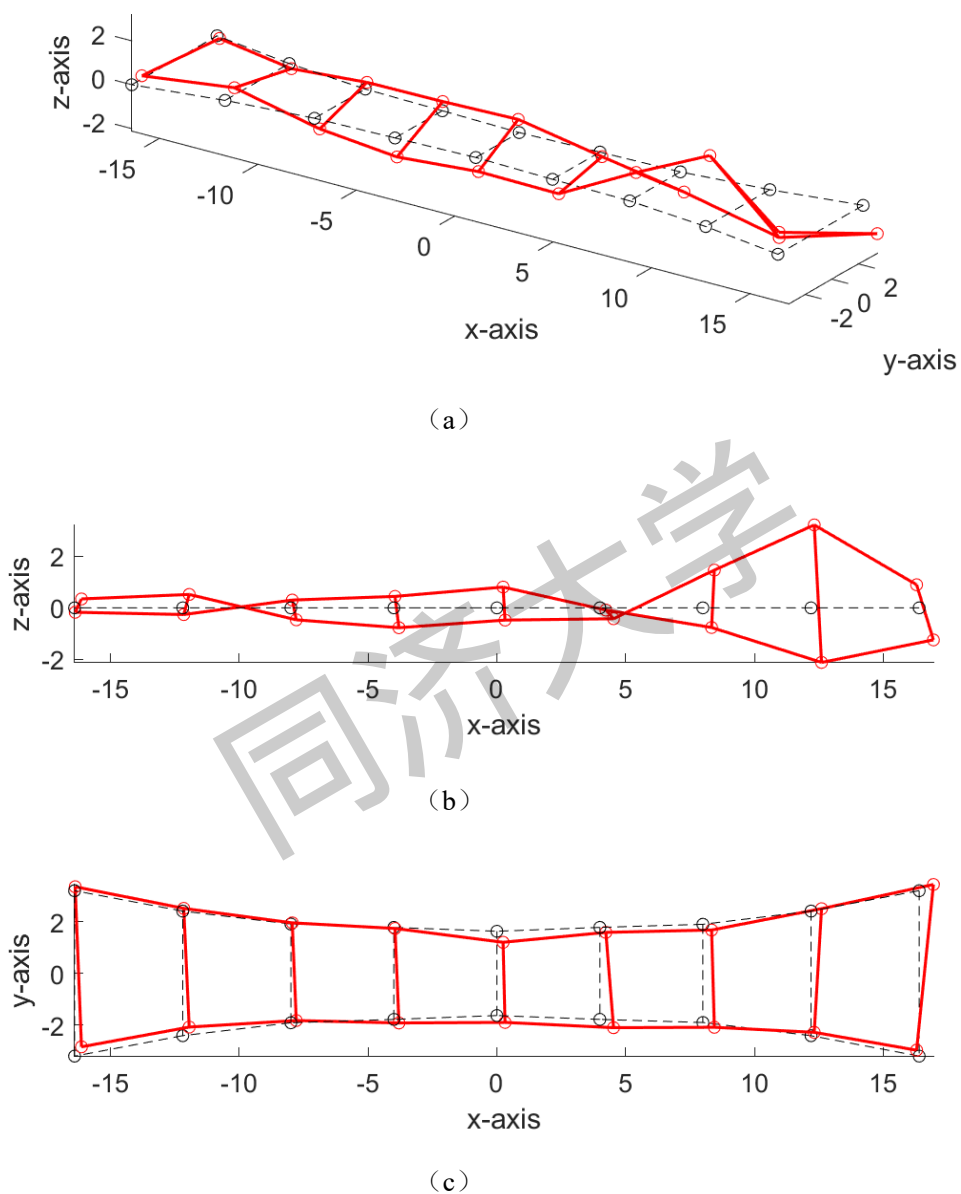
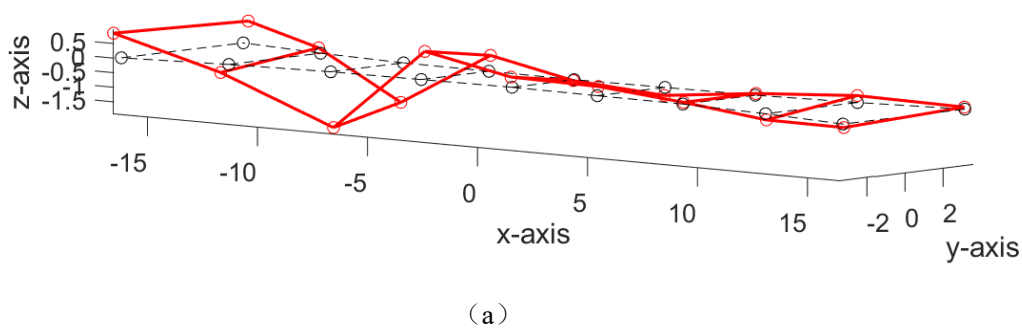
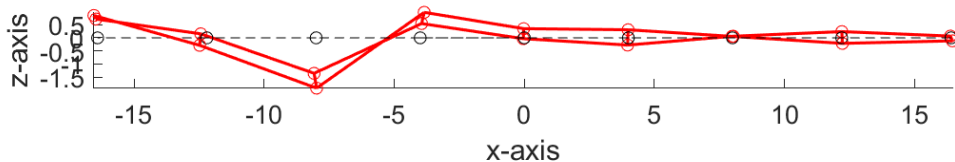
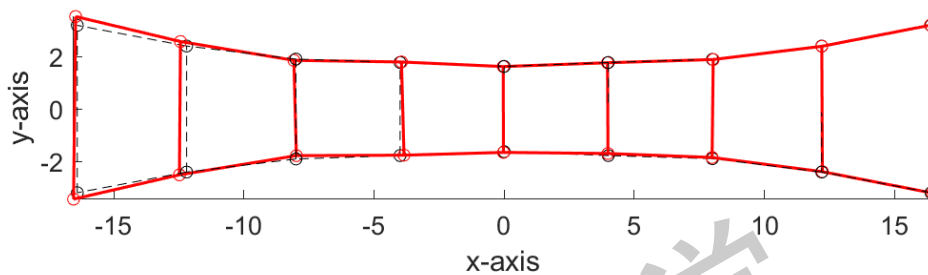


图 5.12 第七阶振型 (a) 三维视图 (b) x-z 平面视图 (c) x-y 平面视图



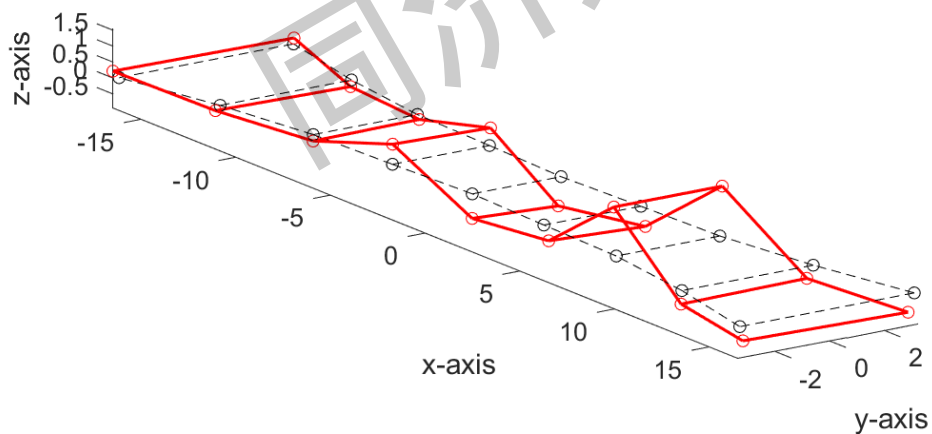


(b)

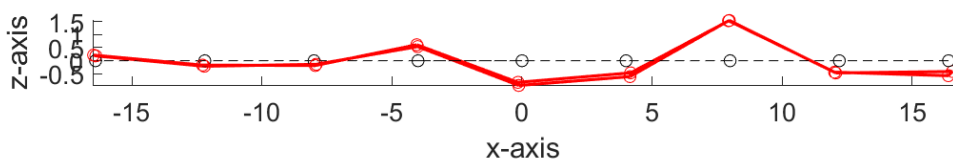


(c)

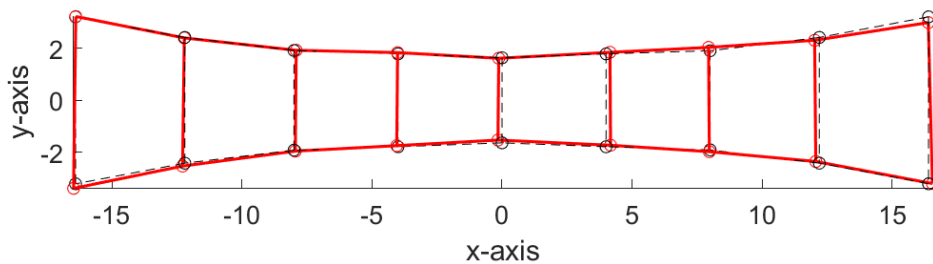
图 5.13 第八阶振型 (a) 三维视图 (b) x-z 平面视图 (c) x-y 平面视图



(a)



(b)

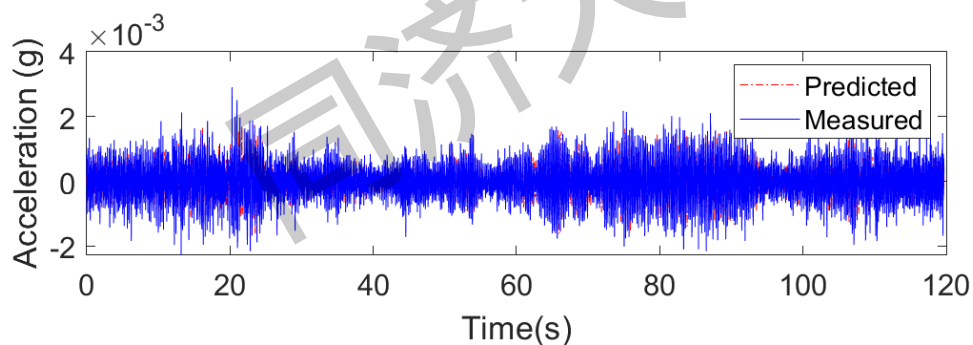


(c)

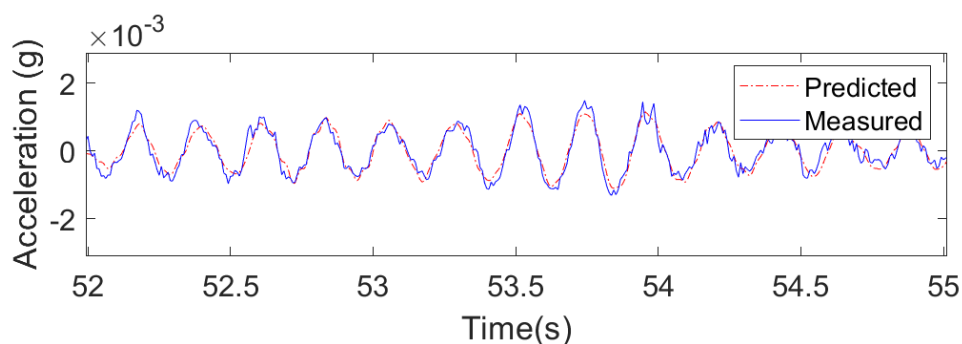
图 5.14 第九阶振型 (a) 三维视图 (b) x-z 平面视图 (c) x-y 平面视图

综上所述,第 1、3、4、5 和 9 阶振型为沿 z 轴方向的弯曲振型,呈正弦状,随着振型阶数的升高波数增加;第 2 和 7 阶振型均为扭转振型,且随着振型阶数的升高,方向改变次数增加;第 6 和第 8 阶振型是混合振型,其中,第 6 阶振型是扭转和 x-z 平面内位移的组合,第 8 阶振型是扭转和竖向位移的组合。

由优化后的不确定参数构建参数矩阵,经计算得到预测响应。现给出桥梁四个角点和跨中两点沿竖直方向的测量响应和预测响应对比图,如图 5.15~图 5.20 所示,图中蓝色实线为测量加速度,红色虚线为预测加速度,可以看出在没有激励信息的情况下曲线拟合情况良好。

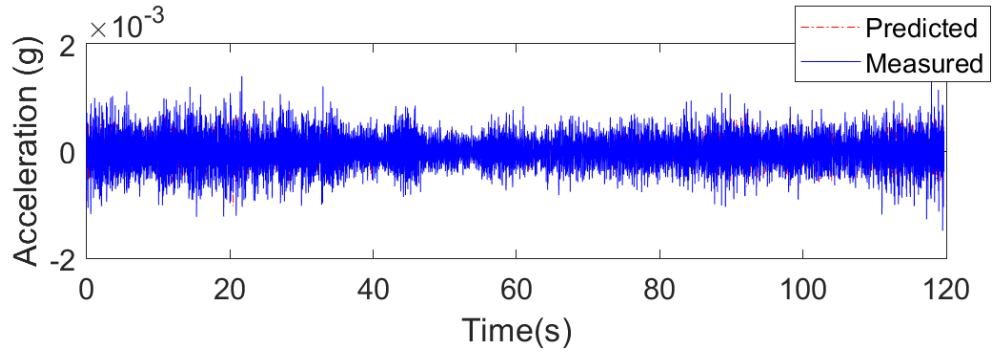


(a)

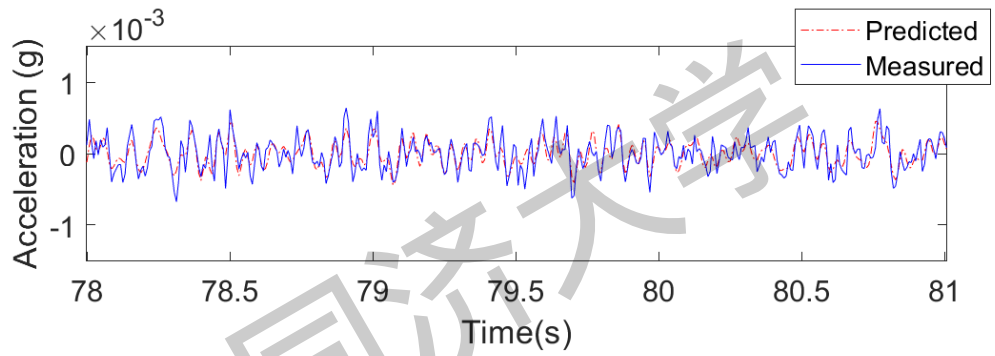


(b)

图 5.15 2 号位置沿 z 轴方向测量响应和预测响应对比 (a) 整体视图 (b) 局部视图

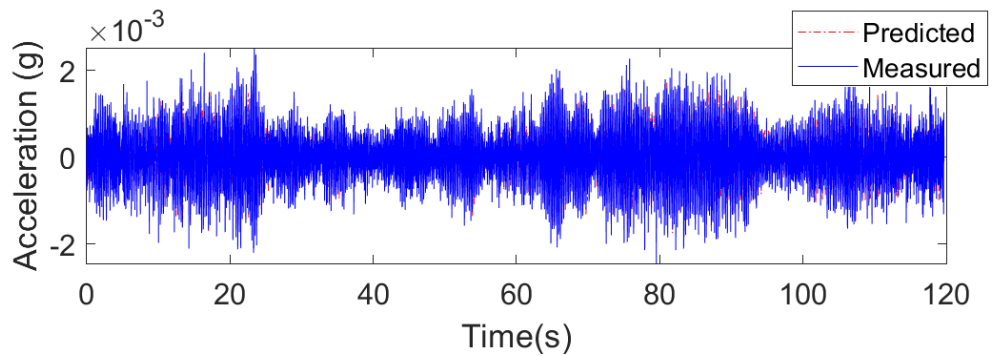


(a)

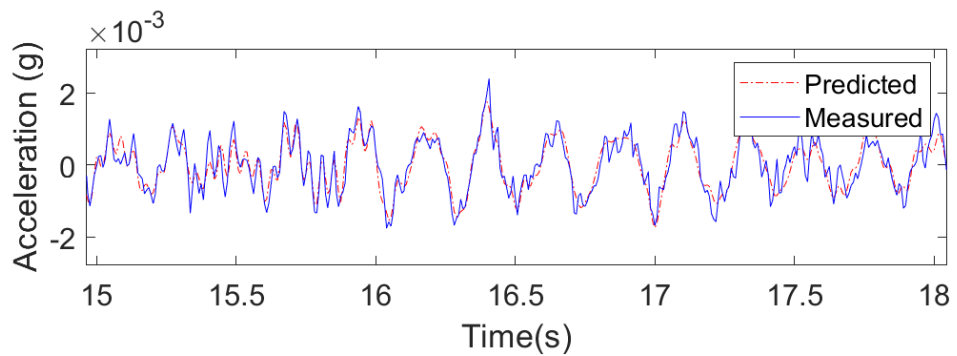


(b)

图 5.16 3 号位置沿 z 轴方向测量响应和预测响应对比 (a) 整体视图 (b) 局部视图



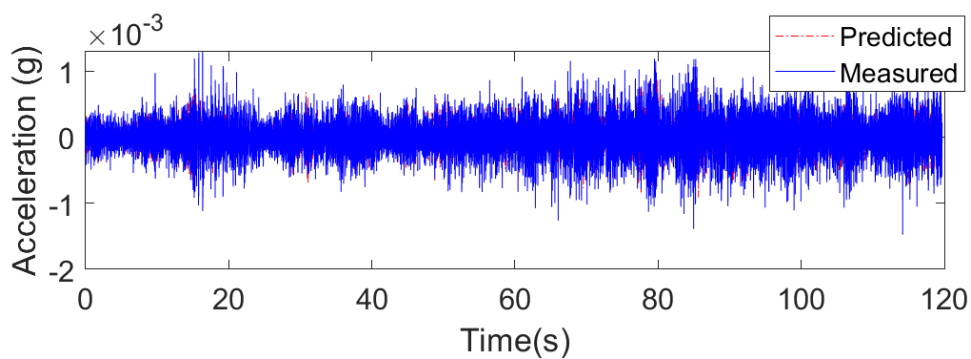
(a)



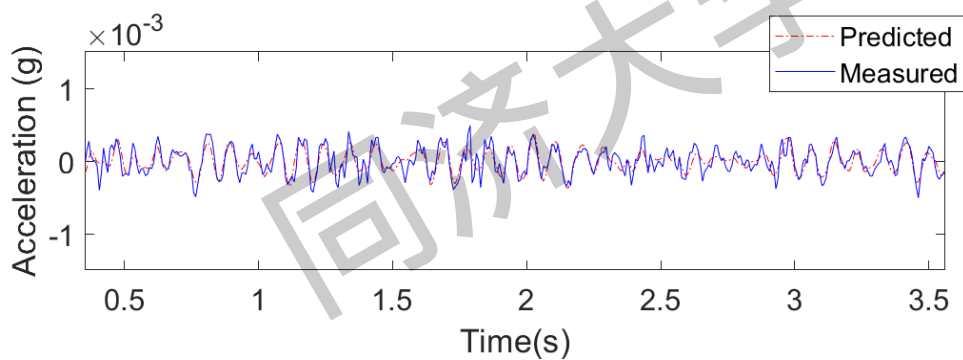


(b)

图 5.17 6 号位置沿 z 轴方向测量响应和预测响应对比 (a) 整体视图 (b) 局部视图

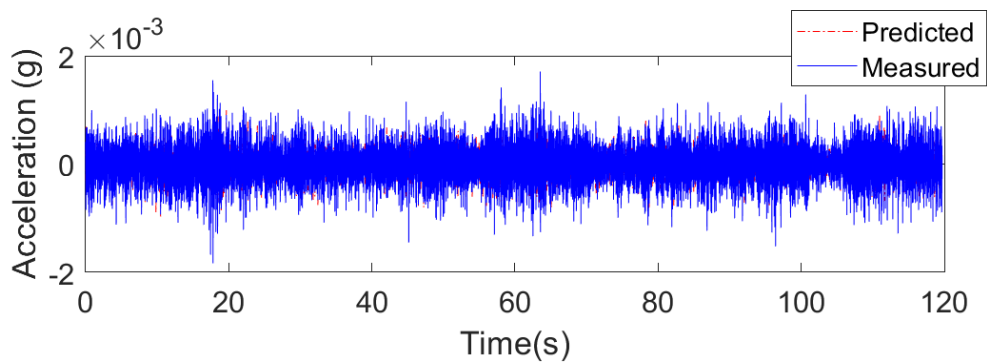


(a)

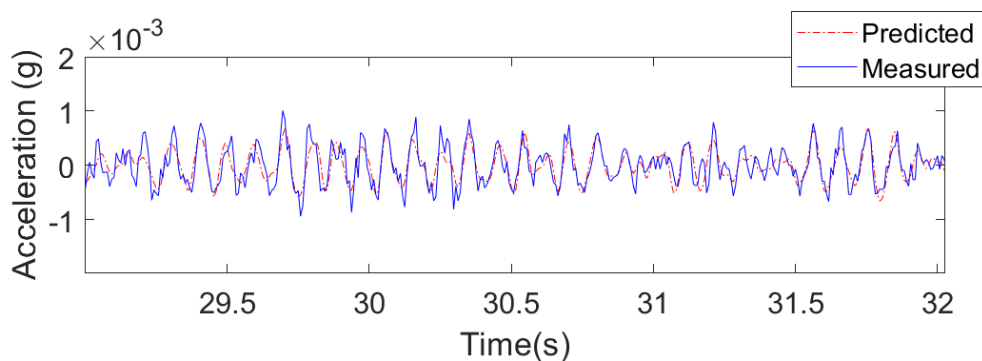


(b)

图 5.18 7 号位置沿 z 轴方向测量响应和预测响应对比 (a) 整体视图 (b) 局部视图

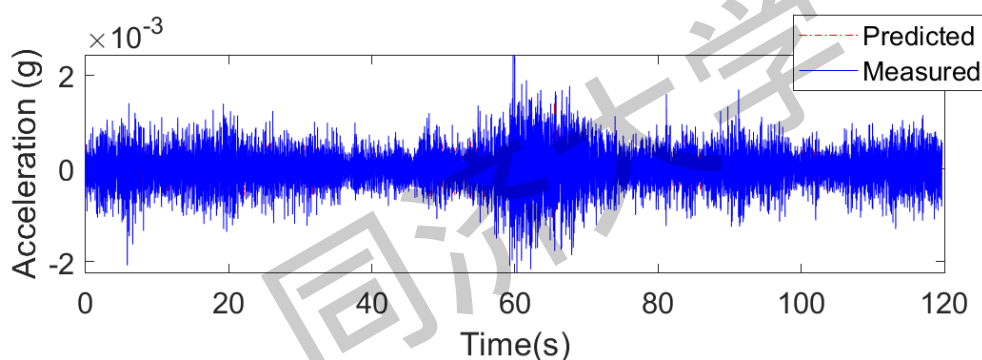


(a)

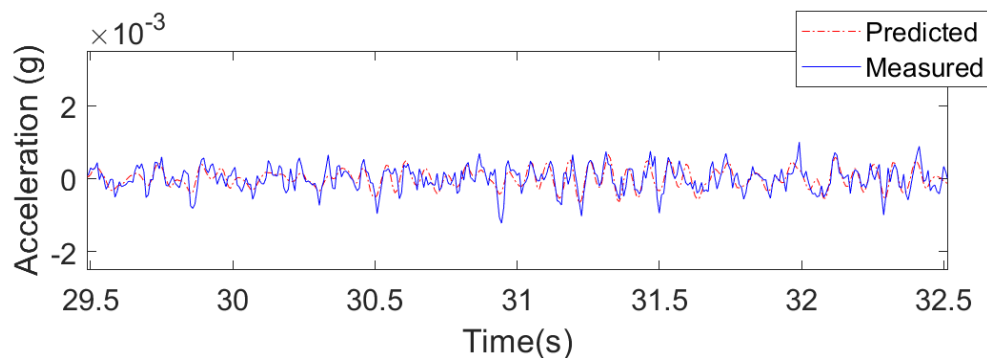


(b)

图 5.19 14 号位置沿 z 轴方向测量响应和预测响应对比 (a) 整体视图 (b) 局部视图



(a)



(b)

图 5.20 18 号位置沿 z 轴方向测量响应和预测响应对比 (a) 整体视图 (b) 局部视图

### 5.3 本章小结

本章对一足尺人行桥进行动力特性分析, 识别得到桥梁的模态参数, 应用求解最优模态参数的新型迭代算法对模态参数进行优化。优化后的阻尼比约为 0.01, 优化后的振型第 1、3、4、5 和 9 阶振型为沿 z 轴方向的弯曲振型, 呈正弦状,

随着振型阶数的升高波数增加；第 2 和 7 阶振型均为扭转振型，且随着振型阶数的升高，方向改变次数增加；第 6 和第 8 阶振型是混合振型，其中，第 6 阶振型是扭转和  $x$ - $z$  平面内位移的组合，第 8 阶振型是扭转和竖向位移的组合。

利用优化后的模态参数预测其响应并和测量响应进行对比，得出结论，在没有激励信息的情况下，预测响应和测量拟合情况良好，表明所提算法对于足尺结构依旧适用，并拥有良好的精度。

同济大学

## 第 6 章 结论与展望

### 6.1 结论

本文基于向量自回归模型提出了一种新型快速系统识别方法。通过建立向量自回归模型和结构运动方程的等效关系,此方法快速解决模态参数识别中的高维度参数优化问题,能快速识别实际工程结构的模态参数。

研究进展包括:

1. 将系统的运动方程写成状态空间模型的形式,建立状态转换方程,建立不同时间点动力响应之间的关系。研究 VAR 模型与结构动力系统的等价性,自由振动和处于环境激励下的结构系统可用 VAR 模型表示。
2. 在证明结构动力系统与 VAR 等价性的基础上,研究了 VAR 模型特征值问题,从而可以由 VAR 模型的参数矩阵提取结构的模态参数。
3. 提出识别模态参数的新型迭代算法,该算法直接以模态参数为变量,通过系统地迭代更新模态参数,每一组模态参数都可反算出一组 VAR 参数矩阵,再通过 VAR 参数矩阵反算出预测响应,然后可以算出这一组模态参数对应的响应误差,通过不断更新模态参数使响应误差最小化,最终得到最优模态参数。
4. 以一个简单的四层剪力结构为例,利用所提出的方法,将模态参数视为不确定参数进行优化从而识别模态参数,利用优化后的模态参数预测结构响应,预测响应和测量响应曲线拟合良好,表明基于向量自回归模型的系统识别方法的有效性。
5. 用所提出的新型迭代优化方法识别一个足尺人行桥梁的模态参数,利用优化后的模态参数预测结构响应,预测响应曲线和测量曲线拟合良好。表明文章所提方法在足尺结构同样适用且有效。

### 6.2 进一步工作的方向

本文的研究虽然取得了进展,但依然存在一些不足,需要未来进行进一步的研究。

1. 可将自动拾取峰值的方法与本文的研究结合,实现自动化、更高效的模态分析。
2. 由于测量数据中存在噪声,用于模态识别的的数学模型中也总有误差,

故识别的模态参数具有不确定性。因此，量化模态参数的不确定性是很重要的，进一步的研究可在本文研究基础上进行系统识别的概率建模，进行模态参数的不确定度分析，从而可以更准确的评估结构的性能，确保结构安全。

同济大学

## 参考文献

- [1] Ljung L. (1999). System identification: theory for the user. Second Edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ. pp.1-10
- [2] Au S K. Operational modal analysis: modeling, Bayesian inference, uncertainty laws. 2017. 110-117
- [3] K.V. Yuen, Beck J L, L.S. Katafygiotis. Unified Probabilistic Approach for Model Updating and Damage Detection[J]. Journal of Applied Mechanics, 2006, 73(4).
- [4] K.V. Yuen, L.S. Katafygiotis. Bayesian fast Fourier transform approach for modal updating using ambient data. Adv Struct Eng, 6 (2) (2003), pp. 81-95
- [5] Beck, J. L., S. K. Au, and M. W. Vanik. "Bayesian Probabilistic Approach to Structural Health Monitoring." American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999 IEEE, 2000.
- [6] S.K. Au, F.L. Zhang. Fundamental two-stage formulation for Bayesian system identification, Part I: General theory. Mech Syst Sig Process, 66–67 (2016), pp. 31-42
- [7] F.L. Zhang, S.K. Au. Fundamental two-stage formulation for Bayesian system identification, Part II: Application to ambient vibration data. Mech Syst Sig Process, 66–67 (2016), pp. 43-61
- [8] H.F. Lam, J.H. Yang, S.K. Au. Bayesian model updating of a coupled-slab system using field test data utilizing an enhanced Markov chain Monte Carlo simulation algorithm Eng Struct, 102 (2015), pp. 144-155
- [9] J.M.W. Brownjohn, T.C. Pan, X.Y. Deng. Correlating dynamic characteristics from field measurements and numerical analysis of a high-rise building Earthq Eng Struct Dyn, 29 (2000), pp. 523-543
- [10] H.F. Lam, J.H. Yang. Bayesian structural damage detection of steel towers using measured modal parameters. Earthq Struct, 8 (4) (2015), pp. 935-956
- [11] K.V. Yuen, J.L. Beck, L.S. Katafygiotis. Efficient model updating and health monitoring methodology using incomplete modal data without mode matching. Struct Control Health Monit, 13 (1) (2006), pp. 91-107
- [12] 刘宇飞, 辛克贵, 樊健生, 等等. 环境激励下结构模态参数识别方法综述 [J]. 工程力学, 2014, 31 (4): 46-53
- [13] Brincker, R., & Ventura, C.E. (2015). Introduction to Operational Modal Analysis: Brincker/Introduction to Operational Modal Analysis.
- [14] Fu Z F, He J. Modal analysis[M]. Elsevier, 2001. pp.1-9
- [15] H.A. Cole, Methods and Apparatus for Measuring the Damping Characteristics of a Structure, U.S. Patent 3,620,069[P], 1971.
- [16] Zhang, L., Brincker, R. and Andersen, P.: An overview of operational modal analysis: Major developments and issues. In Proceedings of the 1st International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC), Apr. 26–27, Copenhagen, 2005.
- [17] Brownjohn J, Magalhaes F, Caetano E, et al. Ambient vibration re-testing and operational modal analysis of the Humber Bridge[J]. Engineering Structures, 2010, 32(8):2003-2018.
- [18] Liu, Pei et al. "Bayesian model updating of a twin-tower masonry structure through subset simulation optimization using ambient vibration data." Journal of Civil Structural Health

Monitoring 11 (2020): 129-148.

- [19] Lam HF, Zhang FL, Ni YC, Hu J (2017) Operational modal identification of a boat-shaped building by a Bayesian approach. *Eng Struct* 138:381–393.
- [20] Zhang, Q, Chang, T-YP, Chang, CC. Finite-element model updating for the Kap Shui Mun cable-stayed bridge. *J Bridge Eng* 2001; 6: 285–293.
- [21] J.M. Brownjohn. Ambient vibration studies for system identification of tall buildings. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 32 (1) (2003), pp. 71-95
- [22] Peeters B, De Roeck G (2001) Stochastic system identification for operational modal analysis: a review. *ASME J Dyn Syst Meas Control* 123(4): pp.659–667
- [23] Van Overschee P, De Moor B (1996) Subspace identification for linear systems. Kluwer Academic, Dordrecht
- [24] Söderström T, Stoica P (1983) Instrumental variable methods for system identification. Springer, New York
- [25] Peeters, B. (2000) . “System identification and damage detection in civil engineering.” PhD thesis, K.U. Leuven, Belgium. pp.57-62
- [26] S. Cho, J.P. Lynch, J.J. Lee, C.B. Yun, Development of an automated wireless tension force estimation system for cable-stayed bridges. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 21 (3) (2010), pp. 361-376
- [27] Felber A J. Development of a hybrid bridge evaluation system[J]. 1993.
- [28] Seung-Seop Jin, Seunghoo Jeong, Sung-Han Sim, Dong-Woo Seo, Young-Soo Park, Fully automated peak-picking method for an autonomous stay-cable monitoring system in cable-stayed bridges, *Automation in Construction*, Volume 126, 2021, 103628, ISSN 0926-5805,
- [29] Naderpour, H., Fakharian, P. A synthesis of peak picking method and wavelet packet transform for structural modal identification. *KSCE J Civ Eng* 20, 2859–2867 (2016).
- [30] Brincker, R., L. Zhang, and P. Andersen. "Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition." *International Modal Analysis Conference* 2000.
- [31] Brincker, R., & Andersen, P. (2000). Ambient Response Analysis of the Heritage Court Tower Building Structure.
- [32] Brincker, R., Frandsen, J. B., and Andersen, P.: Ambient Response Analysis of the Great Belt Bridge, in: *Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference*, San Antonio, USA, 2000
- [33] Jacobsen, N. J, P. Andersen, and R. Brincker. "Using Enhanced Frequency Domain Decomposition as a Robust Technique to Harmonic Excitation in Operational Modal Analysis." *International Conference on Noise & Vibration Engineering Katholieke Universiteit*, 2006.
- [34] Sim S H, Carbonell-Marquez J F, Jr B, et al. Decentralized random decrement technique for efficient data aggregation and system identification in wireless smart sensor networks[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2011, 26(1):81-91.
- [35] 逯静洲, Sung Han Sim, Billie F. Spencer, Jr. 基于随机减量法的分布式结构模态参数识别[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(17): 48-54. 2017.17.008.
- [36] Y. Zhang, H.W. Song, Non-overlapped random decrement technique for parameter identification in operational modal analysis, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 366, 2016, Pages 528-543, ISSN 0022-460X
- [37] Kung S Y. A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition. In *Proceedings of the 12th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers*,

- Pacific Grove, USA, November, 1978. 705~714
- [38] Van Overschee P, De Moor B. Subspace identification for linear systems: Theory-Implementation-Applications. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996
- [39] Overschee P V, Moor B D. Subspace Identification for Linear Systems[M]. Springer US, 1996. pp.1-29
- [40] Velazquez A, Swartz R A. Output-only cyclo-stationary linear-parameter time-varying stochastic subspace identification method for rotating machinery and spinning structures[J]. Journal of Sound & Vibration, 2015, 337:45-70.
- [41] Hong A L, Ubertini F, Betti R. New Stochastic Subspace Approach for System Identification and Its Application to Long-Span Bridges[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2013, 139(6):724-736.
- [42] Vezio Mugnaini, Luca Zanotti Fragonara, Marco Civera, A machine learning approach for automatic operational modal analysis, Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 170, 2022, 108813, ISSN 0888-3270,
- [43] Sadeqi A, Moradi S, Shirazi K H. System Identification Based on Output-Only Decomposition and Subspace Appropriation[J]. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 2019.
- [44] Kang Zhou, Qiu-Sheng Li, Modal identification of high-rise buildings under earthquake excitations via an improved subspace methodology, Journal of Building Engineering, Volume 52, 2022, 104373, ISSN 2352-7102,
- [45] Chunxiao Bao, Hong Hao, Zhong-Xian Li, Integrated ARMA model method for damage detection of subsea pipeline system, Engineering Structures, Volume 48, 2013, Pages 176-192, ISSN 0141-0296,
- [46] Mathieu Bertha, Jean-Claude Golinval, Identification of non-stationary dynamical systems using multivariate ARMA models, Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 88, 2017, Pages 166-179, ISSN 0888-3270
- [47] Tengfei Chen, Guoping Chen, Weiting Chen et al. Application of decoupled ARMA model to modal identification of linear time-varying system based on the ICA and assumption of “short-time linearly varying”, Journal of Sound and Vibration, Volume 499, 2021, 115997, ISSN 0022-460X
- [48] J.L. Beck, K.V. Yuen Model selection using response measurements: bayesian probabilistic approach. J. Eng. Mech., 130 (2) (2004), pp. 192-203, 10.1061/(ASCE)0733-9399(2004) 130:2(192)
- [49] Miki Haseyama, Hideo Kitajima, An ARMA order selection method with fuzzy reasoning, Signal Processing, Volume 81, Issue 6, 2001, Pages 1331-1335, ISSN 0165-1684,
- [50] Mahdiye Sadat Sadabadi, Masoud Shafiee, Mehdi Karrari, Two-dimensional ARMA model order determination, ISA Transactions, Volume 48, Issue 3, 2009, Pages 247-253, ISSN 0019-0578
- [51] Yang J H, Lam H F. An innovative Bayesian system identification method using autoregressive model[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 133:106289.
- [52] E. Reynders, R. Pintelon, G. De Roeck. Uncertainty bounds on modal parameters obtained from stochastic subspace identification. Mech. Syst. Sig. Process., 22 (4) (2008), pp. 948-969, 10.1016/j.ymsp.2007.10.009
- [53] M. Döhler, X.B. Lam, L. Mevel. Uncertainty quantification for modal parameters from stochastic subspace identification on multi-setup measurements. Mech. Syst. Sig. Process., 36 (2) (2013), pp. 562-581, 10.1016/j.ymsp.2012.11.011
- [54] Yan-Chun Ni, Feng-Liang Zhang, Fast Bayesian frequency domain modal identification from



seismic response data, *Computers & Structures*, Volume 212, 2019, Pages 225-235, ISSN 0045-7949

[55] Yuanfeng Shi, Binbin Li, Siu-Kui Au, Fast computation of uncertainty lower bounds for state-space model-based operational modal analysis, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 169, 2022, 108759, ISSN 0888-3270

[56] Lam and Yang. *Vibration Testing and Applications in System Identification of Civil Engineering Structures*. 2023, CRC Press, Taylor & Francis Group.

[57] Meirovitch, Leonard. *Elements of vibration analysis /-2nd ed[M]*. pp.478-489

[58] Pi Y L, Mickleborough N C. Modal Identification of Vibrating Structures Using ARMA Model[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1989, 115(10):2232-2250.

[59] Ogata K. *Modern control engineering[M]*. 2010.648-722

[60] Yong, Lin, Pi, et al. Modal identification of a vibrating structure in the time domain[J]. *Computers & Structures*, 1989, 32(5):1105-1115.

[61] Koning R H, Neudecker H, Wansbeek T. Block Kronecker products and the vecb operator[J]. *Linear Algebra & Its Applications*, 2015, 149.

[62] Henderson H V, Searle S R. The vec-permutation matrix, the vec operator and Kronecker products: a review[J]. *Linear & Multilinear Algebra*, 1979, 9(4):271-288.

[63] Yang J H, Lam H F, Beck J L. Bayes-Mode-ID: A Bayesian modal-component-sampling method for operational modal analysis[J]. *Engineering Structures*, 2019, 189:222-240.

[64] Lagarias, J. C., J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright. "Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions." *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 9, Number 1, 1998, pp. 112–147.

## 致谢

三年不过一晃眼，拿到录取通知书仿佛只是昨天的事情。有人说，研究生只有在拿到录取通知书和毕业证书的时候才是真正的快乐。幸运的是我遇到了我的二位导师，我的室友，让我觉得研究生生活的整体基调都是快乐的。

感谢我的副导师阳佳桦老师。虽然在论文的封面上只是副导师，但是是我入学时候学校分配的老师，也是一直在指导我的人。在工作变动后，纯纯的就是义务劳动，没有学校发工资，毕业论文也只有副导师的名分，还一直耐心的指导我，还要改我那写的一团糟的论文。您对我而言不仅仅是老师，也是（网）友。您的鼓励式教学，让我的研究生生涯来源于导师的压力不大，整体上甚至是轻松愉快的。

感谢我的导师谢丽宇老师，在阳老师离职后收我为研究生，并且不断鼓励我融入和泉研究室。在毕业之际，谢老师对我也很关心，为我提供方向，帮我询问学校的政策，给我提供机会让我毕业后继续科研，丰富自己的履历，而不是虚度未来的一年。

感谢我的父母，轻松开明的家庭氛围养成了这样一个乐观的我。在别人家的父母望子成龙望女成凤时，你们总让我不要太累了，平平淡淡也是生活。

感谢熊联垚同学，已经陪伴我走过了五个春秋。这五年里，有三年的时间我们都属于异国的状态，面对面相处时间加起来也不过十来天，其余的时间只能通过微信联系。很开心有你，小到一日三餐吃什么，大到关于未来的规划，你都是个很棒的倾听者。未来也请多多关照。

感谢我的室友邱余韵，杨欣悦和李雨馨。对于我这样的社恐人士，室友是这三年相处最久交往最多的人，为数不多的朋友之三。和你们在一起的日子真的很快乐。总是怀念和韵韵一起四处逛吃的日子，在韵韵毕业以后，再看到美食推送也只能发微信互道想念。和欣悦在一起的时候互相安利电视剧电影的时候多一些，互怼多一些，互相嫌弃着又互相关心着。和雨馨相处的日子是最短的，不过短短半年，但在她的监督下我养成了晚上八点过后就不再吃东西的养生好习惯，如果未来我可以像她一样早睡早起就更好了。

研究生生涯就三年，疫情两年半。疫情下的生活，只能用兵荒马乱来形容。研究生的最后三个月是被关在宿舍里度过的，被“囚禁”就像陷入了循环，打破循环的是学校通知要返乡。打包好自己的行李，整理好住了三年的寝室一角就要逃难般离开。还没来得及在樱花树下拍下这一年的樱花，还没有来得及参加毕业典礼就要说再见。

匆匆一别，以后定会更好的遇见！

2022年6月

## 个人简历、在读期间发表的学术成果

### 个人简历:

刘雯月，女，1997年6月生。

2018年6月毕业于湖南大学 土木工程专业 获学士学位。

2019年9月入同济大学攻读硕士研究生。

### 已发表论文:

[1] 刘雯月, 谢丽宇, 阳佳桦. 基于向量自回归模型的高效模态分析方法的开发. 同济大学土木工程学院全日制专业学位硕士研究生论文集

同济大学

## 同济大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文《基于向量自回归模型的新型快速系统识别方法研究》，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：刘雯月

日期：2022年7月19日

## 同济大学学位论文授权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；学校有权保留学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构送交论文的复印件和电子版；允许论文被查阅和借阅。学校有权将本学位论文的全部或部分内 容授权编入有关数据库出版传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于（在以下方框内打“√”）：

保密，在\_\_\_\_\_年解密后适用本授权书。

不保密。





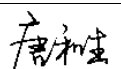
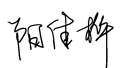
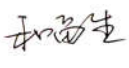
学位论文作者签名：刘雯月

指导教师签名：刘雯月

日期：2022年7月19日

日期：2022年7月19日

## 七、学位论文答辩委员会决议

姓 名	刘雯月	学 号	1932520	所在学科/专业	建筑与土木工程
指导教师	谢丽宇	答辩日期	2022. 7. 19	答辩地点	腾讯会议： 679755180
论文题目	基于向量自回归模型的新型快速系统识别方法研究				
<p>刘雯月同学的申请工程硕士学位论文《基于向量自回归模型的新型快速系统识别方法研究》，提出基于向量自回归模型的系统识别方法，论文选题具有重要的理论意义和工程应用价值。</p> <p>论文主要内容及成果如下：</p> <p>(1) 基于状态空间表示的动力系统模型，证明了向量自回归模型与结构动力系统的等价性，建立了向量自回归模型特征值问题与结构模态参数的关系。</p> <p>(2) 提出了基于向量自回归模型的系统识别方法，以模型预测响应及测量响应的差值最小化为目标，识别系统模态参数，提升了计算效率。</p> <p>(3) 通过一个缩尺模型和一个实际结构的实测数据，验证了基于向量自回归模型系统识别方法的有效性。</p> <p>论文写作规范，表述清晰，计算分析及实测数据可信，论文水平已达到工程硕士学位论文的要求。</p> <p>论文工作表明作者理论基础较扎实，相关专业知识较丰富，具备一定的从事本专业领域研究工作的能力。答辩委员会对其陈述和回答问题满意，经答辩委员会不记名投票，<u>5</u>位答辩专家委员中，<u>5</u>位同意建议授予工程硕士学位。</p> <p style="text-align: right;">答辩委员会主席签名：  2022年7月19日</p>					
<p>答辩委员会共<u>5</u>人，经表决，<u>5</u>人建议授予申请人硕士学位。根据《同济大学学位授予工作细则》<sup>[注]</sup>（在□内划“√”）：</p> <p><input type="checkbox"/> 申请人可在一年内修改论文，申请重新答辩一次。 <input checked="" type="checkbox"/> 建议授予申请人硕士学位。  <input type="checkbox"/> 建议不授予申请人硕士学位。</p>					
<p><input type="checkbox"/> 推荐为同济大学优秀硕士学位论文。</p>					
答辩委员会成员签名	职 务	姓 名	职 称	单 位	签 名
	主 席	谢强	教授	同济大学	
	委 员	张瑞甫	副教授	同济大学	
		谢丽宇	副教授	同济大学	
		唐和生	副教授	同济大学	
		阳佳桦	副教授	广西大学	
秘 书	和留生	助理研究员	同济大学		

注：根据《同济大学学位授予工作细则》第十一条规定：

1. 申请人获得全体答辩委员会成员三分之二以上（含）同意票，为建议授予申请人硕士学位；
2. 申请人获得全体答辩委员会成员二分之一以上（含）、三分之二以下（不含）同意票，申请人可在一年内修改论文，申请重新答辩一次；
3. 申请人获得全体答辩委员会成员二分之一以下（不含）同意票，为建议不授予申请人硕士学位。