



# 基于证据理论的结构非概率可靠性拓扑优化设计

苏瑜<sup>1\*</sup>, 唐和生<sup>2</sup>, 薛松涛<sup>2</sup>, 苏骏<sup>1</sup>

1. 湖北工业大学土木建筑与环境工程学院, 武汉 430068;

2. 同济大学结构工程与防灾研究所, 上海 200092

\* E-mail: su\_jingde@126.com

收稿日期: 2018-04-25; 接受日期: 2018-06-21; 网络版发表日期: 2018-09-04

科技部国家重点实验室基金项目(编号: SLDRCE14-B-03)和湖北省自然科学基金青年项目(编号: 2018CFB287)资助

**摘要** 考虑数据信息较少以及认知水平有限情况下的不确定性对于结构拓扑优化具有重要意义. 本文引入证据理论处理不精确的数据信息, 采用证据理论的不确定测度克服精确概率约束模型建立的困难, 并结合拓扑优化策略, 形成了基于证据理论的可靠性拓扑优化设计模型. 为了提高不确定测度的计算效率, 提出了仿生智能优化算法和不精确极值思想相结合的改进优化算法来降低单元数目和极限状态函数极值求解所导致的计算量. 通过两个桁架算例对所提方法进行验证, 结果表明, 确定性优化结果可能是不确定情况下的失效解, 虽然基于证据理论的最优设计在重量和拓扑形式上相对于确定性优化结果偏保守, 但具备抵抗不确定波动的能力.

**关键词** 证据理论, 拓扑优化, 微分演化, 不确定分析

## 1 引言

结构拓扑优化是以杆系结构的节点布局、节点之间的杆件连接关系、或连续体开孔的数量及位置为研究对象, 通过改变结构受力体系寻求最佳结构布局. 较之尺寸优化和形状优化, 拓扑优化具有更大的设计空间和经济收益, 故逐步成为优化领域中的焦点和难点, 受到学者的广泛关注<sup>[1-3]</sup>.

在结构系统生命的各个阶段, 不可避免地存在各种不确定性因素, 例如构件几何尺寸、材料参数、作用荷载以及计算模型等, 这些不确定因素对拓扑优化中最佳受力体系产生较大的影响, 可靠性拓扑优化是

解决拓扑优化中遇到不确定问题的有效途径之一. 目前, 结构可靠性拓扑优化主要集中在概率可靠性拓扑优化<sup>[4,5]</sup>、基于凸模型的非概率可靠性拓扑优化<sup>[6,7]</sup>以及概率-区间相结合的混合可靠性优化<sup>[8]</sup>三个方面. 然而, 对于实际问题, 不确定参数的精确概率分布数据难以得到, 但将不确定因素笼统地用一区间(边界)表达显得比较粗糙.

研究表明<sup>[9]</sup>, 由Dempster<sup>[10]</sup>和Shafer<sup>[11]</sup>提出的证据理论更加客观地利用不确定信息, 能够对各种不完备数据、不精确信息、不确定知识甚至是冲突信息进行合理表达和处理, 已经成为国际学术界的研究热点之一, 并在机械航空等领域的非概率可靠性优化方面得

引用格式: 苏瑜, 唐和生, 薛松涛, 等. 基于证据理论的结构非概率可靠性拓扑优化设计. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 320-330

Su Y, Tang H S, Xue S T, et al. Approach of non-probabilistic reliability topology optimization using evidence theory (in Chinese). Sci Sin Tech, 2019, 49: 320-330, doi: 10.1360/N092018-00115

到了广泛的应用. 国外学者Agarwal等人<sup>[12]</sup>采用证据理论解决了多学科设计问题的可靠性优化设计. Mourelatos和Zhou<sup>[13]</sup>, Srivastava等人<sup>[14]</sup>提出了基于证据理论的可靠性优化设计方法(evidence-based design optimization, EBDO), 并运用于悬臂梁和内压容器的优化设计中. Bae等人<sup>[15]</sup>采用证据理论量化机械工程中遇到的不确定问题, 尝试了飞机机翼部分的不确定性优化设计. Vasile<sup>[16]</sup>和Hou等人<sup>[17]</sup>将证据理论应用于水星探测器和火星探测器的非概率可靠性优化设计, 优化结果具有良好的鲁棒性. 国内学者也对此进行了大量研究, 郭慧昕等人<sup>[18]</sup>开发了证据理论和区间分析的可靠度优化程序. 姜潮等人<sup>[19]</sup>提出了一种基于证据理论的结构可靠性高效求解方法. 李晓斌等人<sup>[20]</sup>探讨了证据理论在飞行器不确定性设计中的适用性. 唐和生等人<sup>[21]</sup>提出了结构可靠性优化设计的证据理论和微分演化算法, 并成功应用于桁架结构的形状优化中. Hu和Luo<sup>[22]</sup>采用证据理论进行不确定量化, 建立了以最小化不确定程度为优化目标的设计模型.

上述进展中均指出, 证据理论的实际应用受到计算成本高的局限或者仅适用于简单结构, 此外证据理论在可靠性拓扑优化中的应用尚处于初级阶段. 为此, 本文采用证据理论描述不完备信息, 并结合拓扑优化策略, 建立基于证据理论的非概率可靠性拓扑优化设计模型. 针对优化模型中失效似然度计算成本高的困难, 提出了一种改进的优化算法来降低焦元数目和极限状态函数极值求解所导致的计算量. 最后通过桁架结构拓扑优化实验验证本文所提方法的有效性.

## 2 证据理论的基本概念

证据理论是由Dempster<sup>[10]</sup>提出, 由Shafer<sup>[11]</sup>进一步完善得到的, 又称为DS理论. 证据理论是经典概率理论和可能性理论的一般形式, 它采用基本概率分配(BBA)来描述数据信息的不精确和不完备. 假定 $\Theta$ 为辨识框架, 幂集 $2^\Theta$ 为辨识框架 $\Theta$ 中所有子集的集合, 表示关于命题的所有可能答案的集合. 定义函数 $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ ,  $\forall A \subseteq \Theta$ . 当存在:

$$\begin{cases} m(\emptyset) = 0, \\ \sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

称函数 $m$ 为命题在幂集 $2^\Theta$ 上的基本信任分配函数(BBA), 对于幂集元素 $A$ , 如果 $m(A) > 0$ , 则称 $A$ 为焦元,  $m(A)$ 表示证据对焦元 $A$ 的基本可信度.

证据理论中采用不确定测度——信任度(Bel)和似然度(Pl)来表达命题的真实程度:

$$\text{Bel}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B), \quad (2)$$

$$\text{Pl}(A) = 1 - \text{Bel}(\bar{A}) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B), \quad (3)$$

式中,  $\text{Bel}(A)$ 表示对 $A$ 为真的信任程度,  $\text{Pl}(A)$ 是表示对 $A$ 为非假的信任程度. 两者分别表达了真实概率 $P(A)$ 的上界和下界.

多个专家提出的理论或不同的数据信息需要合成以综合考虑各种证据源的影响. DS合成规则为: 假定 $m_1$ 和 $m_2$ 是两个专家或两个数据源对同一不确定量形成的BBA结构, 焦元分别为 $A_i$ 和 $B_j$ , 则合成后的函数 $m$ 为

$$m(A) = \frac{\sum_{A_i \cap B_j} m_1(A_i)m_2(B_j)}{1 - K}, \quad A \neq \emptyset, \quad (4)$$

式中,  $K = \sum_{A_i \cap B_j = \emptyset} m_1(A_i)m_2(B_j)$ , 反映证据冲突的程度.

DS法则主要针对冲突性较小的情况, 当多个证据的冲突性较大时, 可采用其他方法进行证据合成.

## 3 结构非概率可靠性拓扑优化设计

设 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 为 $n$ 维不确定变量,  $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_m]^T$ 为 $m$ 维设计变量, 复杂结构分析的极限状态函数可抽象为 $y = g(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ ,  $y < 0$ 表示结构失效,  $y > 0$ 表示结构安全. 当结构系统的某些参数输入 $\mathbf{x}$ 是不确定的, 则系统响应输出 $y$ 也是不确定的. 因此, 在结构优化过程中, 必须考虑不确定量对优化结果产生的影响.

对于给定的失效概率容许值 $P_f$ , 在不完备信息情况下, 由于 $[\text{Bel}, \text{Pl}]$ 是真实失效概率的区间估计, 并且失效域占整个设计空间的比例较小, 故可将结构失效似然度小于失效概率容许值 $P_f$ 作为传统概率可靠性约束的替代模型. 另外, 结合拓扑优化的设计思想, 以最小化结构重量为优化目标, 建立基于证据理论的非概率可靠性拓扑优化模型, 如下式所示:

$$\begin{aligned} \min F(\mathbf{x}^N, \mathbf{d}) &= \sum_{i=1}^n \rho_i L_i A_i T_i, \\ \text{s.t. } \text{Pl}\{y(\mathbf{x}, \mathbf{d}) < 0\} &< P_f, \\ T_i &= 0 \text{ or } 1, i = 1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{d}_L &\leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}_U, \\ \mathbf{x}_L &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U, \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $[\mathbf{x}_L, \mathbf{x}_U]$ 是名义值 $\mathbf{x}$ 的取值区间,  $[\mathbf{d}_L, \mathbf{d}_U]$ 是 $\mathbf{d}$ 的取值区间;  $T_i$ 是第 $i$ 个杆件的拓扑变量,  $T_i=0$ 表示第 $i$ 杆件被删除,  $T_i=1$ 表示第 $i$ 杆件被保留. 分析式(5)可以发现, 失效似然度的计算以及结构最优拓扑布局的寻求是基于证据理论非概率可靠性拓扑优化设计的两个关键问题. 下面就上述两个问题进行讨论.

### 3.1 基于证据理论的失效概率计算

对于结构分析, 证据理论通常采用区间数来表达不确定变量的焦元. 以图1为例, 不确定量 $x_1$ 的辨识框架为 $x_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}\}$ , 相应的幂集为 $2^{x_1} = \{\Phi, \{x_{11}\}, \{x_{12}\}, \{x_{13}\}, \{x_{11}, x_{12}\}, \{x_{11}, x_{13}\}, \{x_{12}, x_{13}\}, X_1\}$ , 根据专家意见或试验数据, 采用文献[14]中提出的不确定量化方法可得出合理的可信度分配函数 $m_1$ .

在设计中, 一般存在多个不确定量, 通过证据分析求出每个不确定量的信任度分配 $m$ 后, 对其进行迪卡儿运算, 便可得到多个不确定量同时存在下的联合焦元区间. 此处, 以二维不确定量的联合焦元为例:

$$C = x_1 \times x_2 = \{c_k = [x_{1m}, x_{2n}] : x_{1m} \in X_1, x_{2n} \in X_2\}, \quad (6)$$

式中,  $x_{1m}, x_{2n}$ 和 $c_k$ 分别是 $X_1, X_2$ 和 $C$ 的焦元区间. 假设不确定量是相互独立的, 故联合焦元 $c_k$ 的可信度为

$$m(c_k) = m(x_{1m})m(x_{2n}). \quad (7)$$

由于 $x_{1m}$ 和 $x_{2n}$ 都是区间, 联合焦元 $c_k$ 在数学上为一矩形, 以此类推, 对于 $n$ 维不确定问题, 其联合焦元应为 $n$ 维“超立方体”. 记结构失效域为 $F$ :

$$F = \{x : y = g(\mathbf{x}, \mathbf{d}) < 0, \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in c_k\}. \quad (8)$$

在获得多维不确定变量如式(6)和(7)所示的联合

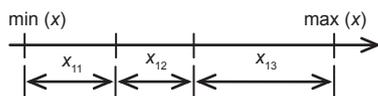


图1 不确定参数基本区间

BBA分配后, 根据证据理论的基本概念, 结构失效的上下概率测度 $\text{Bel}(F)$ 和 $\text{Pl}(F)$ 如下式所示:

$$\text{Bel}(F) = \sum_{c_k \subseteq F} m(c_k), \quad (9)$$

$$\text{Pl}(F) = \sum_{c_k \cap F \neq \emptyset} m(c_k). \quad (10)$$

由式(10)可见, 在计算失效测度上界 $\text{Pl}(F)$ 时需要确定联合焦元 $c_k$ 是否满足 $c_k \cap F \neq \emptyset$ . 当 $c_k$ 上的 $y_{\min} < 0$ 时, 不论 $y_{\max} < 0$ 或者 $y_{\max} > 0$ , 均可判断 $c_k$ 与 $F$ 相交, 即 $c_k$ 上所分配的可信度参与 $\text{Pl}(F)$ 的计算. 可见, 只需要求解 $y(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ 在 $c_k$ 对应的“超立方体”域上的极小值即可:

$$y_{\min} = \min_{c_k} y(\mathbf{x}, \mathbf{d}). \quad (11)$$

由于联合焦元的数目会随着不确定变量及其焦元的数目呈指数增长, 并且极限状态函数是复杂的有限元分析. 因此, 联合焦元的个数和每个焦元上极限状态函数的极值求解是导致失效似然度计算成本高的两个主要因素. 为了降低计算成本, 本文提出一种改进的优化算法: 首先, 在联合辨识框架 $C$ 区间 $[\mathbf{x}_L, \mathbf{x}_U]$ 内, 寻求极限状态函数的最大值和最小值来判断是否进行每一个联合焦元的极值求解; 然后, 引入仿生智能优化算法和不精确极值思想降低极值求解的计算量.

#### 3.1.1 联合焦元极值计算的判断

在联合辨识框架 $C$ 的区间上下界内寻求极限状态函数的最大值和最小值, 即:

$$[Y_{\min}, Y_{\max}] = [\min_{c_k} y(\mathbf{x}, \mathbf{d}), \max_{c_k} y(\mathbf{x}, \mathbf{d})]. \quad (12)$$

(1) 若 $Y_{\max} < 0$ , 则联合焦元的辨识框架全部落入失效域内, 因而所有联合焦元对应的BBA都计入 $\text{Pl}(F)$ , 该情况下, 无需在每个联合焦元上作极值分析就能直接判断 $\text{Pl}(F)=1$ , 从而大大降低计算成本.

(2) 若 $Y_{\min} > 0$ , 则辨识框架 $C$ 全部落入安全域内, 即所有联合焦元对应的BBA都不计入 $\text{Pl}(F)$ , 在该种情况下直接得到 $\text{Pl}(F)=0$ , 无需在每个联合焦元上进行极小值的求解.

(3) 若 $Y_{\max} > 0$ 且 $Y_{\min} < 0$ , 由于结构分析通常采用有限元分析, 并非显式函数, 无法通过解析方法减少联合焦元数目. 因此, 需要求解每个联合焦元上的 $y_{\min}$ , 据此判断 $c_k$ 对 $\text{Pl}(F)$ 的贡献.

### 3.1.2 极小值的求解

由于采样法、顶点法以及传统的优化方法在求解复杂多维非凸的极限状态函数极值时存在较大的局限性. 为了提高极值求解的计算效率, 引入仿生智能优化算法的寻优思想求解 $C$ 和 $c_k$ 上的极值. 从智能算法的操作性、收敛性以及全局寻优能力等方面来看, 微分演化算法(differential evolution, DE)是一种概念简单、易于操作、无需求导并且通过优良机制(变异、交叉和选择)高效且稳健地收敛到最优设计的新一代优化算法<sup>[23]</sup>. 因此, 本文采用DE快速获取 $c_k$ 上 $y(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ 的极小值(如图2所示, 以一维不确定变量 $x_1$ 为例)以及 $C$ 上的极值.

### 3.1.3 不精确极值思想

值得注意的是, 若 $y(c_k) < 0$ , 则可判断 $c_k$ 位于失效域中, 无需寻求精确的极小值. 因此, 可对原始的DE算法进行改进, 在DE算法的每一代寻优过程中, 判断当代 $y'_{\min}$ 是否小于0, 若 $y'_{\min} < 0$ (如图2中A点所示), 则可判断该联合焦点 $c_k$ 是位于失效域中,  $y'_{\min}$ 称为近似极小值, 此时停止搜索, 联合焦点 $c_k$ 的BBA直接计入 $PI(F)$ , 无需进行后续的极值求解; 若 $y'_{\min} > 0$ (图2中B点所示), 继续寻优, 直至出现 $y'_{\min} < 0$ 或满足DE终止条件(搜索到极小值 $y_{\min}$ ). 这样, 焦点上极限状态函数极值计算成本将被大大降低.

通过上述分析, 本文所提方法的计算步骤可归纳如下:

**Step1** 通过微分演化算法寻求联合辨识框架 $C$ 上的最大值和最小值, 若属于情况(1)和(2)则可以直接得到 $PI(F)=1$ 和 $PI(F)=0$ , 若属于情况(3), 则进入Step2.

**Step2** 通过微分演化算法和不精确极值思想判断 $c_k$ 是否与失效域相交.

**Step3** 根据 $c_k$ 的情况, 通过式(10)计算 $PI(F)$ .

## 3.2 拓扑优化策略

式(5)中的设计变量包括尺寸变量、形状变量以及拓扑变量, 拓扑优化的不同之处在于组成桁架结构的节点和杆件可以被删减与增加. 虽然这样可以最大程度地优化结构, 但同时也会带来一些计算上的困难. 在有限元分析中, 删除或增加节点会造成总刚度矩阵出现奇异或节点自由度无法加入总刚矩的困难, 删除杆件会引起应力奇异, 致使结构分析无法进行正常计算.

为了解决上述困难, 本文采取一定的优化策略避免上述问题的出现.

### 3.2.1 杆件被删除的处理

当某一杆件被删除时, 会引起应力奇异, 导致结构分析无法进行正常计算. 为了避免应力出现奇异, 采用下式巧妙处理删除杆件的拓扑策略, 在应力约束求解中, 令

$$E'_i = E_i T_i, \quad A'_i = \begin{cases} A_i, & \text{当 } T_i = 1, \\ \forall W > 0, & \text{当 } T_i = 0, \end{cases} \quad (13)$$

式中,  $E'_i, A'_i$ 分别表示考虑拓扑变量后的弹性模量和截面参数;  $W$ 为任意正数. 从上述模型可知, 当第 $i$ 个杆件被删除(即 $T_i=0$ )时, 模型巧妙地将该杆件的弹性模量修改为 $E_i=0$ , 则该杆件的单元刚度矩阵( $E_i A'_i / L$ )为零阵, 进而使其内力为零. 但截面参数仍取为任意的正数( $W \neq 0$ ), 该处理不但能保证被删除杆件的应力(包括稳定应力)为零(因为 $0/W=0$ ), 消除极限应力的存在, 避免了应力约束函数在零截面处的不连续性, 而且还有利

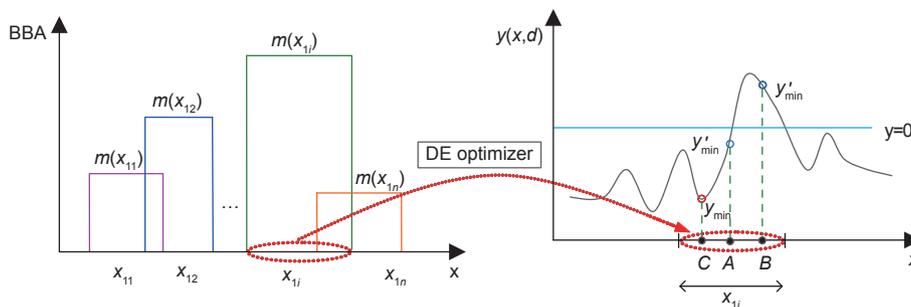


图2 (网络版彩图)基于微分演化算法的不确定传播

于计算机编程计算(可避免0/0错误情况的出现).

由此可见, 这种修正弹性模量的方法不但能解决奇异最优解问题, 而且还能保证应力约束函数在计算分析过程中的一致性, 无需为了解决奇异最优解问题而采取消除被删除杆件的应力约束函数或将其转化为内力约束并松弛的方法. 同时也适用于框架结构的拓扑优化<sup>[24]</sup>.

### 3.2.2 拓扑构形检查

该检查通过保持基本节点(荷载作用点和支承节点)不被删除以及保持结构总刚度矩阵为正定来实现. 在DE算法寻优过程中, 对产生的拓扑构形进行检查, 若为不稳定结构, 则可将其视为不可行解, 直接淘汰.

### 3.2.3 节点被删除的处理

将被删除节点视为固定支座, 在结构总刚度矩阵中, 将被删除节点相对应的部分修改为“主1副0”, 这样就可以消除由于节点删除所导致的结构总刚度矩阵维数和总刚组集过程发生变化所引起的编程麻烦.

### 3.2.4 全局最优解

引入具有并行求解能力且无须对函数进行求导的微分演化算法, 该算法不但可以灵活考虑拓扑优化中同时删除或增加结点及杆件, 而且还可以间接考虑尺寸优化和拓扑优化间的耦合关系, 避免陷入局部最优解.

DE算法的基本思想是通过变异, 交叉以及基于贪婪思想的选择操作, 进行种群间的合作与竞争来实现对优化问题的求解.

#### (1) 变异过程

$n$ 个设计变量(代表尺寸、形状以及拓扑变量)的优化问题可以用一个 $n$ 维向量来描述, 该向量可以表示为

$$\mathbf{x}_i^G = (x_{i1}^G, x_{i2}^G, \dots, x_{in}^G)^T \in S, \quad (14)$$

式中,  $i=1, 2, \dots, NP$ ,  $NP$ 为种群规模,  $G=1, 2, \dots, \text{Max\_it}$ ,  $\text{Max\_it}$ 为迭代总数.

变异的目的是利用每一代种群中两两个体之间的矢量差来指导下一步搜索的方向, 不断探索新的桁架结构体型. 本文所采用的变异公式如下:

$$\mathbf{v}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + F_1(\mathbf{x}_{\text{best}}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + F(\mathbf{x}_{r1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r2}^{(G)}), \quad (15)$$

式中,  $\mathbf{x}_{\text{best}}^{(G)}$ 表示第 $G$ 代目标函数最优的个体,  $F_1$ 和 $F$ 称为变异因子, 它调整个体间的差异, 保证搜索不陷于停滞.

#### (2) 交叉过程

为了保证种群的多样性, DE算法在变异操作的基础上引入交叉操作. 对上一代种群和下一代变异种群按照式(16)进行交叉选择, 产生试验向量 $\mathbf{u}_i^{(G+1)}$ :

$$\mathbf{u}_{ij}^{(G+1)} = \begin{cases} v_{ij}^{(G+1)}, & \text{if randb}(j) \leq CR \text{ or } j = \text{rnbr}(i), \\ x_{ij}^{(G)}, & \text{if randb}(j) > CR \text{ and } j \neq \text{rnbr}(i), \end{cases} \quad (16)$$

式中,  $j=1, 2, \dots, n$ ;  $\text{randb}$ 函数的功能是产生0~1之间的随机数;  $CR$ 称为交叉概率, 用于控制试验向量在变异个体和当前演化个体之间的继承比率.

#### (3) 选择过程

在经变异和交叉操作产生的子代个体(试验个体 $\mathbf{u}$ )与父代个体之间进行竞争, 两者中适应值更优者被保留进入下一代的演化过程. 第 $G+1$ 代的个体:

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \begin{cases} \mathbf{u}_i^{(G+1)}, & \text{if } f(\mathbf{u}_i^{(G+1)}) < f(\mathbf{x}_i^{(G)}), \\ \mathbf{x}_i^{(G)}, & \text{if } f(\mathbf{u}_i^{(G+1)}) \geq f(\mathbf{x}_i^{(G)}). \end{cases} \quad (17)$$

简而言之, 每一代的变异、交叉和选择3项操作是保证桁架结构多样性, 全局搜索能力强, 寻优性能良好的重要手段, 重复每一代的这3项操作直到满足设定的停止准则, 即可得到拓扑优化问题的最优值.

另外, 为了提高DE的拓扑寻优能力, 采用了以下的改进措施: 1) 对于离散型优化, 增加截面离散集中临界小值 $W$ 的数量, 保证构件被删除和被保留的概率大致相等, 这样会丰富拓扑构形, 并且能够使算法快速寻找到最优拓扑布局. 2) 对DE初始随机生成以及交叉变异后生成的拓扑结构进行稳定性检查. 若不满足稳定性要求, 则更新个体, 避免无效解进入后续不确定分析, 减少计算量.

## 3.3 基于证据理论的可靠性拓扑优化计算流程

综上所述, 结合拓扑优化策略以及前述可靠性优化设计数学模型, 形成了基于证据理论的可靠性拓扑优化设计方法. 另外, 引入DE优化算法并对其进行改

进, 以提高最优拓扑布局的求解效率. 其优化流程如图3所示.

## 4 数值算例

### 4.1 例1: 焊接梁的可靠性分析

为验证本文所提方法对提高失效似然度计算效率的有效性, 对如图4所示的焊接梁进行可靠性分析. 该悬臂梁长度为 $L$ , 横截面宽度为 $b$ , 高度为 $t$ . 焊缝连接形式为直角角焊缝, 角焊缝尺寸为 $h$ , 角焊缝长度为 $l$ , 自由端承受竖向荷载 $P$ . 考虑焊缝长度 $l$ , 焊缝尺寸 $h$ 以及作用荷载 $P$ 为不确定性变量, 其不确定参数列于表1. 当焊缝最大应力 $\tau$ 超过 $9066.7 \text{ lb/in}^2$ 时, 认为焊接梁承载力失效, 故功能函数如式(18)和(19)所示:

$$\tau = \sqrt{(\tau')^2 + 2\tau'\tau''\cos\theta + (\tau'')^2}, \quad (18)$$

$$g(l, h, P) = 9066.7 - \tau(l, h, P). \quad (19)$$

联合辨识框架共有 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 个三维立方体焦元, 采用本文方法和常规方法(DE优化算法直接求极值)分

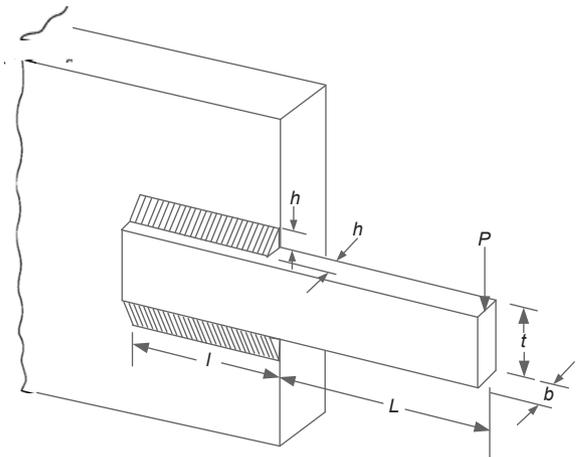


图4 焊接梁示意图

表1 焊接梁不确定参数的BBA框架

$l$ (in)		$h$ (in)		$P$ (lb)	
区间	BBA	区间	BBA	区间	BBA
[3, 4.5]	0.04	[0.1, 0.15]	0.04	[4500, 5250]	0.07
[4.5, 6]	0.38	[0.15, 0.2]	0.5	[5250, 6000]	0.43
[6, 7.5]	0.48	[0.2, 0.25]	0.43	[6000, 6750]	0.43
[7.5, 9]	0.09	[0.25, 0.3]	0.03	[6750, 7500]	0.07

别对焊接梁进行可靠性分析. 由于常规方法计算过程无任何简化, 故其结果又可作为参考解, 用于验证本文所提失效概率计算方法的效率和精度, 对比结果列于表2.

通过表2可以看出, 本文所提方法极大地降低了联合焦元的计算个数, 由原来的64个焦元降低为27个, 约57.8%的焦元个数无需进行后续极值分析. 基于近似极值思想, 焊接应力计算公式的调用次数由常规方法

表2 焊接梁计算结果<sup>a)</sup>

计算方法	本文方法	常规方法
需进行极值分析的焦元个数	27	64
功能函数调用次数	2352	5760
计算时间 (s)	0.17	0.35
失效概率上限值	0.61	0.61

a) DE算法参数:  $NP=6$ ,  $Max\_it=15$

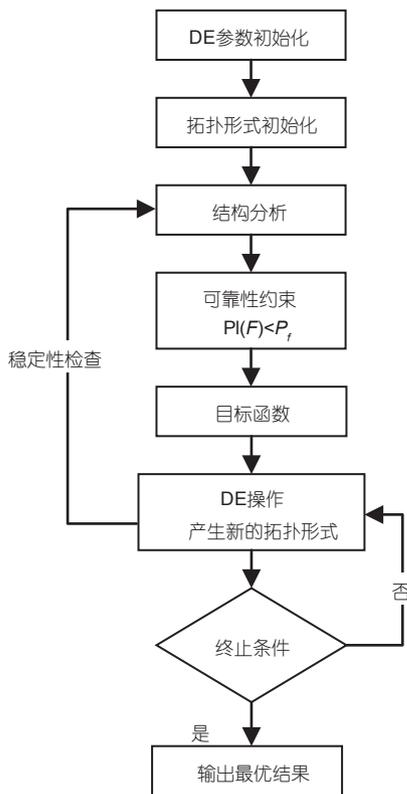


图3 基于证据理论的可靠性拓扑优化设计流程

的5760次降低到2352次. 综合上述两方面计算量的降低, 计算时间显著缩短, 从0.35 s降低至0.17 s. 观察PI(F)的计算结果可得, 两种方法的失效概率似然度均为0.61. 可见, 本文所提方法在保证计算结果精度的同时, 有效地提高计算效率.

### 4.2 例2: 十杆平面桁架拓扑优化

图5所示为经典10杆平面桁架结构图<sup>[25]</sup>. 图中给出了作用荷载的名义值大小及其作用位置, 弹性模量名义值 $E=10^7$  psi, 密度 $\rho=0.1$  lb/in<sup>3</sup>, 拉压应力限值 $[\sigma]=\pm 25000$  psi, 节点y方向的位移限值为2 in. 以各杆截面积 $A_i(i=1\sim 10)$ 为尺寸变量,  $A_i$ 取自离散集 $S=\{1.62, 1.8, 2.38, 2.62, \dots, 30.0, 33.5\}$  in<sup>2</sup>, 形状变量定义为节点1, 3, 5的y方向坐标, 拓扑变量定义为所有杆件及节点的保留与删除的逻辑关系.

文献[25]进行了确定性拓扑优化, 本文在文献[25]基础上考虑不确定性, 将荷载和弹性模量视为不确定变量. 由于时间、经费等原因的限制, 获取充足的数据信息是非常困难的, 往往只能得到有限的信息. 于是, 基于证据理论的区间表达以及区间信任度是易于得到的, 且无任何分布假定. 因此, 假定荷载和弹性模量的BBA分配如图6所示.

基于证据理论的拓扑优化设计模型为

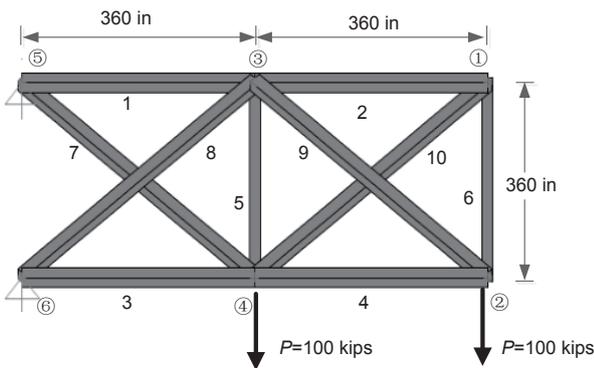


图5 10杆平面桁架结构

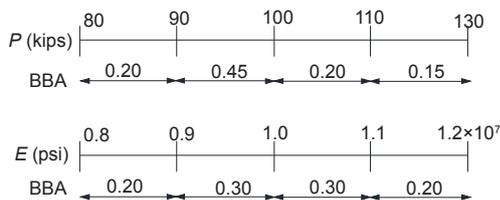


图6 外荷载和弹性模量的不确定信息

$$\begin{aligned}
 & \text{find } \mathbf{d} = [A_1, A_2, \dots, A_{10}, Y_1, Y_3, Y_5, T_1, T_2, \dots, T_{10}], \\
 & \min F(\mathbf{d}) = \sum_{i=1}^{10} \rho A_i L_i T_i + \lambda M, \\
 & \text{s.t. } \text{Pl}\{g_i(\mathbf{x}, \mathbf{d}) < 0\} < P_f, \quad i = 1, 2, \\
 & g_1(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = 25000 - \max[\sigma_k(x, d)], \\
 & g_2(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = 2.0 - \max[u_{jy}(x, d)], \\
 & \mathbf{x} = [P, E], \quad T_i = 0 \text{ 或 } 1, \quad E_i^c = E_i T_i,
 \end{aligned} \tag{20}$$

式中,  $\mathbf{d}$ 包括尺寸、形状以及拓扑变量;  $F$ 表示目标函数, 即结构重量;  $\mathbf{x}$ 表示 $P$ 和 $E$ 组成的不确定向量;  $g_1$ 和 $g_2$ 分别表示应力和位移约束函数,  $\sigma_k$ 为第 $k$ 个杆件的应力值,  $u_{jy}$ 为节点 $j$ 在 $y$ 方向上的位移值. 拓扑优化中, 令 $W=0.01$  in<sup>2</sup>, 参与计算的弹性模量取 $E_i^c = E_i T_i$ , 这样就考虑了杆件的删除与保留.

用于解决上述优化问题的DE参数设置为 $NP=100$ ,  $\text{Max\_it}=200$ ,  $F=0.8$ ,  $\text{CR}=0.85$ . 为了验证本文所提失效概率似然度计算方法的有效性, 分别采用本文所提方法和常规方法进行优化设计内部的可靠度计算. 经计算, 常规方法的优化耗时是50720 s, 本文所提方法的优化耗时是7840 s, 常规方法计算时间是本文所提方法的6.78倍, 可见本文所提方法明显提高了基于证据理论可靠性优化的计算效率.

该算例中, 结构允许的失效概率取 $P_f=0.05$ 和 $P_f=0.1$ 两种情况. 由于位移约束起控制作用, 图7仅给出了最优设计时位移约束的信任度和似然度累计分布(CPF和CBF)曲线, 图中横坐标 $g_2(\mathbf{x}, \mathbf{d})=0$ 处对应的CPF值正是结构失效似然度. 从图7可以看出, 约束失效概率是一区间值, 当 $P_f=0.05$ 时, 约束失效概率区间为 $[0, 0.03]$ , 当 $P_f=0.1$ 时, 约束失效概率为 $[0, 0.07]$ , 均满足各自的可靠性约束条件.

表3中同时列出了文献[25]确定性拓扑优化结果及基于证据理论的可靠性优化结果. 为了便于比较, 在图6所示的不确定情况下, 对文献[25]优化结果进行可靠性分析, 该确定性优化结果的失效概率达到0.75. 显然, 尽管确定性拓扑优化得到的桁架总重量(2723 lb)远远小于证据理论结果(4005和4228.3 lb), 但却是EBDO可靠性优化中的失效解. 可见, 基于证据理论的优化设计是以牺牲桁架重量来保证结构在数据信息较少情况下仍然具有较高的可靠性.

根据表3中的优化结果绘制其最优拓扑布局, 如

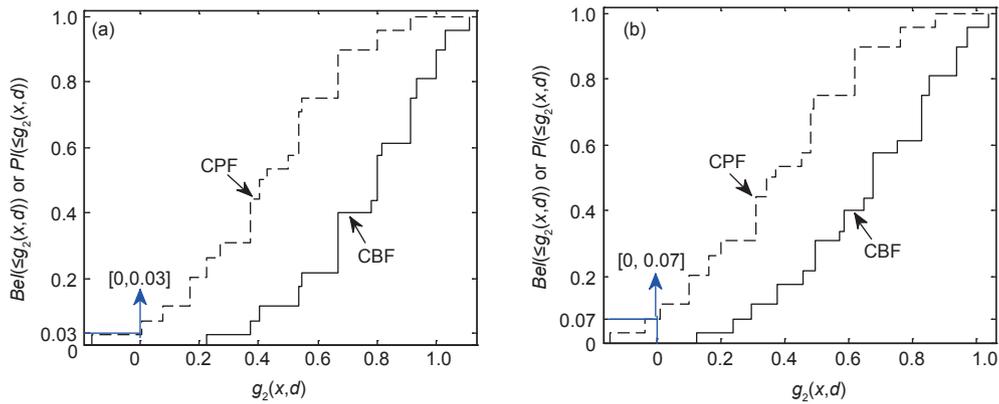


图7 位移约束的信任度和似然度累积分布. (a)  $P_f=0.05$ ; (b)  $P_f=0.1$

表3 10杆桁架拓扑优化结果比较

设计变量 (in <sup>2</sup> , in)	文献[25]结果	本文不确定分析结果	
		$P_f=0.1$	$P_f=0.05$
$A_1$	11.5	18.8	19.9
$A_2$	0	0	0
$A_3$	11.5	19.9	14.2
$A_4$	5.74	11.5	14.2
$A_5$	0	0	2.62
$A_6$	0	0	0
$A_7$	5.74	7.97	5.74
$A_8$	3.84	5.12	4.97
$A_9$	13.5	18.8	18.8
$A_{10}$	0	0	0
$Y_1$	-	-	-
$Y_3$	506.4	464.3	510.2
$Y_5$	789.7	718.6	887.7
总重 (lb)	2723.1	4005	4228.3
$Pl(g_1 < 0)$	0	0	0
$Pl(g_2 < 0)$	0.75	0.07	0.03

图8所示。观察表3和图8(b)可以发现,  $P_f=0.1$ 时的最优拓补布局与文献[25]确定性结果是一致的, 均为静定结构, 杆件2, 5, 6, 10以及节点1被删除。当 $P_f=0.05$ 时, 最优拓补形式与前两者稍有不同, 保留了杆件5, 这一结果表明随着可靠度要求的提高, 需要增加结构的冗余度来抵抗不确定因素的扰动。由此可见, 在拓补优化中, 考虑不确定因素的影响是非常有必要的, 这一结论也被很多学者认可。

### 4.3 例3: 24 m桁架桥拓补优化

本例考虑一跨度为24 m的桁架桥结构<sup>[26]</sup>, 其杆件和节点编号如图9所示。弹性模量 $E=2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ , 密度 $\rho=1$ , 拉压应力限值 $[\sigma]=\pm 140 \text{ N/mm}^2$ , 在节点2, 3, 4, 5, 6上沿y方向施加相同的荷载 $P=200 \text{ kN}$ , 所有节点x和y方向的位移限值分别为10和15 mm。该桁架桥关于12杆对称, 根据对称性可将杆件分为5组: 杆件1~6属于第1组, 杆件7, 9, 11, 13, 15, 17属于第2组, 杆件8, 10, 14, 16属于第3组, 杆件18~23属于第4组, 杆件12为第5组, 截面尺寸为连续性变量, 其最小限值为5 mm<sup>2</sup>; 形状变量定义为 $X_2, X_3, X_9, X_{10}, Y_9, Y_{10}, Y_{11}, Y_8$ , 根据对称性可得其他节点的坐标值; 杆件11, 13以及节点11的有无关系被认为是拓补变量。通过改变杆件尺寸, 节点坐标位置以及拓补构形获得桁架桥的最小体积。

为了模拟实际工程中出现的不确定性, 将外荷载和弹性模量视为不确定变量, 考虑获取不确定变量信息的高成本所导致的不完备性, 假设基于证据理论的BBA表达如图10所示。

用于解决该优化问题的DE参数设置为 $NP=140$ ,  $Max\_it=300$ 。本文采用改进优化算法和近似极值思想进行证据理论可靠度计算, 与常规方法相比, 本文所提方法的计算效率提高了3.3倍, 明显降低了优化设计的计算成本。

基于对更多可靠性要求下优化设计的尝试, 发现位移和应力约束在 $P_f=0.05$ 和 $P_f=0.2$ 两种可靠性约束条件下交替起控制作用, 故本例考虑以上两种失效概率约束。以图9为初始结构进行基于证据理论的可靠性

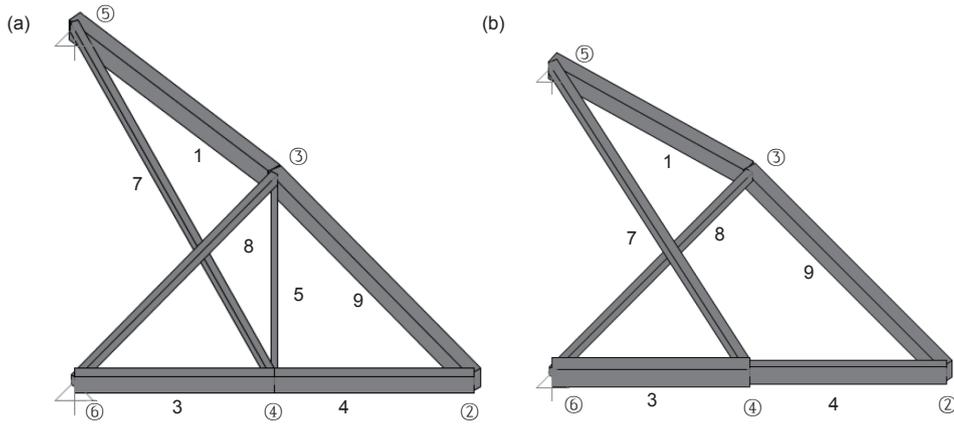


图 8 10杆平面桁架的最优拓扑形状. (a)  $P_f=0.05$ ; (b)  $P_f=0.1$

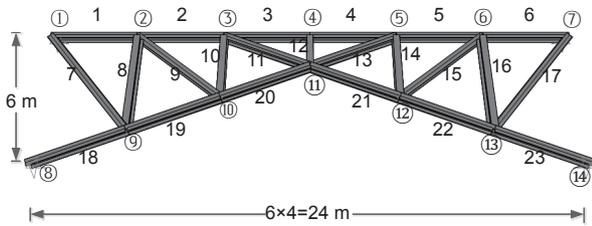


图 9 24 m桁架桥结构

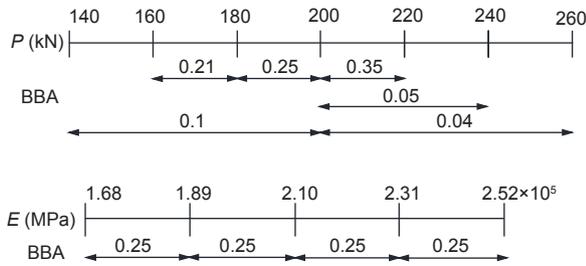


图 10 外荷载和弹性模量的不确定信息

拓扑优化. 表4对比了文献[26]中确定性拓扑优化结果和基于证据理论的可靠性优化结果, 图11列出了  $P_f=0.05$ 和 $P_f=0.2$ 时的最优拓扑形状. 由表4和图11发现, 确定和不确定两种情况下的最优拓扑布局是相同的. 这是由于下弦呈拱形是一种常见的桥梁结构体系, 良好的受力体系以及广泛的工程应用两方面足以说明该布局的最优性, 所以非确定性优化得到的最优拓扑布局仍然为拱形结构.

从表4所列的优化结果来看, EBDO在最小化结构总体积的前提下, 通过增大杆件截面尺寸和改变节点坐标值在最优布局基础上进一步提高结构的可靠性,

表 4 24 m桁架桥拓扑优化结果比较

设计变量(mm <sup>2</sup> , mm)	文献[26]结果	本文不确定分析结果	
		$P_f=0.2$	$P_f=0.05$
$A_1$	5.0	8.02	6.2
$A_2$	639.7	827.2	773.9
$A_3$	1445.4	1617.8	1760
$A_4$	4030.5	4281.7	4707.6
$A_5$	0	0	0
$X_2$	2016.6	2315.7	2042.3
$X_3$	5017.2	5030.9	5018.7
$X_9$	2054.2	2451.4	2180.9
$Y_9$	4617.4	4620.6	4779.2
$X_{10}$	5023.4	5022.3	5015.5
$Y_{10}$	2043.7	2243.2	2200.2
$Y_{11}$	—	—	—
$Y_8$	6890.4	7387.3	7344.7
总体积 (mm <sup>3</sup> )	$1.45 \times 10^8$	$1.61 \times 10^8$	$1.75 \times 10^8$
$Pl(g_1 < 0)$	0.45	0.09	0.04
$Pl(g_2 < 0)$	0.6	0.1425	0.0325

这说明本文基于证据理论的可靠性拓扑优化方法能够给出不确定参数在数据缺乏情况下更为合理的结构材料布局.

## 5 结论

拓扑优化相对尺寸、形状优化具有更大的收益空间. 然而, 实际工程中不可避免地存在着信息不完备、

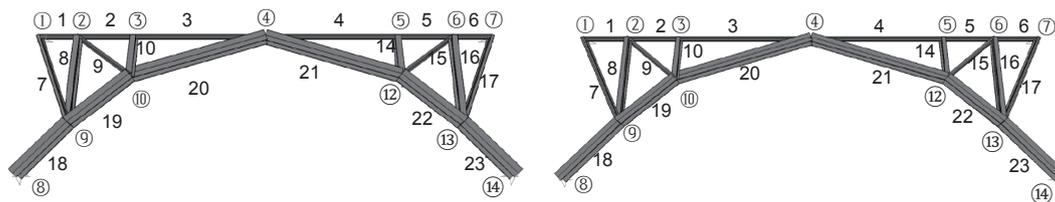


图 11 24 m桁架桥的最优拓扑形状. (a)  $P_f=0.05$ ; (b)  $P_f=0.2$

认知水平不够以及试验数据缺乏等不确定性, 这些不确定性往往难以精确地采用概率理论模拟, 故基于概率理论的可靠性拓扑优化具有一定的局限性. 在该情况下, 利用证据理论的基本信任分配函数来表达实际工程中的有限数据以及认知水平匮乏更为合理. 本文研究了基于证据理论的可靠性拓扑优化设计方法, 通过引入一系列拓扑优化策略, 在满足 $PI(F) < P_f$ 的非概率可靠性约束条件下, 寻找结构重量(体积)最小且能够抵抗不确定波动的最优结构布局. 为了提高不确定

测度的计算效率, 提出了一种改进的优化算法来降低焦点数目和极限状态函数极值求解所导致的计算量. 本文以3个算例来验证所提方法的有效性, 计算结果表明, 确定性优化结果通常是可靠性优化中的不可行解. 虽然基于证据理论的最优设计在重量和结构形式上相对于确定性优化结果偏保守, 但其可靠性得到了有效的提高, 并且能够给出不确定情况下更为合理的结构材料布局. 本文方法也为非概率可靠性拓扑优化提供了另一种新的途径, 具有一定的应用前景.

## 参考文献

- 1 张卓群, 李宏男, 黄连状. 基于蚁群算法的结构拓扑优化方法. 应用力学学报, 2011, 28: 226–232
- 2 Deb K, Gulati S. Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms. Finite Elem Anal Des, 2001, 37: 447–465
- 3 Miguel L F F, Lopez R H, Miguel L F F. Multimodal size, shape, and topology optimisation of truss structures using the Firefly algorithm. Adv Eng Software, 2013, 56: 23–37
- 4 陈建军, 曹一波. 基于可靠性的桁架结构拓扑优化设计. 力学学报, 1998, 30: 277–284
- 5 徐斌, 姜节胜, 闫云聚. 具有频率约束的桁架结构可靠性拓扑优化. 应用力学学报, 2001, 18: 45–50
- 6 亢战, 罗阳军. 桁架结构非概率可靠性拓扑优化. 计算力学学报, 2008, 25: 589–594
- 7 李东泽, 于登云, 马兴瑞. 不确定载荷下的桁架结构拓扑优化. 北京航空航天大学学报, 2009, 35: 1171–1178
- 8 乔心州, 魏琳娟, 仇原鹰. 桁架结构概率-非概率混合可靠性拓扑优化. 应用力学学报, 2011, 28: 402–407
- 9 Helton J C, Johnson J D, Oberkampf W L. An exploration of alternative approaches to the representation of uncertainty in model predictions. Reliab Eng Syst Safe, 2004, 85: 39–71
- 10 Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. Ann Math Statist, 1967, 38: 325–339
- 11 Shafer G A. Mathematical Theory of Evidence. Princeton: Princeton University Press, 1976. 10–50
- 12 Agarwal H, Renaud J E, Preston E L, et al. Uncertainty quantification using evidence theory in multidisciplinary design optimization. Reliab Eng Syst Safe, 2004, 85: 281–294
- 13 Mourelatos Z P, Zhou J. A design optimization method using evidence theory. J Mech Des, 2006, 128: 901–908
- 14 Srivastava R K, Deb K, Tulshyan R. An evolutionary algorithm based approach to design optimization using evidence theory. J Mech Des, 2013, 135: 081003
- 15 Bae H R, Grandhi R V, Canfield R A. An approximation approach for uncertainty quantification using evidence theory. Reliab Eng Syst Safe, 2004, 86: 215–225
- 16 Vasile M. Robust mission design through evidence theory and multiagent collaborative search. Ann New York Acad Sci, 2005, 1065: 152–173
- 17 Hou L, Cai Y, Zhang R, et al. Evidence theory based multidisciplinary robust optimization for micro mars entry probe design. In: Emmerich M, Deutz A, Schuetze O, et al. EVOLVE-A Bridge Between Probability, Set Oriented Numerics, and Evolutionary Computation IV. Heidelberg: Springer, 2013. 307–22

- 18 郭慧昕, 刘德顺, 胡冠昱, 等. 证据理论和区间分析相结合的可靠性优化设计方法. 机械工程学报, 2008, 44: 36–41
- 19 姜潮, 张哲, 韩旭, 等. 一种基于证据理论的结构可靠性分析方法. 力学学报, 2013, 45: 103–115
- 20 李晓斌, 张为华, 王中伟. 基于证据理论的固体火箭发动机不确定性分析. 弹箭与制导学报, 2006, 26: 420–425
- 21 唐和生, 苏瑜, 薛松涛, 等. 结构可靠性优化设计的证据理论和微分演化算法. 湖南大学学报: 自然科学版, 2014, 41: 33–38
- 22 Hu S, Luo J. Uncertainty quantification for structural optimal design based on evidence theory. J Shanghai Jiaotong Univ (Sci), 2015, 20: 338–343
- 23 Storn R, Price K. Differential evolution—A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. J Glob Optimiz, 1997, 11: 341–359
- 24 黄冀卓, 王湛. 基于遗传算法的离散型结构拓扑优化设计. 工程力学, 2008, 25: 32–38
- 25 Rahami H, Kaveh A, Gholipour Y. Sizing, geometry and topology optimization of trusses via force method and genetic algorithm. Eng Struct, 2008, 30: 2360–2369
- 26 Soh C K, Yang J. Optimal layout of bridge trusses by genetic algorithms. Comp-aided Civil Eng, 1998, 13: 247–254

## Approach of non-probabilistic reliability topology optimization using evidence theory

SU Yu<sup>1</sup>, TANG HeSheng<sup>2</sup>, XUE SongTao<sup>2</sup> & SU Jun<sup>1</sup>

<sup>1</sup> School of Civil Engineering, Architecture and Environment, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, China;

<sup>2</sup> Research Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Tongji University, Shanghai 200092, China

It is of great importance to consider uncertainty due to insufficient data or imprecise information in topology optimization design. In this paper, evidence theory is presented to handle the imprecise data situation. The plausibility measure based on evidence theory is introduced to overcome the difficulty of constructing the precise probabilistic constraint. Furthermore, the topology problem in this evidence-based optimization design is solved by combined strategy of the differential evolution and superior topology technique. In order to overcome the difficulty of intensive computational cost in calculating plausibility measure, an improved method of evolutionary optimization design integrating with imprecise extremum idea is proposed. Two truss examples are given to demonstrate the proposed approach. The research indicates that deterministic results may be the failure solutions under epistemic uncertainty. Although evidence-based optimum topology designs are more conservative than deterministic results in aspects of weight and optimal structural topology layout, it gains a more robust design under epistemic uncertainty.

**evidence theory, troposphere, topology optimization design, differential evolution, uncertain quantification**

doi: 10.1360/N092018-00115