



同濟大學  
TONGJI UNIVERSITY

## 硕士学位论文

(专业学位)

# 自平衡惯容器的非线性理论模型及验证

资助项目：国家自然科学基金  
(编号：51778490)  
政府间国际科技创新合作重点专项  
(编号：2016YFE0127600)

姓 名： 陈子旻

学 号： 1732599

所在院系： 土木工程学院

学科门类： 工 程

学科专业： 建筑与土木工程

指导教师： 薛松涛 教授

副指导教师： 谢丽宇 副教授

二〇二〇年六月





同濟大學  
TONGJI UNIVERSITY

A dissertation submitted to  
Tongji University in conformity with the requirements for  
the degree of Master of Engineering

## **Nonlinear Theoretical Model of Self-Balanced Ineter and Its Verification**

Supported by National Science Foundation of China  
(No: 51778490) and the Key Program of Intergovernmental  
International Scientific and Technological Innovation  
Cooperation (No. 2016YFE0127600)

Candidate: Chen Ziyang

Student Number: 1732599

School/Department: School of Civil Engineering

Discipline: Engineering

Major: Architectural and Civil Engineering

Supervisor: Prof. Xue Songtao

Deputy Supervisor: Assoc.Prof. Xie Liyu

June, 2020



自平衡惯容器的非线性理论模型及验证

陈子暘

同济大学



# 学位论文版权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构送交论文的复印件和电子版；在不以赢利为目的的前提下，学校可以适当复制论文的部分或全部内容用于学术活动。

学位论文作者签名：

年 月 日



## 同济大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。



## 摘要

惯容系统作为一种新的减振装置，具有结构负担小、调谐作用更大、阻尼增效等优点，被广大研究者所重视，这其中又以丝杠类惯容器由于其放大效率高而最常见，且已有相应的工程应用。然而，这种传统的丝杠类惯容器由于在丝杠端部存在不平衡的扭矩，因而连接构造复杂。本文提出将飞轮均分为两部分，调整丝杠的螺纹方向使双飞轮的旋向相反，可获得相同的调谐作用，同时使得丝杠端部的不平衡扭矩被抵消，实现丝杠类惯容系统的自平衡。因自平衡惯容器的摩擦力也会严重影响惯容系统的调谐和耗能作用，本文建立了更为精细的考虑摩擦力的自平衡惯容器数值仿真力学模型以模拟真实的运动过程中惯容器运动，利用数值模拟研究摩擦力对惯容器减震效果的影响，并提出了针对摩擦力的修正公式和设计措施。最后设计了关于自平衡式惯容器的构件实验和振动台试验验证了自平衡惯容器的理论模型的准确性和减震可行性。本文的研究主要包括以下内容：

(1) 介绍利用附加质量的惯性力的减振的机理。详细阐述了传统丝杠类惯容器的局限性，引出自平衡惯容器，同时解释丝杠类惯容器实现自平衡的机理。建立含理想惯容系统的单自由度体系的运动方程，并根据定点理论获得理想惯容系统的优化设计参数。

(2) 提出了更精细的摩擦力模型，将摩擦力分类为与外荷载无关的常摩擦和与荷载无关的载摩擦。建立了含该摩擦力模型的带惯容系统的单自由度体系的运行学方程。按照摩擦力的相对大小区分了大摩擦和小摩擦，并作为常摩擦的等效线性化的适用范围，并研究在小摩擦对系统位移响应的影响。结果表明，小摩擦会增大名义上的表观质量和阻尼，因此需要适当调整连接刚度。

(3) 针对自平衡惯容器可能出现的质量偏差、导程偏差所引起的偶然的非自平衡，建立了非自平衡条件下系统的运动方程，获得非自平衡下等效表观质量的计算公式。同时探究非自平衡对惯容系统的调谐作用、阻尼耗能作用的影响。结果表明，非自平衡会在一定程度上破坏调谐效果，降低阻尼耗能效率。但同时，敏感性分析表明，从严控制表观质量偏差在 0.5%以内、导程偏差在 0.2%以内能够达到预期的控制效果。

(4) 针对大摩擦，主要是大的常摩擦，本文在 MATLAB 中建立了 Simulink 仿真模型，其中摩擦力模型考虑了大摩擦作用引起惯容器的卡顿现象。当惯容器发生卡顿时，惯容器的运动速度和加速度同时强制归零。模拟结果表明，过大的摩擦不但没有起到所谓摩擦耗能的有利作用，反而阻碍了惯容器的正常调谐与耗能作用，减振效果大大降低。同时证明，这种影响对于大振幅的激励，或者频率

靠近结构主频的激励会适当减弱。最后建议，对于控制大幅振动时应当适当增大刚度比；而对于小幅振动则应尽可能减小摩擦，而不是修正设计参数。

（5）设计构件实验以验证摩擦力模型的准确性。推导了惯容器运动过程中因摩擦造成卡顿的临界摩擦，并在表观质量的识别结果中观察到了卡顿的现象。实验数据表明，惯容器存在常摩擦与载摩擦，其中常摩擦的大小与惯容器表观质量成正比，载摩擦会随着润滑油的分布变化较大。惯容器发生卡顿时，常摩擦与载摩擦均有增大的现象。对于充分润滑且没有发生卡顿的惯容器来说，常摩擦和载摩擦较稳定。非自平衡对惯容系统的滞回曲线有影响。

（6）设计振动台试验以验证理论模型的准确性。通过实验数据，发现识别的主体结构的抗侧刚度大大减小，分析认为这是由于摩擦、连接角钢、拉索、相位延迟等因素引起的。分析主体结构的位移减振率，验证了自平衡惯容系统的可行性和有效性。

**关键词：** 自平衡、被动控制、惯容系统、数值模拟、摩擦效应、参数分析

## ABSTRACT

As a new structural vibration mitigation device, the inerter system has the advantages of small burden to the primary structure, better tuning effect, and increased efficiency of damping. Among all kinds of inerter devices, the inerter using screw has a higher amplification efficiency. Thus, it is most common and has corresponding engineering applications. However, this conventional screw-type inerter has a complicated connection to primary structure due to an unbalanced torque at the end of the screw. We propose to divide the flywheel into two same flywheels, and adjust the thread direction of the screw to make the two flywheels rotate in opposite directions to achieve the same tuning effect of a conventional inerter. At the same time, it makes the unbalanced torque at the end of the screw canceled, so that the screw achieves self-balancing. The connection of the self-balanced inerter system to primary structure will be simplified, and a prestressed cable connection with self-resetting capability can be used. Nevertheless, the friction of the self-balancing inerter will also seriously affect the tuning effect and energy dissipation capacity of the inerter system. In this paper, a more detailed friction model is established to simulate the self-balancing inerter in the real motion process, and a correction formula and design measures for the friction are proposed. The research in this paper mainly includes the following:

(1) Introduce the mechanism of vibration reduction using inertial force of additional mass. The limitations of the traditional screw-type inerter are elaborated in detail, and the self-balanced inerter is derived. At the same time, the mechanism of self-balance of the screw-type inerter is explained. The motion equation of a single-degree-of-freedom system with an ideal inertia system is established, and the optimal design parameters of the ideal inertia system are obtained according to the fixed-point theory.

(2) A more detailed friction model is proposed, which classifies the friction force into load-independent friction and load-dependent friction. The motion equations of the single-degree-of-freedom system with inerter system including the detailed friction model are established. According to the relative magnitude of the friction force, large friction and small friction are distinguished, and the equivalent linearization range of load-independent friction is applicable, and the effect of small friction (both kinds of friction) on the displacement response of the system is studied. The results show that small friction will increase the nominal apparent mass and damping ratio, so the

connection stiffness needs to be increased appropriately.

(3) Aiming at the occasional non-self-balanced of the self-balanced inerter, the motion equation of the whole system under non-self-balanced conditions is established, and the calculation formula of equivalent apparent mass under non-self-balanced is obtained. The effects of non-self-balanced on the tuning effect and damping energy dissipation capacity of the inerter system were explored. The results show that non-self-balance will destroy the tuning effect to a certain extent and reduce the efficiency of damping energy consumption. But at the same time, sensitivity analysis shows that strict control of the apparent quality deviation within 0.5% and lead deviation within 0.2% can achieve the desired control effect.

(4) Aiming at large friction, mainly the large load-independent friction, a Simulink simulation model is established in MATLAB. The friction model takes into account the phenomenon of stick of inerter caused by large friction. When the inerter is stuck, the speed and acceleration of the inerter are forced to be zero at the certain time. The simulation results show that the excessive friction not only does not have the beneficial effect of so-called friction energy dissipation but also hinders the normal tuning effect and energy dissipation capacity of the inerter system, and the vibration reduction effect is greatly weakened. Meanwhile, it has been proved that this large friction effect will be moderately weakened for large amplitude excitations or excitations with frequencies close to the resonance frequency of the system. Eventually, it is suggested that the stiffness ratio should be appropriately increased when controlling the middle or large vibration; while the friction should be reduced as much as possible for the small vibration, instead of modifying the design parameters.

(5) Design the component experiments to verify the accuracy of the friction model. The critical friction causing the stick of inerter is deduced, and the phenomenon of stick is observed in the recognition result of apparent mass. The experimental data shows that there are load-independent friction and load-dependent friction in the inerter. The magnitude of the load-independent friction is proportional to the apparent mass of the inerter. The load-dependent friction will change greatly with the distribution of the lubricant. When the inerter is stuck, both the load-independent friction and load-dependent friction increase. For an inerter that is sufficiently lubricated and does not become stuck, load-independent friction and load-dependent friction are relatively stable. Non-self-balancing has an effect on the hysteresis curve of the inerter system.

(6) Design a shaking table test to verify the accuracy of the theoretical model.

Through experimental data, it was found that the lateral stiffness of the identified main structure was greatly reduced, and the analysis believed that this was due to friction, connecting angle steel, cable, phase delay and other factors. The displacement reduction rate of the main structure is analyzed, and the feasibility and effectiveness of the self-balanced inerter system are verified.

**Keywords:** self-balancing, passive control, inerter system, numerical simulation, friction effect, parameter analysis

## 目录

摘要 .....	I
ABSTRACT.....	III
第 1 章 绪论.....	1
1.1 引言.....	1
1.2 传统惯容系统的国内外研究综述.....	3
1.2.1 惯容器的提出.....	3
1.2.2 惯容器的种类.....	4
1.2.3 惯容器及惯容系统的实际应用.....	5
1.2.4 惯容系统设计参数的优化方法.....	6
1.3 含非线性因素惯容系统的国内外研究综述.....	7
1.3.1 阻尼.....	7
1.3.2 惯容器的非线性.....	8
1.4 本文研究意义、方案和内容.....	9
1.4.1 本文的研究目的及意义.....	9
1.4.2 本文的技术路线.....	10
1.4.3 本文的主要研究内容.....	11
第 2 章 自平衡惯容器的线性模型及其定点理论.....	12
2.1 调谐质量阻尼器.....	12
2.1.1 附加惯性质量的调谐作用.....	12
2.1.2 定点理论.....	15
2.2 传统丝杠类惯容器.....	16
2.3 理想自平衡惯容器.....	17
2.3.1 传统惯容器的不足.....	17
2.3.2 自平衡惯容器的提出.....	18
2.3.3 带自平衡惯容器的单自由度框架模型.....	20
2.3.4 运动方程的无量纲化及传递函数.....	21
2.3.5 基于定点理论的理想自平衡惯容器参数优化.....	22
2.4 本章小结.....	25
第 3 章 考虑摩擦效应的自平衡惯容器非线性模型及参数修正.....	26
3.1 摩擦影响下自平衡惯容器运动学方程.....	26
3.1.1 摩擦力模型——常摩擦与载摩擦.....	26
3.1.2 常摩擦作用下惯容器的运动方程.....	28
3.1.3 载摩擦作用下惯容器的运动方程.....	29
3.1.4 常摩擦和载摩擦共同作用下惯容器的运动方程.....	30

3.2 摩擦影响下系统的响应.....	31
3.2.1 常摩擦.....	31
3.2.2 载摩擦作用下系统的传递函数.....	31
3.2.3 常摩擦作用下系统的响应.....	32
3.3.4 等效线性化的适用范围.....	35
3.3 非平衡条件下自平衡惯容器的敏感性分析.....	36
3.3.1 非平衡条件下自平衡惯容器的等效转动惯量.....	36
3.3.2 非平衡条件对等效转动惯量的影响.....	39
3.3.3 非平衡条件对自平衡惯容器调谐的影响.....	40
3.3.4 非自平衡条件对自平衡惯容器耗能的影响.....	44
3.3.5 量化分析表观质量和导程偏差的影响.....	48
3.4 针对小摩擦情况下优化参数的修正.....	49
3.4.1 载摩擦影响下系统的影响.....	49
3.4.2 常摩擦影响下对调谐的影响.....	51
3.4.3 小摩擦对阻尼器耗能的影响.....	52
3.5 针对大摩擦情况下优化参数的修正.....	54
3.5.1 大摩擦的仿真模型.....	54
3.5.2 大摩擦下系统仿真模型.....	55
3.5.3 大摩擦下系统的简谐受迫振动.....	57
3.5.4 大摩擦下系统地震波激励下的时程分析.....	58
3.5.5 大摩擦下系统地震波激励下的频域分析.....	64
3.5.6 大摩擦下惯容器设计参数的修正.....	65
3.6 本章小结.....	67
<b>第 4 章 自平衡惯容器实验研究.....</b>	<b>69</b>
4.1 构件实验模型.....	69
4.1.1 惯容器构件.....	69
4.1.2 构件实验设计.....	70
4.2 自平衡惯容器的摩擦力实验数据验证.....	73
4.2.1 自平衡惯容器摩擦力的来源.....	73
4.2.2 运动过程中的卡顿现象.....	73
4.2.3 自平衡惯容器的常摩擦.....	75
4.2.4 自平衡惯容器的载摩擦.....	77
4.3 自平衡惯容器的表观质量实验数据验证.....	80
4.3.1 大摩擦下等效表观质量及载摩擦的识别.....	80
4.3.2 摩擦力抑制非自平衡运动的作用.....	82
4.3.3 非自平衡运动状态.....	84
4.4 自平衡惯容器振动台试验数据验证.....	86
4.4.1 振动台试验及其简化模型.....	86

4.4.2 空框架参数识别.....	89
4.4.3 振动台试验数据及参数识别.....	90
4.4.4 惯容器的减震率及其可行性.....	93
4.5 本章小结.....	94
<b>第 5 章 结论与展望.....</b>	<b>96</b>
5.1 结论.....	96
5.2 展望.....	98
致谢.....	100
参考文献.....	102
个人简历、在读期间发表的学术论文与研究成果.....	109

# 第 1 章 绪论

## 1.1 引言

建筑在遭受地震、台风等自然灾害时会产生对结构不利的振动，造成安全性和舒适性的问题。随着社会的发展，建筑的功能更多样，形式更复杂，也可能会进一步增高，这也加大了结构振动控制的难度。为了解决这一矛盾，建筑中普遍地通过增设消能减震技术、减隔振技术等措施来降低结构中的不利振动，从而减小外部激励对于结构的损伤。消能减震技术在近期的发展和应用过程中日趋成熟，不仅可以应用于新建筑，对于已有建筑的加固<sup>[1]</sup>和震后结构的修复<sup>[2]</sup>也有良好的效果。例如，在汶川地震后，四川新建公共建筑大量地采用了消能减震技术；上海环球中心安装有风阻尼器；上海中心采用了电涡流调谐质量阻尼器等。同时需要引起重视的是，在极端情况下，这些消能减震装置也有可能失效甚至发生破坏，例如日本 311 地震后位于日本仙台市东北工业大学内一栋钢结构行政楼的油阻尼器发生了破坏<sup>[3]</sup>，谢丽宇等<sup>[4]</sup>分析认为这是在极端状况下楼层的位移超过了油阻尼器的行程所造成的。

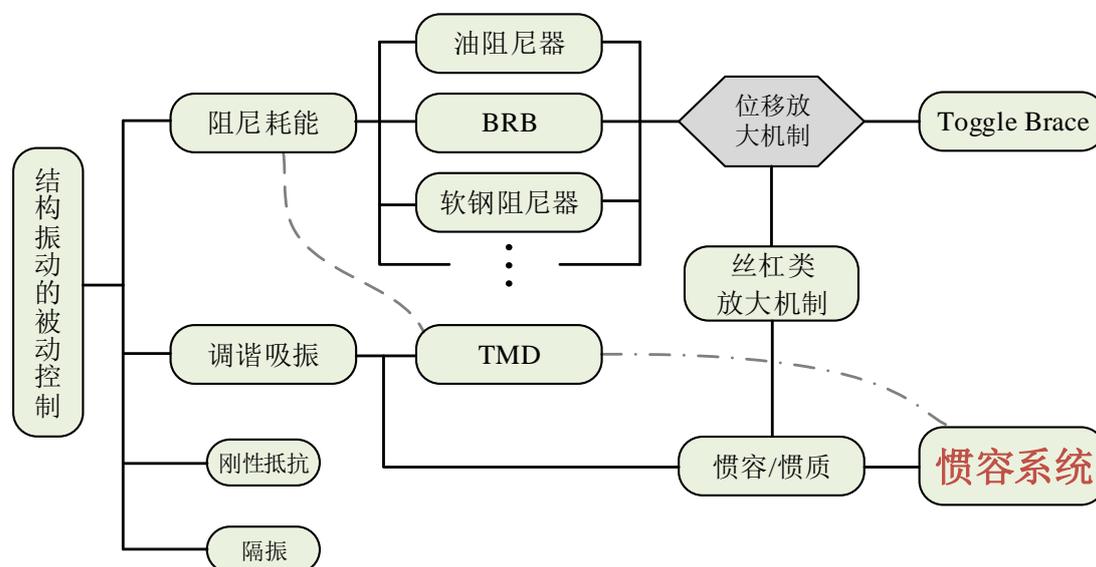


图 1.1 被动控制

1972 年，美国学者 Yao 提出了土木结构的结构振动控制概念<sup>[5]</sup>，抗震设计理念进入了控制论引导的发展阶段，并取得了大量的研究成果和实践经验<sup>[6-11]</sup>。控制的种类依据装置对外部输入能量的依赖程度分为主动控制、半主动控制以及被

动控制。主动控制与半主动控制在极端的灾害下可能出现能源供应上的问题，因此不依赖于外界输入能量的被动控制仍然在结构控制中占据很大的份额，同时具备构造简单、维护方便等优点。

如图 1.1 所示，被动控制的减振机理大体上可以分为以上几类，即阻尼耗能、调谐吸振、刚性抵抗和隔振。本文着重于阻尼耗能与调谐吸振两个方面。这两个方面不是完全分割开的两个大方向，应当结合来看。

阻尼耗能是指利用材料的内摩擦进行耗能，同时材料的塑性变形也能够起到一定的耗能作用，一般以热能的方式散发出去。这里以一般的油阻尼器最为典型。对于剪切型结构，油阻尼器利用的是层间位移（图 1.2(a)）；而对于弯曲型结构，则可利用结构最外侧的拉压变形进行耗能减振（图 1.2(b)）。为了提高阻尼器的耗能效果，可以采用一些位移放大措施<sup>[12-15]</sup>来增加阻尼器的工作行程，如采用 Toggle Brace（图 1.2(c)），或者齿轮齿条的形式（图 1.2(d)）。应当注意的是，这些位移放大机制在有效地提高阻尼器的行程和耗能能力的同时，也会由于机械制造上的缺陷或材料的特性而降低工作效率，如摩擦、背隙、弹塑性变形等。

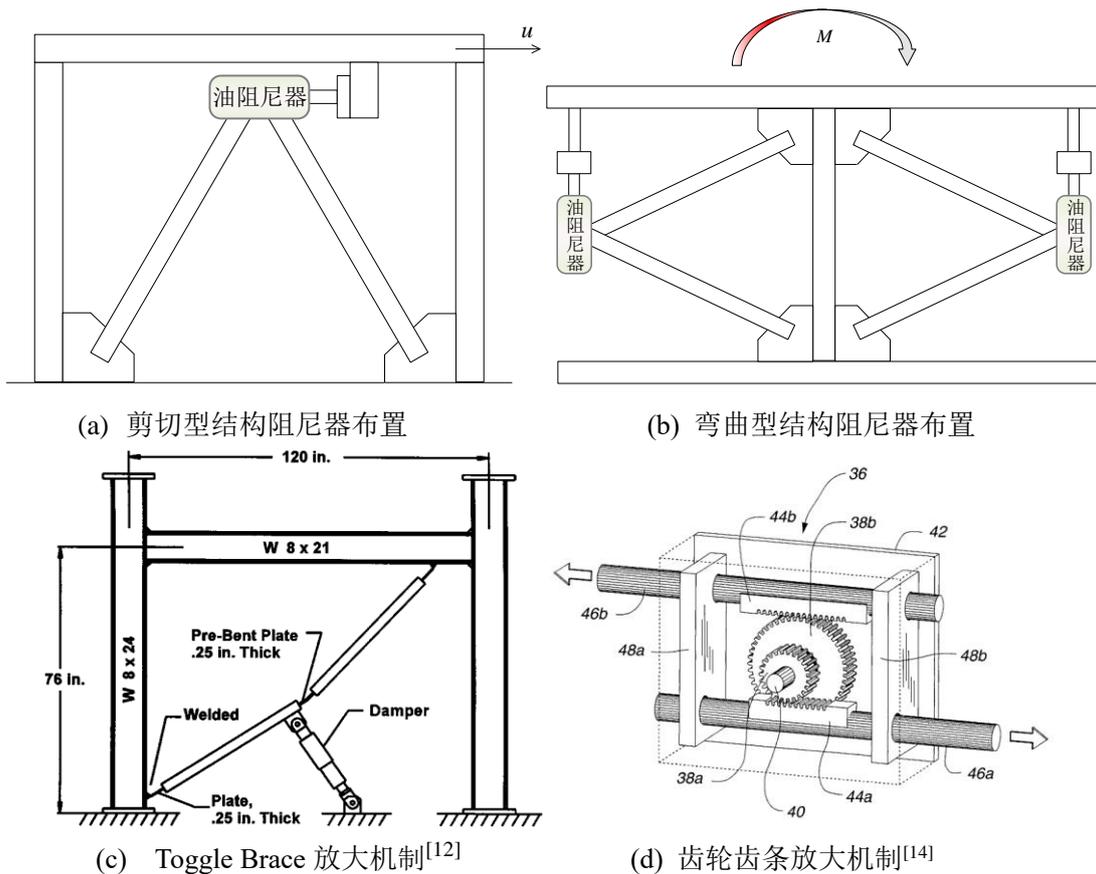


图 1.2 阻尼器布置方式与行程放大机制

图 1.2 (c)放大位移是通过从直线运动到直线运动的方式进行位移放大（在小位移条件下），而(d)则是通过从直线运动到旋转运动到直线运动的方式对位移

进行放大。而事实上，第二种方式可以获得更大的位移放大比，并且缺陷的影响也会比第一种方式要小。

利用弹簧和附加质量组成的动力吸振器在上个世纪初期就出现了，这种动力吸振器的特点在于，对于特定的外界激励的频率，主结构的振动完全被动力吸振器吸收，因而主结构不会发生振动。但是，当激励变化时，吸振器可能起不了抑制振动的效果。1928年，Ormondroyd指出，若在前述的动力吸振器上添加附加阻尼，主结构的最大振幅的最小值会随着阻尼有一个最优解<sup>[16]</sup>。随后Hahnkamm提出在动力吸振器的响应曲线上存在两个定点，可以假定阻尼为0和无穷来求解这两个定点坐标，给出了最优同调<sup>[17]</sup>。Den Hartog则优化推导了最优同调的公式，创造性地提出定点理论<sup>[18]</sup>，成为调谐吸振类减振装置设计的基本方法。Brock则根据定点等高的原理推导出了最优阻尼比<sup>[19]</sup>。至此，经典的调谐质量阻尼器（Tuned Mass Damper, TMD）被提出，从而不断地发展及完善和改进<sup>[20-22]</sup>，如多重TMD<sup>[23]</sup>、主动控制型TMD<sup>[24-26]</sup>等。

TMD对振动的抑制效果最终取决于附加质量的大小。一般地，TMD被用于控制风引起的结构振动时，使用质量为结构的一阶模态质量的2%的附加质量就可以有效地控制风致不利振动<sup>[22]</sup>。然而，对于幅度更大的地震激励来说，所需要的附加质量可能达到结构一阶模态质量的10%甚至更大<sup>[27]</sup>，此时附加质量还会成为结构的负担。此外，较大的附加质量还会对结构的加速度非常敏感<sup>[28]</sup>，这引起阻尼器过大的出力导致设备难以承受。在极端情况下，阻尼器和结构能否承受住过大的出力也是需要考虑的问题。

事实上，造成结构负担过重的原因在于附加质量的实际物理质量。如果能够采用一定的放大机制增大附加质量能够提供的惯性力，就可以一定程度上缓解这个问题。日本学者背户一登曾提出过利用杠杆来放大惯性力的一种装置<sup>[29]</sup>，使用的原理和上述图1.2(c)阻尼器的放大机制类似。同样地，这种装置也存在直线运动转为直线运动的放大设备的弊端。倘若采用图1.2(d)的放大机制，利用旋转的转动惯量来提供惯性力，即成惯容器最初的形式。

## 1.2 传统惯容系统的国内外研究综述

### 1.2.1 惯容器的提出

追溯到1973年，惯容器的原始样机由Kawamata提出<sup>[30]</sup>，是一种利用液体质量泵（Liquid Mass Pump）获得数倍于其中流体物理质量的表观质量的两节点力学元件。1999年，Arakaki<sup>[31,32]</sup>则利用滚珠丝杠制作了一种减振设备，将直线

运动转化为高速旋转，使得黏滞阻尼单元的耗能效率提高。彼时滚珠丝杠带来的惯性质量效应还未被得到利用。Saito 等<sup>[33-37]</sup>则对这种惯容元件和阻尼元件并联而成的减振设备进行了深入研究，首次明确利用了惯容质量和阻尼增效的作用。此后，在土木领域中惯容器开始广泛地应用<sup>[34,35,38]</sup>。

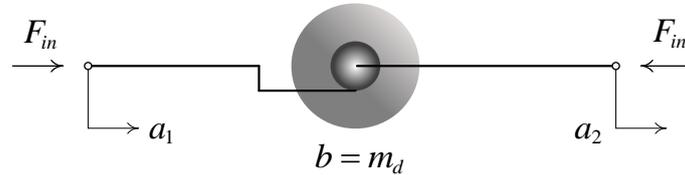


图 1.3 惯容器概念图

惯容器的概念如图 1.3 所示。惯容器中的惯质和 TMD 中的附加质量相似，都可以提供惯性力。但是两者的不同点在于，惯容器是两端点的惯性元件，其惯性力与惯容器两端的加速度差 $(a_2 - a_1)$ 有关；而 TMD 里的附加质量提供的惯性力只和参考系之间的相对加速度相关。惯容器的惯性力表达式为：

$$F_{in} = b(a_2 - a_1) \quad (1.1)$$

式中， $b$  为惯容器的惯质系数，具有和质量相同的量纲[kg]。当惯容器的一端接地，即 $a_1 = 0$ 时，惯容器的惯质和 TMD 中的附加质量的作用相同。

### 1.2.2 惯容器的种类

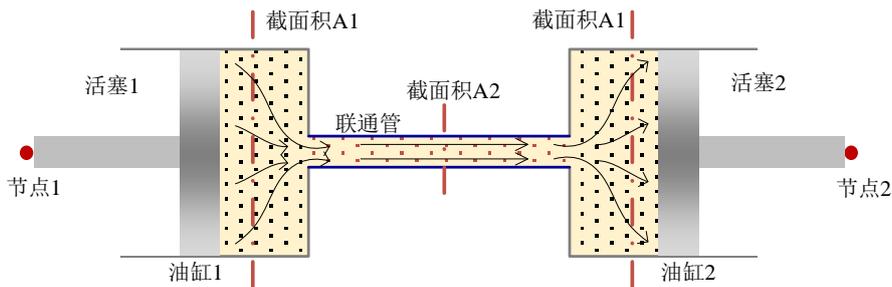


图 1.4 液压式惯容器

惯容器可根据其工作机理分为齿轮齿条式惯容器、丝杠式惯容器、液力式惯容器、液压式惯容器等。Kawamata 提出的液体质量泵是一类液压式惯容器，原理图如图 1.4 所示。可以写出液压式惯容器所提供的惯性力计算式为：

$$F_{in} = \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 m (a_2 - a_1) \quad (1.2)$$

其中  $A_1$  为油缸的截面积， $A_2$  为联通管的截面积。

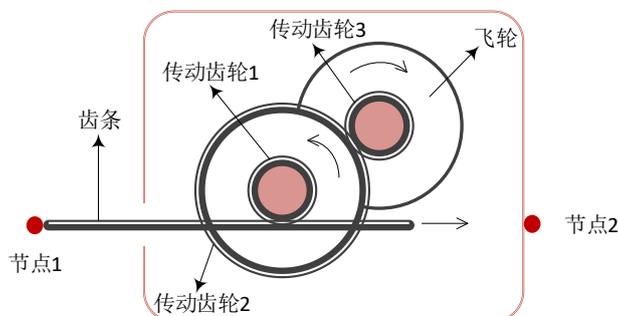


图 1.5 齿轮齿条式惯容器

齿轮齿条式惯容器的示意如图 1.5 所示<sup>[39,40]</sup>。惯容器的惯性力出力为：

$$F_{in} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \left( \frac{R}{r_3} \right)^2 \right] m (a_2 - a_1) \quad (1.3)$$

式中， $r_1$ ， $r_2$  和  $r_3$  分别为传动齿轮 1，传动齿轮 2 和传动齿轮 3 的半径， $R$  为飞轮半径， $m$  为飞轮的物理质量。可以看出，通过调整传动比，惯容器可以提供与本身物理质量相比大得多的惯性力<sup>[41,42]</sup>。

齿轮齿条在咬合中会产生背隙的问题，往复运动时的冲击和碰撞也会造成冲击和相位滞后的问题<sup>[43-45]</sup>，Arakaki 提出的丝杠式惯容器<sup>[31,32]</sup>可以很大程度上缓解这一问题。丝杠式惯容器则是利用丝杠的轴向运动带动由螺纹驱动飞轮旋转而产生惯性力。其原理将在第 2 章详细描述。

### 1.2.3 惯容器及惯容系统的实际应用

2004 年，出现了利用两端点的相对加速度来提供惯性力的元件的文献<sup>[46]</sup>，彼时多称之为旋转惯性质量。Saito 等率先分析了这种利用旋转惯性质量进行减振的作用机理，利用定点理论给出了设计用的优化参数<sup>[47]</sup>。Saito、Ikago 等将这种利用旋转惯性质量进行减振的设备命名为 TVMD<sup>[33,48]</sup>。随后，Ikago 等利用复特征值分析的方法解析了在多层结构中布置 TVMD，提出了相应的设计方法<sup>[49]</sup>，并将这些设计理论实际应用于日本仙台的一栋钢结构建筑上<sup>[50]</sup>。在这栋建筑中，Ikago 是逐层布置 TVMD 的，而 Ogino 等人则通过模态等效的原则跨层布置

TVMD, 利用更大的相对位移差达到了更低的耗资和更大的耗能能力<sup>[51]</sup>, 该结论也被实际应用于一栋 37 层的高层建筑中。惯容器在放大表观质量的同时, 通过连接弹簧的调谐能够实现阻尼耗能的增效<sup>[48]</sup>。赵志鹏、王超等人通过地震波和随机振动输入后结构能量耗散方式的分布验证了惯容器能够增加由减振系统所耗散的能量<sup>[52,53]</sup>。Zhang 等深入研究了惯容器增大阻尼器耗能的机理, 并通过设定目标阻尼的方式来设计减振装置<sup>[54]</sup>。Zhao 等认为粘滞阻尼在运动初期起到的控制效果较差, 因此增加了位移相关阻尼<sup>[55]</sup>。除了建筑结构, 在斜拉桥的索振动的控制上惯容器也能起到良好的效果<sup>[56]</sup>。

对于采用惯容器及配套的阻尼器、调谐弹簧组成的减振设备, 其减振机理包含了调谐、耗能两方面, 且不同于传统的 TMD 减振, 也不同于传统意义上的阻尼器, 且设计理论与方法也不相同, 因此笼统地称之为阻尼器或者惯容器并不合适。而实际上这种减振装置里已经完整地包含了动力学体系中的加速度、速度和位移项, 因此可以认为和一个单自由度体系类似成为单独的一个系统, 因此根据 Pan 等<sup>[57]</sup>的建议, 讲这些装置称为惯容系统。

最近, 随着城市韧性、震后快速恢复等概念的提出, 使用拉索对结构进行加固、配合中心消能构件、提升延性等可以起到重要的作用<sup>[58-60]</sup>, 这种纯拉力系统具有安装维护方便、造价便宜、具有自复位能力等优点。若利用拉索连接消能减振装置, 则需要装置具有自平衡的性质。然而, 利用丝杠实现惯容的方式并不具备自平衡的条件, 因为只利用单个飞轮提供惯性力势必造成丝杠端部的扭矩不为零, 拉索无法限制丝杠上的扭矩。不止如此, 对于实际的三向振动的地震来说, 由于丝杠运动方向的限制, 传统的惯容器对垂直于丝杠轴线方向的振动会产生极大的反力, 从而破坏丝杠。对此, Nakminami 等<sup>[61]</sup>则采用球铰的连接方式来消除另外两个方向位移错动的影响, 但是这样同时也会带来制造上的复杂。Xie 等则参考了齿轮齿条的模式, 利用拉索驱动钢轴来带动飞轮旋转, 实现了拉索与惯容系统相结合的减振系统<sup>[62]</sup>。但这种方式的质量放大效应有限, 并且由于拉索的拉伸刚度过大而起不到对惯容器的调谐作用, 相当于只能与结构共同承担地面激励的荷载, 只具备阻尼放大功能; 而且这种阻尼放大也并非依靠惯容器的调谐作用而来。真正自平衡的惯容系统还未见报道。

#### 1.2.4 惯容系统设计参数的优化方法

最先的对于惯容系统参数优化是由 Saito、Ikago 等人依据定点理论推导得来的<sup>[33,48]</sup>, 经过实验研究证明有效<sup>[48]</sup>。定点理论可以给出分别控制位移和控制加速度时优化参数的取值。但是, 当考虑主结构的本征阻尼时, 定点理论将失效, 并

且质量比、刚度比和阻尼比三个参数中只有当两个参数确定时,另外一个参数才有最优解<sup>[54]</sup>;另一方面,在最优化的参数下,惯容系统或者主结构局部连接部位可能不能承受惯容器的总出力而发生破坏。同时,定点理论只能说明控制的最佳效果取决于质量比,但是无法给出一个合适的质量比。和 TMD 类似,惯容系统在减振上只对特定的频率有极佳的减振效果,适应性较窄。

对于质量比的优化,李超<sup>[63]</sup>等则利用遗传算法求解最优的设计参数,在考虑结构本征阻尼的同时考虑到共振频率和非共振频率的影响。但最终的优化结果上中,质量比的优化最终都达到优化范围的上界值,与定点理论的基本思想没有太大的差别。换言之,在计算前限定最大质量比的取值范围还是完全由人为或者现场条件来确定。Zhang 和 Pan 等<sup>[57,64]</sup>则是通过增加成本控制这一约束条件,即考虑限制惯容器总体的出力以达到相同的减振效果来降低成本。潘超,赵志鹏<sup>[52,65,66]</sup>等提出也可以减振率目标来对作为一个限制条件。利用附加的目标来限制质量比的最大值是一种有效的方法,符合了基于性能需求的优化设计方法。Xie 等<sup>[62]</sup>在拉索惯容系统中采用的优化设计方法也是基于性能需求的优化设计方法。Chen<sup>[67]</sup>等则是将人致激励引起的结构舒适度问题纳入优化参数中,即以控制加速度响应为新增的目标进行优化。Zhao<sup>[68]</sup>等也将舒适度作为优化目标对颗粒惯容系统进行参数优化设计。Brzeski<sup>[69]</sup>等则利用舒适度作为优化参数在实验上研究惯性参数变化对惯容系统的影响。唯一的问题是这些文献在优化设计参数时采用的激励均为随机激励,没有讨论在各种地震激励下采用的优化参数的惯容系统的减振效果如何。

也有学者从刚度比和阻尼比的角度进行参数设计。Ishimaru 等<sup>[70]</sup>认为在实际工程中,附加质量比往往因为外界因素被限制,因此应当利用结构自振频率的几何平均法则来对刚度比进行调整,这样在设计上更为直观和方便。Zhang 等<sup>[54]</sup>利用设定目标阻尼以及惯容器对阻尼耗能效率提升的角度来对惯容系统进行参数设计,以求惯容器能够消耗更多的能量。问题在于,尽管惯容器可以提升阻尼的耗能的量和惯容系统耗能在总耗能中的占比,阻尼器耗能的量增大也往往意味着结构具有更大的位移,其实际结构振动控制效果有待商榷。换言之,评价惯容系统的耗能效果时不应当认为惯容系统的位移越大越好。

## 1.3 含非线性因素惯容系统的国内外研究综述

### 1.3.1 阻尼

本文实验中使用的惯容系统的耗能元件采用的是电涡流阻尼。虽然电涡流阻

尼不是本文的重点,但应当了解电涡流阻尼的基本特性,及其线性化的合理性。电涡流阻尼是一种利用导体切割磁感线是产生的电涡流生热进行耗能的新型的阻尼机制,具有非接触、机械磨损小、使用寿命长等优点<sup>[71-73]</sup>。电涡流阻尼的大小与导体盘和磁体盘的材料、盘的厚度、磁极的对数、相对转速、盘之间的间距大小等有关。通常认为电涡流阻尼在转速较低下具有良好的线性关系<sup>[74-80]</sup>,因此可以认为电涡流阻尼具有和粘滞阻尼相似的性质。但是这种线性关系的前提是转速稳定;对于地震这种激励频率不稳定的输入来说,电涡流阻尼可能会因为其趋肤效应和电流相位滞后呈现出较强的非线性<sup>[81]</sup>,需要进一步研究。

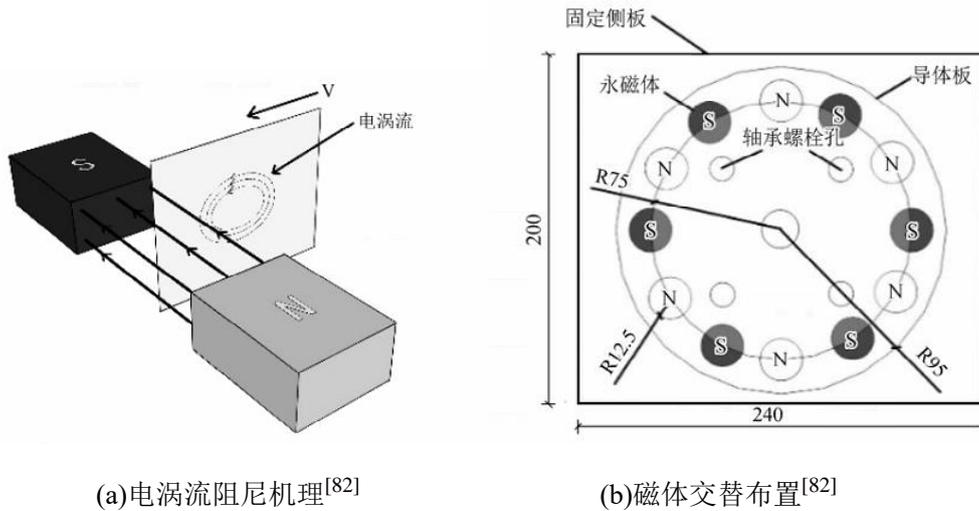


图 1.6 电涡流阻尼及磁体布置

### 1.3.2 惯容器的非线性

惯容器的非线性因素主要来源于偶然的非自平衡、摩擦力、弹塑性变形和背隙等<sup>[83]</sup>。对于偶然的非自平衡,主要是由于丝杠和飞轮制作上的误差导致丝杠不能实现完全的自平衡,从而影响了等效表观质量。由于丝杠的转动惯量相对飞轮而言非常小,可能会造成等效表观质量的不稳定。由于自平衡惯容器未见报道,这方面的研究也没有相应的报道。

对于弹塑性变形和背隙, Wang 等<sup>[83]</sup>从实验后的数据中没有发现这些现象,背隙可以通过预紧力除,而弹塑性变形也相对较小,因此本文非线性分析的重点落在的摩擦力上。梁玉鹏等<sup>[84]</sup>总结认为丝杠的摩擦力来源于润滑剂、接触面,滚珠丝杠中还有滚珠的打滑、滚珠间滑动和滚珠的返回器的摩擦等。许多的文献<sup>[83,85-87]</sup>在考虑惯容器的摩擦时都采用符号函数来模拟; Brzeski 使用的反正切函数作为摩擦力模型<sup>[88]</sup>。美国学者哈里斯等<sup>[89,90]</sup>详细分析了轴承中摩擦力的产生原因和计算的理论和经验公式,指出丝杠的总摩擦力也和外界荷载有关,并不是一

个定值。Karnopp 等<sup>[89,90]</sup>指出,使用符号函数模拟摩擦力在数值计算中会造成不稳定;且设定过于理想化,因为在数值计算的迭代过程中速度是不可能为零的。Lopez 等<sup>[92]</sup>指出,较大的摩擦力会导致运动的卡顿;是运动刚好不产生卡顿存在一个临界摩擦力。

分析摩擦力的影响,Wang 等<sup>[83]</sup>认为摩擦力会轻微地影响惯容器在汽车悬架中的性能;但是文中没有强调摩擦力和其他力(主要是惯容器的惯性力)之间的关系,需要进一步研究。Brzeski 等<sup>[88]</sup>分析认为过大的摩擦力会导致含惯容系统的结构的频响函数的双峰变为单峰,大大削弱了耗能能力和调谐效果。但是,一方面文中使用的是含惯容器的 TMD,结论只能作为参考;另一方面由于文章探究的其他的因素过多,取的摩擦力的值也较少,也没有阐述大约何时双峰会减少为单峰。Papageorgiou 等<sup>[85]</sup>制作了两种惯容器的样机,并考虑了摩擦力和背隙的影响,指出在一定频率范围内(1~10Hz),样机的力学性能接近理想的惯容器,偏差最主要来源于摩擦力。但是对于大幅振动和小幅振动,这个频率范围还是不具有足够的说服力。同时,上述文献也没有涉及到运动幅值对摩擦效应的影响。

## 1.4 本文研究意义、方案和内容

### 1.4.1 本文的研究目的及意义

本文以自平衡惯容器为研究对象。基于拉索式惯容系统,本文提出的自平衡惯容器的特点在于采用双飞轮反向旋转,在提供相同的惯性力的同时将丝杠两端的扭矩减为零,可以大大降低惯容系统与主体结构连接难度,采用拉索的连接方式也可以使得维修更换更加方便,降低造价;同时也将丝杠受力部分扭矩减半。

由于机械装置普遍存在摩擦力,本文根据前人的研究结果,提出更加精细的摩擦力模型,建立仿真数值模型。利用仿真数值模型和定点理论的优化结果研究不同相对大小,不同种类的摩擦力对惯容系统的调谐作用和耗能效率的影响,并提出相应的修正和实际工程应用中的措施和建议。设计构件实验以验证摩擦力模型,设计振动台模型验证自平衡惯容系统理论模型的正确性,一定程度上验证自平衡惯容系统的减振效果。综上,本课题具有一定的实际应用价值。

### 1.4.2 本文的技术路线

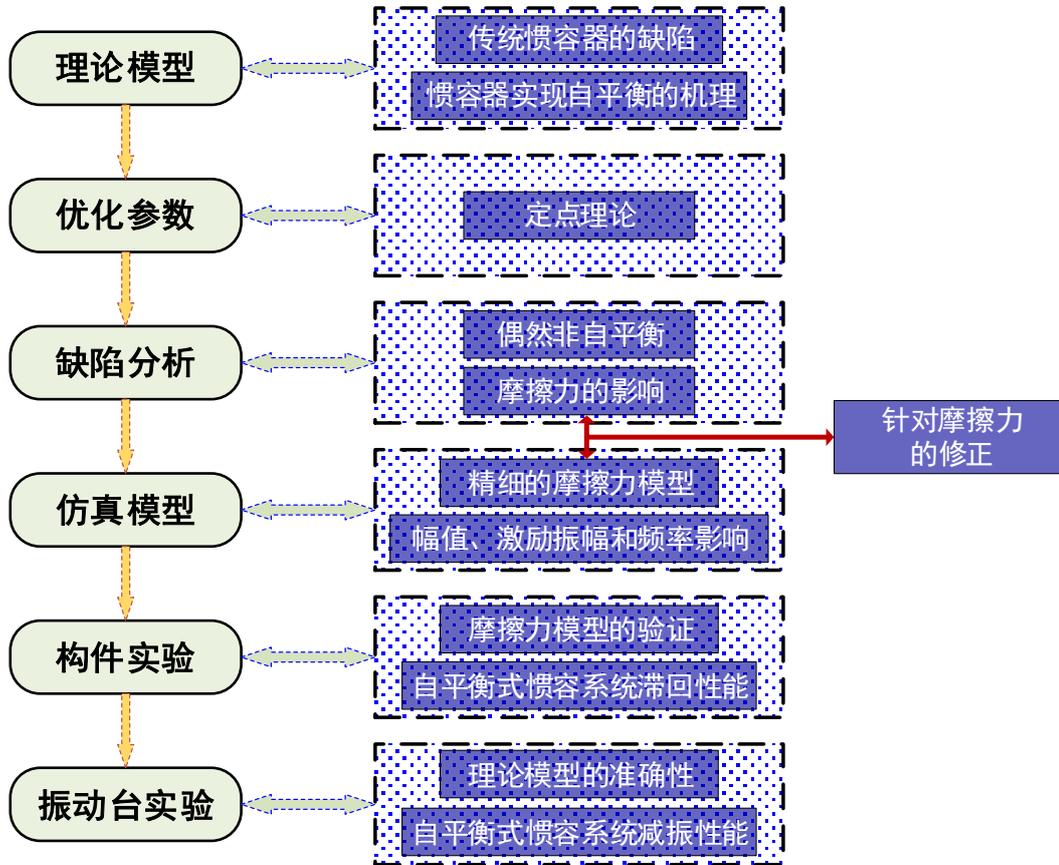


图 1.7 技术路线图

首先阐述传统的丝杠类惯容器在连接方式、非自平衡性上的局限性，指出其根本原因在于丝杠末端的扭矩问题。针对这一问题，阐述自平衡惯容器的机理，并根据定点理论进行设计参数的初步优化。根据机械制造上的缺陷，分析自平衡惯容器的偶然非自平衡及非自平衡的影响；根据摩擦力产生的机理建立更精细的摩擦力模型。在仿真模型中建立含该摩擦力模型的仿真程序，探究摩擦力幅值、外界激励性质的变化对减振性能的影响程度；同时针对摩擦力对定点理论获得的优化参数进行修正。

设计构件实验以验证建立的精细的摩擦力模型的准确性，同时分析自平衡惯容系统整体的滞回性能，以及非自平衡和摩擦力对滞回性能的影响。设计振动台实验以验证理论模型的准确性，同时分析本文的自平衡惯容系统的减振率，证明其可行性和有效性。

综上，本文的技术路线总结为上图 1.7。

### 1.4.3 本文的主要研究内容

本文的主要内容及章节安排如下。

第一章为绪论。总结叙述了结构振动控制中的被动控制。将被动控制的机能主要分为调谐和阻尼两大方面，详细介绍了阻尼耗能的放大机制，和附加质量的吸振调谐作用，引出惯容器的概念。详细叙述了已有的惯容器的种类和实际应用情况，以及设计参数的优化。指出自平衡惯容器中的非线性因素。最后对本文的研究意义、技术路线进行介绍。

第二章为自平衡惯容器参数设计基本原理。首先阐述附加质量调谐吸振的原理，介绍定点理论获得最优同调和最优阻尼比的过程。然后叙述传统惯容器的局限性，从而引出自平衡惯容器的概念，并利用定点理论对含惯容系统的单自由度体系结构进行设计参数的优化。

第三章为自平衡惯容器非线性及参数修正。首先建立新的摩擦力模型，即之和惯容器其他参数有关而不随外荷载而变化的固定的常摩擦和随外荷载变化的载摩擦。建立含常摩擦和载摩擦的整体含惯容系统的单自由度体系的运动学方程。在此基础上，探究摩擦力较小时常摩擦和载摩擦对系统位移响应的影响，限定小摩擦的适用范围。而大摩擦则建立考虑惯容器卡顿现象的摩擦力模型，从而获得系统的仿真模型，并分析系统在大摩擦影响下的响应。另一方面，考虑自平衡惯容器的偶然非自平衡现象，对此因素进行敏感性分析。

第四章为自平衡惯容器实验研究。第一部分为构件实验研究，首先考虑摩擦力造成惯容器在运动过程中的卡顿，推导出临界常摩擦力。然后验证摩擦力模型的准确性。同时，验证非自平衡下构件的滞回性能以及预测公式的准确性。第二部分为振动台实验，主要是验证整体系统的理论模型的准确性，然后计算分析惯容系统的减震率，验证其可行性和有效性。

第五章为结论与展望。本章总结归纳全文的研究结论，并对以后的理论和实验研究方向进行展望。在综合理论分析和结构试验成果的基础上，进一步对自平衡惯容系统的工程应用提出合理的建议和措施。

## 第 2 章 自平衡惯容器的线性模型及其定点理论

本章从基本的力学原理出发，首先阐述附加质量的调谐作用，引申到传统惯容器的调谐减震作用。然后，提出了自平衡惯容器实现自平衡的基本原理，并建立相应的运动方程。和传统的惯容系统一致，理想的自平衡惯容器也由惯容单元、阻尼单元和弹簧单元组合而成。一般地，惯容单元与阻尼单元相并联，再与弹簧单元串联，这样弹簧可以对惯容和阻尼单元的并联的组件进行调谐，放大了阻尼作用。针对这种经典的惯容减振装置，本章介绍了利用定点理论求解最优参数的过程。

### 2.1 调谐质量阻尼器

#### 2.1.1 附加惯性质量的调谐作用

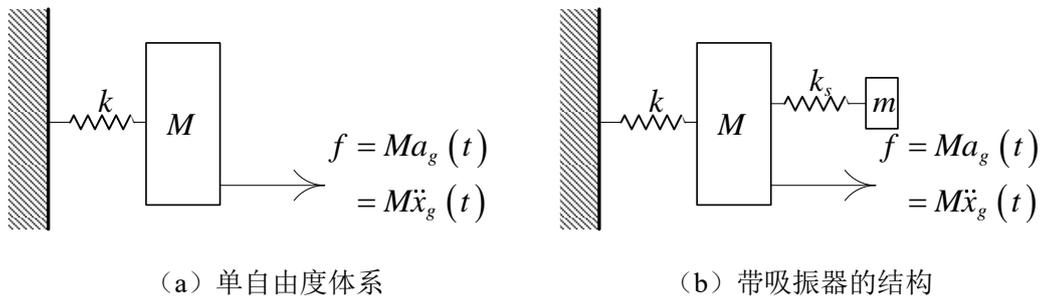


图 2.1 动力吸振器作用机理示意

相比调谐质量阻尼器 (TMD)，动力吸振器这一名词更为直观地表现了 TMD 的减振机理。上图 2.1(a) 为一简单的单自由度系统，一个质量为  $M$  的块体被一根劲度系数为  $k$  的弹簧连接于地面上。假设块体相对于地面的位移为  $x(t)$ ，在外界力  $Ma_g$  的作用下，块体的运动方程为：

$$M\ddot{x} + kx = Ma_g \quad (2.1)$$

对(2.1)式进行拉普拉斯变换，整理可解块体的传递函数为：

$$H(i\omega) = \frac{L[x(t)]}{L[a_g(t)]} \Big|_{s=i\omega} = \frac{1}{s^2 + \omega_f^2} \Big|_{s=i\omega} = \frac{1}{-\omega^2 + \omega_f^2} \quad (2.2)$$

上式中  $L(\cdot)$  代表对括号内函数进行拉普拉斯变换,  $\omega_f$  为系统的自振圆频率。显然可以发现, 在外部激励  $\omega = \omega_f$  时, 结构发生共振导致结构幅值达到无穷。若在原本的单自由度体系上增加一个附加质量块, 并用连接刚度为  $k_s$  的弹簧连接于原结构上, 如图 2.1(b) 所示, 假设附加质量块相对地面的位移为  $x_m(t)$ , 同样可以写出在外界激励下系统的运动方程为:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + kx - k_s(x_m - x) = Ma_g \\ m\ddot{x}_m + k_s(x_m - x) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

对(2.3)式进行拉普拉斯变换, 整理可解系统的传递函数为:

$$\begin{cases} H_M(i\omega) = \frac{L[x(t)]}{L[a_g(t)]} \Big|_{s=i\omega} = \frac{M(ms^2 + k_s)}{Mms^4 + (Mk_s + mk_s + km)s^2 + kk_s} \Big|_{s=i\omega} \\ H_m(i\omega) = \frac{L[x_m(t)]}{L[a_g(t)]} \Big|_{s=i\omega} = \frac{Mk_s}{Mms^4 + (Mk_s + mk_s + km)s^2 + kk_s} \Big|_{s=i\omega} \end{cases} \quad (2.4)$$

特别地, 当外界激励的圆频率为  $\omega = \sqrt{k_s/m}$  时, 主体结构传递函数的值为 0, 也即主体结构将不会发生振动, 主体结构的振动恰好被附加质量块全部吸收, 这就是动力吸振器。

但是应当注意的是, 图 2.1(b) 所示的附加质量还不是严格意义上的动力吸振器或 TMD。一方面, 可以发现式(2.4)的分母部分仍旧可能为 0, 可以解得此时外界激励的圆频率为:

$$\omega^2 = \frac{Mk_s + mk + mk_s \pm \sqrt{(Mk_s + mk + mk_s)^2 - 4Mmkk_s}}{2Mm} \quad (2.5)$$

此时, 结构将发生共振, 幅值为无穷大。另一方面, 由于未考虑阻尼, 整个系统为保守系统, 因此不能耗散输入结构的能量, 并且减震只能针对特定输入的频率。

为了有效耗散外界激励输入系统的能量, 在图 2.1(b) 的基础上引入阻尼元件如下图 2.2 所示, 其阻尼大小为  $c_d$ 。红色虚线框内即为一种经典的 TMD。

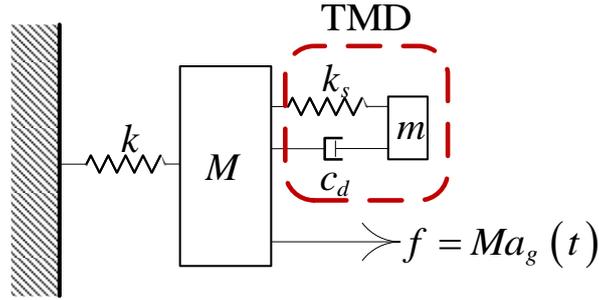


图 2.2 调谐质量阻尼器

类似地，可以写出该系统的动力学运动方程：

$$\begin{cases} M\ddot{x} + kx - k_s(x_m - x) - c_d(\dot{x}_m - \dot{x}) = Ma_g \\ m\ddot{x}_m + c_d(\dot{x}_m - \dot{x}) + k_s(x_m - x) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

拉普拉斯变换后可解得系统的传递函数

$$\begin{cases} H_M(i\omega) = \frac{M(ms^2 + c_d s + k_s)}{Mms^4 + c_d(M+m)s^3 + (Mk_s + mk_s + km)s^2 + c_d ks + kk_s} \Big|_{s=i\omega} \\ H_m(i\omega) = \frac{M(c_d s + k_s)}{Mms^4 + c_d(M+m)s^3 + (Mk_s + mk_s + km)s^2 + c_d ks + kk_s} \Big|_{s=i\omega} \end{cases} \quad (2.7)$$

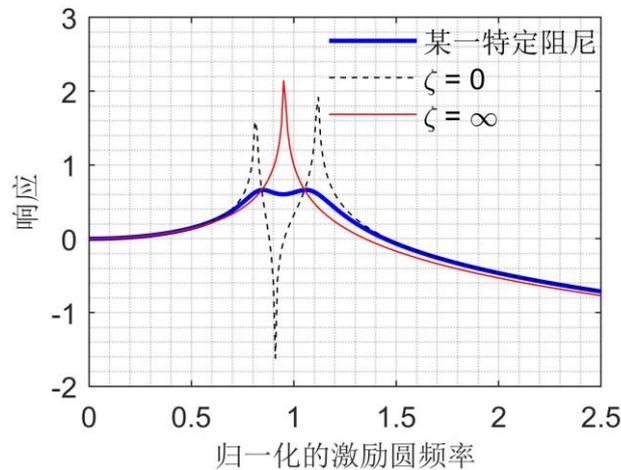


图 2.3 响应函数图像

在这里，对于附加阻尼  $c_d$ ，当取为 0，某一特定个值以及无穷大三种情况时，可以作出主体结构的响应函数图像，如图 2.3 所示。其中  $M=1$ ， $m=0.1$ ， $k=1$ ， $k_s=0.0826$ ， $c_d$  的特定值为 0.0336。从图中可以看到可能有两个定点，无论附加

阻尼如何变化，主体结构响应函数适重都会通过这两点。这一结论将在下一小节的定点理论中证明，并介绍定点理论提出经典 TMD 的参数设计的结论。

### 2.1.2 定点理论

一般地，一个单自由度体系配置了一个 TMD 时，随着附加阻尼的变化，主体结构的传递函数图像始终会穿越两个定点。定点是指在有附加阻尼的振动系统的频响函数上有与阻尼无关的特定的点，即无论阻尼如何变化，频响函数曲线必然通过该定点。一般地，一个含惯容器的系统的传递函数可以写成：

$$H(\omega) = \frac{A(\omega) + \alpha B(\omega)}{C(\omega) + \alpha D(\omega)} \quad (2.8)$$

其中， $\alpha$  为系统的阻尼元素，一般即系统的阻尼比  $\zeta$ 。 $A(\omega)$ 、 $C(\omega)$  是传递函数中不含阻尼元素的系数项， $B(\omega)$ 、 $D(\omega)$  为传递函数中包含阻尼元素的系数项。一般情况下，可以找到至少一个频率  $\omega_0$ ，使得：

$$\frac{A(\omega_0)}{C(\omega_0)} = \frac{B(\omega_0)}{D(\omega_0)} \quad (2.9)$$

因此，在  $\omega = \omega_0$  处，始终有：

$$H(\omega_0) \Big|_{\alpha \text{ 为任意值}} = \frac{A(\omega_0) + \alpha B(\omega_0)}{C(\omega_0) + \alpha D(\omega_0)} = \frac{A(\omega_0)}{C(\omega_0)} = \text{定值} \quad (2.10)$$

针对经典 TMD 的根据定点理论推导最优设计参数的文献有很多，本文不再具体阐述其求解方法，只陈述求解的思路：

第一步：求解定点的坐标位置；

第二步：令两定点的高度相等，此时传递函数的最大值达到最小，TMD 的控制效果是最好的。整理方程求得 TMD 的最优连接刚度；

第三步：在两定点的高度相等后，令在这两个定点关于频率变化的导数为 0，使得定点即为峰值点，整理求得 TMD 的最优附加阻尼。

经典 TMD 的设计参数如下式：

$$\frac{\sqrt{\frac{k_s}{m}}}{\sqrt{\frac{k}{M}}} = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \quad \zeta = \frac{c_d}{2m\sqrt{\frac{k}{M}}} = \sqrt{\frac{3\frac{m}{M}}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)^3}} \quad (2.11)$$

当 TMD 的设计参数均取为最优时，可以求得主体结构的振幅比为：

$$\frac{x}{x_{st}} = \sqrt{\frac{2M + m}{m}} = \sqrt{\frac{2 + \frac{m}{M}}{\frac{m}{M}}} \quad (2.12)$$

从式(2.12)可以看出，TMD 对于位移幅值的减震比仅仅依赖于附加质量相对于主体质量之比的大小（后称为质量比），因此质量比是 TMD 参数设计中最重要。为了提高减振效果，提高质量比是核心的措施。对于较小的振动。通常只需要将质量比取为 0.02 左右就可以达到很好的控制效果<sup>[22]</sup>。但是对于高烈度地区的结构，就需要更大的质量比。然而，过大的质量比会是的整体结构变得过重，且过重的附加质量会使结构的加速度控制效果不佳<sup>[28]</sup>。

## 2.2 传统丝杠类惯容器

传统的丝杠类惯容器提供的惯质和 TMD 中的附加质量不同点在于惯容器具有质量放大效应。TMD 的附加质量就是附加的物理质量，但是惯容器中的惯质是通过放大后的表观质量，表观质量可以通过调节参数获得数十倍甚至更大与其本身的物理质量，这里以飞轮丝杠式惯容器来说明。

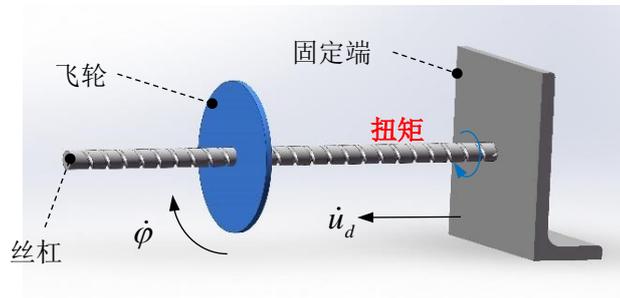


图 2.4 传统惯容器示意图

如图 2.4 所示一经典飞轮丝杠式惯容器，丝杠被固定于一固定端上以防止丝杠产生自转；飞轮被丝杠驱动，但只能绕轴自转，不能发生沿丝杠轴线方向的运动。假设固定端推动沿丝杠轴向的相对运动速度为  $\dot{u}_d$ ，则飞轮绕轴旋转的速度为

$\dot{\phi} = 2\pi\dot{u}_d/L_d$ ，其中  $L_d$  为丝杠的导程。假设飞轮的质量为  $m$ ，其直径为  $R$ ，则飞轮的转动惯量  $J = mR^2/2$ 。丝杠轴线上的惯性力就是惯容器的出力，该出力做功应与飞轮旋转做功相等，有：

$$L_d \cdot F = 2\pi \cdot J\ddot{\phi} \quad (2.13)$$

将式(1.1)带入式(2.13)中，由于丝杠的加速度差和飞轮的角加速度有线性关系：

$$\frac{u}{\phi} = \frac{\dot{u}}{\dot{\phi}} = \frac{\ddot{u}}{\ddot{\phi}} = \frac{L_d}{2\pi} \quad (2.14)$$

可解得该飞轮丝杠式惯容器的表观质量为：

$$b = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi R}{L_d} \right)^2 \right] m = \rho m \quad (2.15)$$

式(2.15)中的  $\rho$  即为飞轮的物理质量  $m$  被放大的倍数。可以看出，飞轮丝杠式惯容器可以通过增大飞轮盘的直径或者减小丝杠的导程来放大飞轮盘原本的物理质量。

前述 TMD 对结构的调谐作用和减震效果取决于质量比，若将附加质量替换为惯容器，则决定惯容器的减震效果的质量比利用的是惯容器的惯质  $b$ ，而惯容器本身的物理质量则相对很小，对原结构的不利影响也会大大减轻。

由于惯容器和 TMD 具有相似性，很容易想到可以利用定点理论来设计与惯容器相关的结构设计参数，这些将在下一节展开。

## 2.3 理想自平衡惯容器

### 2.3.1 传统惯容器的不足

显然，传统惯容器可以很好地解决 TMD 的质量比难以提高的问题，但传统惯容器在连接构造上较为复杂，这是因为传统惯容器在连接端上存在扭矩。在图 2.4 所示的传统惯容器中，由于丝杠右端固定，因此在飞轮和固定端之间的丝杠会产生扭矩。扭矩的大小由下式决定：

$$J_F \ddot{\phi} = T_{SF} \quad (2.16)$$

其中,  $J_F$  为飞轮的转动惯量,  $T_{SF}$  为丝杠驱动飞轮的扭矩,  $\ddot{\phi}$  为飞轮的角加速度。

在设计惯容器时, 应当注意惯容器的出力不应过大, 否则这个扭矩将会破坏丝杠。同时, 实际工程中的地震是三向的振动, 对于传统惯容器来说, 丝杠两端不能完全固定于结构上, 需要将丝杠两端的垂直于丝杠轴线方向上的位移释放, 否则这两个方向上的位移同样也会对惯容器产生不必要的内力。Ikago 等<sup>[61]</sup>对这种惯容器两端采用了球铰连接的方式, 一方面释放了不需要的内力, 另一方面也可以通过控制球铰中的最大静摩擦力来限制惯容器的出力以保护丝杠。但是这样的方式连接构造复杂, 对于工程来说安装不便。事实上, 传统的惯容器丝杠两端的扭矩是这些问题产生的根本, 本文提出的自平衡惯容器可以解决上述问题。

### 2.3.2 自平衡惯容器的提出

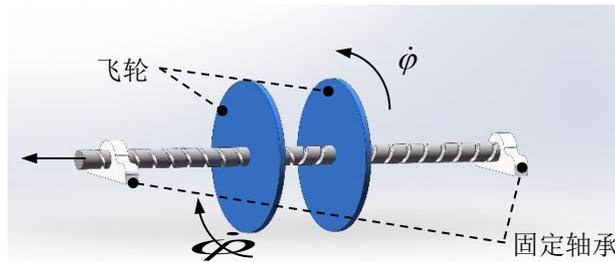


图 2.5 自平衡惯容器示意图

惯容器产生惯性力与飞轮的旋转方向无关, 因此可以考虑将单个飞轮拆分为两个飞轮, 改变丝杠的螺纹方向来实现双飞轮的相反旋转。图 2.5 为自平衡惯容器的示意图。自平衡惯容器将传统惯容器的单个飞轮拆分为两个转动惯量相等的飞轮, 两个飞轮在两侧导程相等但是旋向相反的螺纹上运动, 这样两个飞轮的转速相同但转向相反。同样, 假设丝杠发生向左的轴向运动, 左边的飞轮顺时针旋转, 右边的飞轮则逆时针旋转。因此, 对于这两个飞轮可以写出运动方程如下:

$$(-1)^{i+1} J_{Fi} \ddot{\phi} = T_{SF_i} \quad (i=1,2) \quad (2.17)$$

其中, 脚标  $i$  用以区分左右两个飞轮。对于丝杠来说可以写出力学平衡方程:

$$T_{FS1} + T_{FS2} = -T_{SF1} - T_{SF2} = -J_{F1} \ddot{\phi} + J_{F2} \ddot{\phi} = 0 \quad (2.18)$$

其中,  $T_{FS1}$  和  $T_{FS2}$  代表两个飞轮对丝杠的反作用力。式(2.18)可以证明丝杠达到了自平衡, 无需另外限制丝杠的转动。同时, 如果自平衡惯容器和传统惯容器能够

达到相同的调谐效果，即表观质量相同的情况下，自平衡惯容器丝杠上的扭矩为传统惯容器的一半。

图 2.6(a)为传统惯容器丝杠上的扭矩图。对于自平衡惯容器，可以先假定右端固定，并只考虑单个飞轮的情况，如图 2.6(b)(c)所示。由于两个飞轮的转速相反，因此这两个飞轮分别对丝杠产生的扭矩的大小相同但方向相反，并且大小均为传统惯容器的一半。叠加这两个扭矩图得到图 2.6(d)，此时丝杠的扭矩只分布在双飞轮之间的丝杠上，而在飞轮之外部分的丝杠上没有扭矩，因此右侧的固定端可以取消，形成自平衡惯容器的内力分布图。

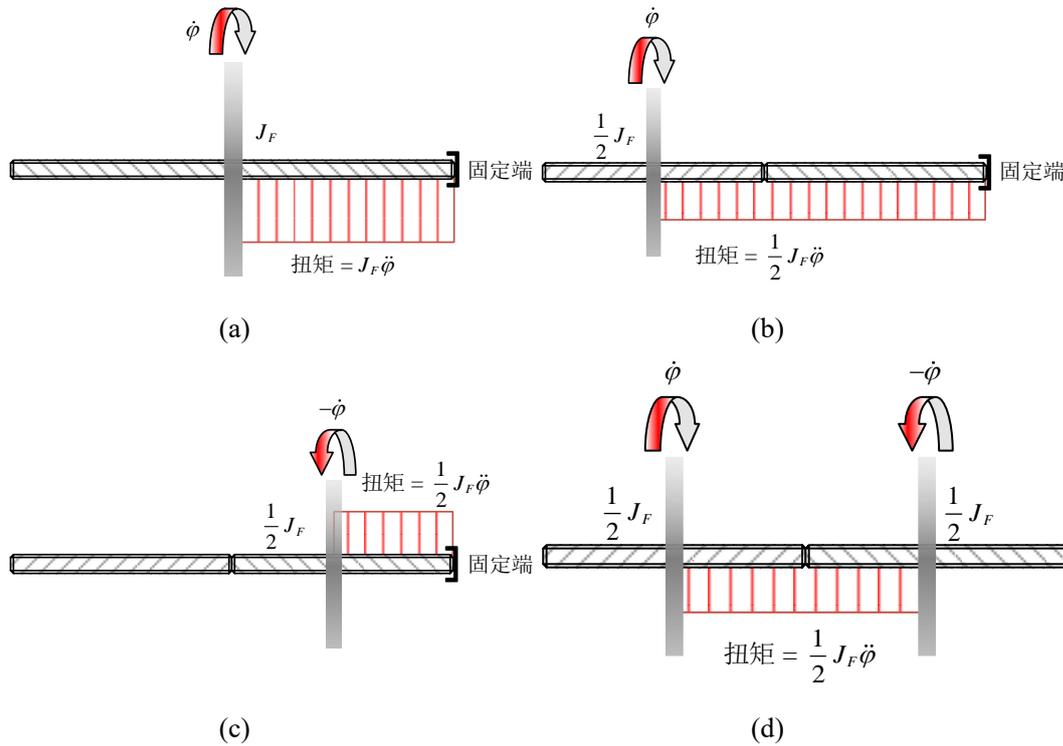


图 2.6 传统惯容器、自平衡惯容器丝杠扭矩

由于丝杠两端没有扭矩，惯容器的连接难度可以大大降低，可以采用一些柔性的连接方式，如拉索。自平衡惯容器连接简单，实际工程应用也会更加方便，不需要考虑释放另外两个方向上的位移。同时，由于双飞轮的转速相反，利用飞轮间的双倍的相对速度可以进一步放大阻尼效应，增加耗能能力。并且，如果阻尼力和飞轮的运动状态有关（如阻尼力和飞轮转速成正比），那么阻尼力并不会影响惯容器本身的自平衡性。假设两个飞轮上的阻尼力矩分别为 $T_{D1}$ 和 $T_{D2}$ ，由于双飞轮的运动状态只是方向上不同，则两个阻尼力矩也是大小相等方向相反。式(2.17)可以改写为：

$$(-1)^{i+1} J_{Fi} \ddot{\phi} = T_{SFi} - T_{Di} \quad (i=1,2) \quad (2.19)$$

可以证明，丝杠此时还是自平衡的：

$$T_{FS1} + T_{FS2} = -(T_{SF1} - T_{D1}) - (T_{SF2} - T_{D2}) = -J_{F1}\ddot{\phi} + J_{F2}\ddot{\phi} = 0 \quad (2.20)$$

### 2.3.3 带自平衡惯容器的单自由度框架模型

图 2.7(a)显示了一个单层框架，在底层装配了一个自平衡惯容器。框架的楼板通过连接弹簧和自平衡惯容器相连。整个系统的质量  $m$  认为集中于楼板，框架柱仅提供侧向抗力，其抗侧刚度为  $k$ 。假设楼板受到一个侧向力  $F(t)$ ，以向左运动为正方向，楼板的位移为  $u(t)$ 。楼板产生位移后通过连接弹簧驱动自平衡惯容器工作。

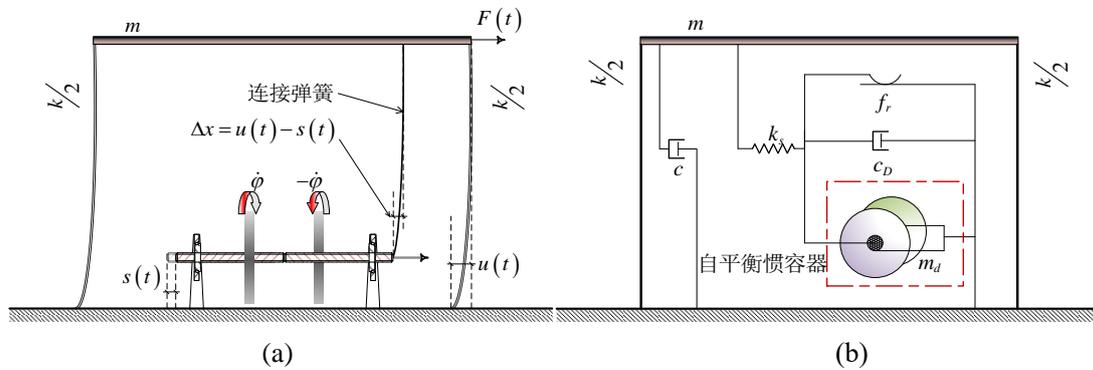


图 2.7 带自平衡惯容器单层框架简图

假设丝杠的轴向位移为  $s(t)$ ，则两者之间的位移差值为  $\Delta x = u(t) - s(t)$ ，即为连接弹簧的变形量。丝杠不能转动，因此飞轮的转角  $\varphi(t)$  和丝杠的轴线轴向位移  $s(t)$  有关系  $s(t) = L_d \varphi(t) / 2\pi$ 。假设连接弹簧的刚度为  $k_s$ ，则其内力  $T_N$  为：

$$T_N = k_s \left[ u(t) - \frac{\varphi(t)}{2\pi} L_d \right] \quad (2.21)$$

将其简化为图 2.7(b)的力学拓扑图。假设原裸框架的阻尼系数为  $c$ ，忽略摩擦力，可以写出框架在外界激励  $-ma_g(t)$  作用下的运动方程为：

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) + T_N = -ma_g(t) \quad (2.22)$$

对于带惯容器的单自由度系统，还需要一个方程来描述惯容器的运动。对于惯容器，可以写出在连接弹簧的驱动下的运动方程为：

$$J\ddot{\varphi}(t) + c_d\dot{\varphi}(t) = T_N \frac{L_d}{2\pi} \quad (2.23)$$

将式(2.22)和式(2.23)联立，并带入式(2.21)可得：

$$\begin{cases} m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) + k_s \left[ u(t) - \frac{\varphi(t)}{2\pi} L_d \right] = -ma_g(t) \\ J\ddot{\varphi}(t) + c_d\dot{\varphi}(t) - k_s \left[ u(t) - \frac{\varphi(t)}{2\pi} L_d \right] \frac{L_d}{2\pi} = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

### 2.3.4 运动方程的无量纲化及传递函数

首先，定义以下无量纲化用的参数：

$$\begin{aligned} \omega_f &= \sqrt{\frac{k}{m}} & \zeta &= \frac{c}{2m\omega_f} & \mu &= \frac{m_d}{m} & m_d &= J \frac{(2\pi)^2}{L_d^2} \\ \xi &= \frac{c_D}{2m\omega_f} & \kappa &= \frac{k_s}{k} & c_D &= \frac{(2\pi)^2}{L_d^2} c_d & u_d(t) &= \frac{\varphi(t)}{2\pi} L_d \end{aligned} \quad (2.25)$$

其中

- $\omega_f$  —— 原裸框架的圆频率
- $\zeta$  —— 原裸框架的阻尼比
- $\mu$  —— 自平衡惯容器等效表观质量与裸框架质量之比（以下简称质量比）
- $m_d$  —— 自平衡惯容器表观质量
- $\xi$  —— 自平衡惯容器名义阻尼比（以下简称名义阻尼比）
- $\kappa$  —— 自平衡惯容器的连接刚度与原框架刚度之比（以下简称刚度比）
- $c_D$  —— 自平衡惯容器等效阻尼系数

因此，无量纲化的系统的运动方程为：

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_f\dot{u}(t) + \omega_f^2 u(t) + \kappa\omega_f^2 [u(t) - u_d(t)] = -a_g(t) \\ \mu\ddot{u}_d(t) + 2\xi\omega_f\dot{u}_d(t) - \kappa\omega_f^2 [u(t) - u_d(t)] = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

将其转化为矩阵形式：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + 2\omega_f\mathbf{\Xi}\dot{\mathbf{u}} + \omega_f^2\mathbf{K}\mathbf{u} + \kappa\omega_f^2\mathbf{K}_in\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.27)$$

其中：

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} & \mathbf{\Xi} &= \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix} & \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{K}_{\text{in}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} &= \begin{Bmatrix} u(t) \\ u_d(t) \end{Bmatrix} & \mathbf{F} &= \begin{Bmatrix} -a_g(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

当不考虑摩擦力时，可以对式(2.26)进行拉普拉斯变换，即可解得框架楼板的位移的拉普拉斯变换表达式  $U(s)$  和惯容器的位移的拉普拉斯变换表达式  $U_d(s)$ ：

$$U(s) = \frac{-(s^2\mu + 2s\xi\omega_f + \kappa\omega_f^2)A_g(s)}{\left[ \begin{aligned} &s^4\mu + 2s^3(\zeta\mu + \xi)\omega_f + s^2(\kappa + \mu + \kappa\mu + 4\zeta\xi)\omega_f^2 \\ &+ 2s(\zeta\kappa + \xi + \kappa\xi)\omega_f^3 + \kappa\omega_f^4 \end{aligned} \right]} \quad (2.29)$$

$$U_d(s) = \frac{-\kappa\omega_f^2 A_g(s)}{\left[ \begin{aligned} &s^4\mu + 2s^3(\zeta\mu + \xi)\omega_f + s^2(\kappa + \mu + \kappa\mu + 4\zeta\xi)\omega_f^2 \\ &+ 2s(\zeta\kappa + \xi + \kappa\xi)\omega_f^3 + \kappa\omega_f^4 \end{aligned} \right]} \quad (2.30)$$

因此，框架的楼板的位移和惯容器的位移相对于激励  $a_g(t)$  的传递函数为：

$$H_U(i\omega) = \left. \frac{U(s)}{A_g(s)} \right|_{s=i\omega} \quad (2.31)$$

$$H_{U_d}(i\omega) = \left. \frac{U_d(s)}{A_g(s)} \right|_{s=i\omega} \quad (2.32)$$

### 2.3.5 基于定点理论的理想自平衡惯容器参数优化

观察式(2.29)，可以利用定点理论对自平衡惯容器进行参数优化设计。根据式(2.29)作出的楼板位移的传递函数图像和图 2.3 的 TMD 的主结构的位移传递函数非常相似，具有两个定点。

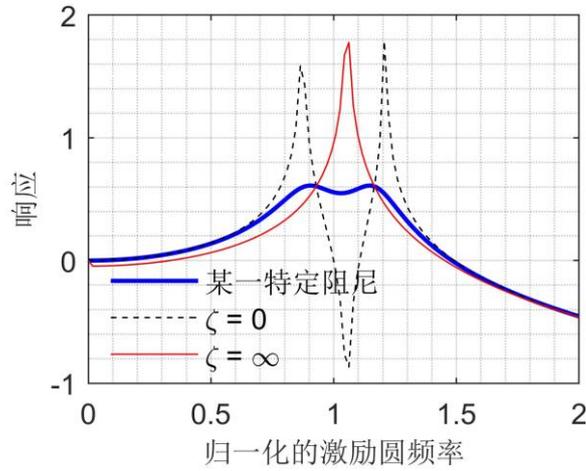


图 2.8 带自平衡惯容器的单自由度框架楼板传递函数

将式(2.31)整理可得:

$$\begin{aligned} \left. \frac{U(s)}{A_g(s)} \right|_{s=i\omega} &= - \frac{s^2 \mu + 2s \xi \omega_f + \kappa \omega_f^2}{s^4 \mu + 2s^3 \xi \omega_f + s^2 (\kappa + \mu + \kappa \mu) \omega_f^2 + 2s (\xi + \kappa \xi) \omega_f^3 + \kappa \omega_f^4} \Big|_{s=i\omega} \\ &= - \frac{(\kappa \omega_f^2 - \mu \omega^2) + 2\xi \omega_f \omega i}{\left[ (\omega_f^2 - \omega^2)(\kappa \omega_f^2 - \mu \omega^2) - \mu \kappa \omega_f^2 \omega^2 \right] + 2\xi \omega_f \omega (\omega_f^2 + \kappa \omega_f^2 - \omega^2) i} \end{aligned} \quad (2.33)$$

令  $\beta = \omega/\omega_f$ ，传递函数幅值的平方为:

$$A_p = \left| \frac{U}{A_g} \right|^2 = \frac{(\kappa - \mu \beta^2)^2 + (2\xi \beta)^2}{\left[ (1 - \beta^2)(\kappa - \mu \beta^2) - \mu \kappa \beta^2 \right]^2 + (\kappa + 1 - \beta^2)^2 (2\xi \beta)^2} \cdot \frac{1}{\omega_f^4} \quad (2.34)$$

由前述定点理论可知:

$$\frac{(\kappa - \mu \beta^2)^2}{\left[ (1 - \beta^2)(\kappa - \mu \beta^2) - \mu \kappa \beta^2 \right]^2} = \frac{(2\xi \beta)^2}{(\kappa + 1 - \beta^2)^2 (2\xi \beta)^2} \quad (2.35)$$

由于两定点极性相反，即阻尼为 0 和无穷时两曲线上的相位正好相反，因此式中的正负号应取为:

$$\frac{\kappa - \mu\beta^2}{(1 - \beta^2)(\kappa - \mu\beta^2) - \mu\kappa\beta^2} = -\frac{1}{\kappa + 1 - \beta^2} \quad (2.36)$$

整理的关于  $\beta^2$  的方程:

$$\mu(\beta^2)^2 - (\kappa + \mu + \kappa\mu)(\beta^2) + \kappa = 0 \quad (2.37)$$

因此方程的两个根有关系:

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{\mu + \kappa + \mu\kappa}{\mu} \quad (2.38)$$

将两个根带入方程(2.35)右侧, 有:

$$\frac{1}{1 + \kappa - \beta_1^2} = -\frac{1}{1 + \kappa - \beta_2^2} \quad (2.39)$$

联立式(2.38)(2.39)可得最优刚度比为:

$$\kappa^{opt} = \frac{\mu}{1 - \mu} \quad (2.40)$$

当  $\beta^2 = \beta_1^2, \beta_2^2$  时, 式(2.34)应取得极值, 即:

$$\left. \frac{\partial A_p}{\partial \beta^2} \right|_{\beta^2 = \beta_1^2 \text{ 或 } \beta_2^2} = 0 \quad (2.41)$$

可解出最优阻尼比为:

$$\xi_{P,Q} = \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{1}{(1 - \mu)}} \sqrt{\frac{3\sqrt{2}\mu}{2(\sqrt{2} \pm \sqrt{\mu})}} \quad (2.42)$$

由于两个根相近, 采用均方根值作为近似的最优阻尼比:

$$\xi^{\text{opt}} = \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{3\mu}{(1-\mu)(2-\mu)}} \quad (2.43)$$

因此，本文以后的讨论将基于式(2.40)和(2.43)的优化结果来讨论。

## 2.4 本章小结

本章介绍了利用附加质量进行减振控制的设备，包括 TMD、传统惯容器以及自平衡惯容器。可以得出以下一些结论：

(1) TMD 和惯容器均利用惯性对原结构调谐减振器，关键在于质量比。质量比越大，若匹配以最佳刚度比和最佳阻尼比，阻尼器的减震效果最佳。但由于 TMD 的惯性力源于实际的物理质量，过大的附加质量对结构负担过大，因此具有一定的局限性；

(2) 传统惯容器很好地解决了利用惯性减振的阻尼器附加质量过大的问题。传统惯容器利用放大后的表观质量提供的惯性力对结构调谐，有效减轻了对结构的负担，但是也由于在丝杠末端的扭矩使其在与主结构的连接上存在诸多不便；

(3) 自平衡惯容器采用双飞轮和正反牙丝杠，两个飞轮在丝杠上的旋转方向不同抵消了对丝杠的扭矩，同时提供了和传统惯容器相等的惯性力，降低了丝杠内力，加倍了阻尼力。同时连接方便，可以采用拉索等柔性连接，释放了垂直丝杠轴线方向上的位移；

(4) 理想的自平衡惯容器可以利用定点理论对刚度比和阻尼比进行优化设计，其设计结果为后续针对惯容器非线性的修正提供了参考。

## 第3章 考虑摩擦效应的自平衡惯容器非线性模型及参数修正

惯容系统的惯容质量比、连接刚度比以及阻尼单元所能提供的相对阻尼比是三个主要的控制因素。对这三个因素的参数分析在文献<sup>[33,48-50]</sup>中有所讨论,认为这三项主要控制因素应当恰当地设计。对于无摩擦的情况,研究者们通常使用定点理论对惯容系统的参数进行优化设计。同时,由于自平衡惯容器在构造上会相对更在复杂一些,因此机械上带来的非线性因素,尤其是摩擦力的影响,是难以忽略的。自平衡惯容器的实现机理在于使用两个转速相同转向相反的飞轮。由于在机械制造上不可避免的误差,飞轮的转动惯量可能有不平衡的状态,需要进行敏感性分析。本文参考了轴承的设计规程<sup>[89,90]</sup>,从经验上建立了自平衡惯容器的摩擦力模型来考虑这一缺陷,并针对摩擦力较小和摩擦力较大两种不同的情况作分析,以定点理论推导出的优化参数为基准,探究摩擦力对自平衡惯容器的影响。

由于在摩擦力较大时理论分析较为困难,本章在 Simulink 建立模型,并进行数值模拟来计算各种激励下大摩擦对惯容系统的耗能能力与调谐能力的影响。分析结果表明,大摩擦力会阻碍惯容系统的正常工作;但是这种影响一定程度上可以通过提高连接刚度的方法来减轻。

### 3.1 摩擦影响下自平衡惯容器运动学方程

#### 3.1.1 摩擦力模型——常摩擦与载摩擦

对于利用机械制成的惯容器来说,一些不可避免的非线性缺陷会影响惯容器本身的力学性能。其中,间隙和摩擦力是最为常见的非线性缺陷。但是间隙可以通过施加一定的预压力来消除,在文献<sup>[83]</sup>中就使用了这种方法,并且在实验中没有观察到间隙的存在。因此,本文将研究的重点集中于摩擦力对惯容器工作性能的影响。

机械的惯容器常使用滚珠丝杠或者梯形丝杠来实现惯容的机制。对于梯形丝杠,摩擦力来源于飞轮和丝杠表面的接触,因此是一种滑动摩擦力。滑动摩擦力的大小取决于飞轮和丝杠接触面上的正压力和摩擦系数,方向为阻碍飞轮运动的方向。而对于滚珠丝杠,其摩擦力来源于滚珠的滚动,因此是一种滚动摩擦。在

文献<sup>[83]</sup>中，通常认为滚珠丝杠的摩擦力为一定值，计算式如下：

$$F_r = -f_r \cdot \text{sgn}(v) \quad (3.1)$$

其中， $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数， $f_r$ 为滚动摩擦的大小。由于符号函数的存在，滚动摩擦力会给惯容器引入非线性缺陷。而对于梯形丝杠，滑动摩擦力的计算式如下：

$$F_f = -\mu_f F_N \quad (3.2)$$

其中， $\mu_f$ 为接触面之间的摩擦系数， $F_N$ 为接触面上的法向正压力。无论哪种摩擦力，其方向都与飞轮运动方向相反，因此摩擦力也可以起到一定的耗能作用。但同时应当注意，摩擦力的存在会对装置本身产生磨损、卡顿等不利影响，因此在考虑摩擦的影响时，摩擦耗能只作为装置总耗能的补充，即摩擦力是完善整个力学模型的一部分，而不应当看作有利的耗能。在式(3.1)中，滚动摩擦被认为与荷载无关。然而，理想的滚动是不存在的<sup>[89,90]</sup>。滚动摩擦的成因有弹塑性变形、相对滑动、润滑油、轴向和径向荷载等等。因此，本文对于摩擦力提出新的模型。利用传统的滚动摩擦力和滑动摩擦力的概念，本文将丝杠的摩擦力分为两部分。一部分为与荷载无关的摩擦力，称之为常摩擦，和传统的干摩擦对应；另一部分则与荷载相关，称之为载摩擦。对于载摩擦，本文认为其计算方式和传统的滑动摩擦相同。因此，总摩擦力大小为：

$$F_{fr} = F_r + F_f = -f_r \cdot \text{sgn}(v) - \mu_f F_N \quad (3.3)$$

上式计算的是在飞轮与丝杠的接触面上的摩擦力的大小。由于接触面是一个螺旋面，因此为了后续计算方便，需要将接触面展开计算整体的摩擦力矩。下图3.1则显示了丝杠与飞轮在接触面上的受力情况。其中， $\beta$ 为丝杠的导程角，和丝杠的导程 $L_d$ 以及丝杠的半径 $r_s$ 相关，计算式为：

$$\tan \beta = \frac{L_d}{2\pi r_s} \quad (3.4)$$

如图3.1所示， $T_N$ 为外界作用于丝杠上的力，也可以被认为是惯容器整体的出力。丝杠上的正压力即为惯容器出力 $T_N$ 在接触面法向上的投影 $F_N$ 。根据做功等效的原理，摩擦力矩在旋转一周 $2\pi$ 的范围内，摩擦力应在接触面上行进的

距离为  $L_{F_r} = \sqrt{(2\pi r_s)^2 + L_d^2}$ 。因此，常摩擦和载摩擦的总摩擦力矩的计算式为：

$$M_f = [-f_r \cdot \text{sgn}(v) - \mu_f F_N] \cdot \frac{\sqrt{(2\pi r_s)^2 + L_d^2}}{2\pi} = -M_{fr} \cdot \text{sgn}(v) - \mu_f T_N r_s \quad (3.5)$$

式中  $M_{fr}$  为总摩擦力矩中常摩擦的部分。

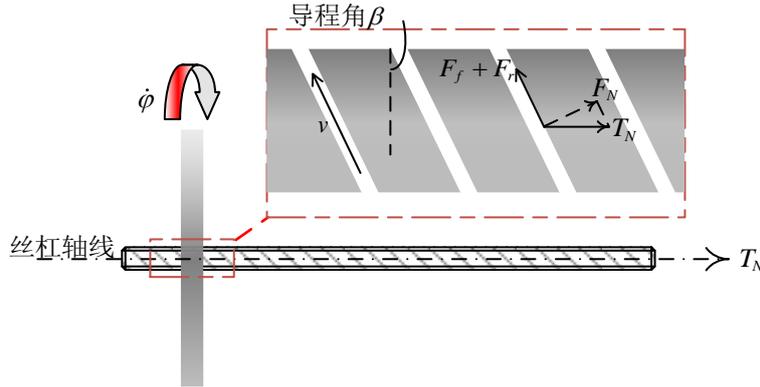


图 3.1 丝杠与飞轮接触面细节

而丝杠受到常摩擦和载摩擦两种不同的摩擦时，丝杠的动力学方程是不同的，因此应当分别建立运动方程。对于常摩擦，丝杠的运动方程较为简单；而对于载摩擦，由于摩擦力和惯容器的出力  $T_N$  相关，直接计算较为复杂，因此利用哈密顿原理来推导运动学方程。同时，由于惯容器不能耗能，因此在惯容器需要一个阻尼单元来耗能，阻尼单元的“阻尼系数”为  $c_d$ 。应当注意此处的“阻尼系数”和一般的阻尼系数的区别在于，一般的阻尼系数利用的是相对速度；而这里为了计算方便，采用了相对角速度来计算阻尼力，区别在于量纲。

### 3.1.2 常摩擦作用下惯容器的运动方程

常摩擦情况下，只需要将摩擦项直接加在式(2.23)的左侧即可。因此，运动方程为：

$$J\ddot{\phi}(t) + M_{fr} \text{sgn}(\dot{\phi}(t)) + c_d \dot{\phi}(t) = T_N \frac{L_d}{2\pi} \quad (3.6)$$

其中， $J$  为自平衡惯容器两个飞轮的转动惯量之和。这里双飞轮的质量、转动惯量以及所处的螺纹的导程完全相等的情况下才可以将两者的转动惯量直接相加。当两个飞轮的质量、转动惯量以及所处的螺纹导程有偏差时，详细的敏感性分析见 3.3 节。

### 3.1.3 载摩擦作用下惯容器的运动方程

载摩擦情况下，假定该带自平衡惯容器的单层框架开始是静止的。突然一个水平外力  $F(t)$  作用于框架上，框架开始运动并驱动丝杠和飞轮运动。在一段时间后，假设在  $t = t_0$  时刻，飞轮的角位移为  $\varphi(t_0)$ ，楼板的位移为  $u(t_0)$ 。由动能定理，惯容器的初动能和末动能与所有外力做功之和有：

$$\Delta W = E_{kend} - E_{kbegin} \quad (3.7)$$

其中  $\Delta W$  为所有外力对惯容器所做的功， $E_{kbegin}$  和  $E_{kend}$  分别为惯容器的初动能和末动能，主要由飞轮的转动动能构成。由于初始静止，因此初动能为 0。则在  $t = t_0$  时，惯容器的末动能为：

$$E_{kend} = \frac{1}{2} J [\dot{\varphi}(t_0)]^2 \quad (3.8)$$

外力所做的功包括三个部分，惯容器出力  $T_N$  做的正功  $W_{T_N}$ ，阻尼力做的负功  $W_D$  以及摩擦力做的负功  $W_{F_f}$ 。惯容器出力做功  $W_{T_N}$  为：

$$W_{T_N} = \int_0^{t_0} T_N \dot{s} dt = \int_0^{\varphi(t_0)} T_N \frac{L_d}{2\pi} d\varphi \quad (3.9)$$

阻尼力所做的负功为：

$$W_D = \int_0^{t_0} [c_d \dot{\varphi}(t)] \dot{\varphi}(t) dt = \int_0^{\varphi(t_0)} c_d \dot{\varphi}(t) d\varphi \quad (3.10)$$

摩擦力做的功与接触面上的正压力  $F_N$  相关。根据图 3.1 可知，载摩擦的大小为  $F_f = \mu_f T_N \cos \beta$ 。摩擦力做功时的相对速度与丝杠的轴向运动速度有关系：

$$v = \frac{\dot{s}(t)}{\sin \beta} = \frac{L_d}{2\pi \sin \beta} \dot{\varphi}(t) \quad (3.11)$$

因此，摩擦力做功为：

$$W_{F_f} = \int_0^{t_0} F_f \cdot v dt = \int_0^{\varphi(t_0)} \frac{\mu_f T_N L_d}{2\pi \tan \beta} d\varphi = \int_0^{\varphi(t_0)} \mu_f T_N r_s d\varphi \quad (3.12)$$

将式(3.8)(3.9)(3.10)(3.12)代入式(3.7)可得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J[\dot{\varphi}(t)]^2 - 0 &= W_{T_N} - W_D - W_{F_f} \\ &= \int_0^{\varphi(t_0)} T_N \frac{L_d}{2\pi} d\varphi - \int_0^{\varphi(t_0)} c_d \dot{\varphi}(t) d\varphi - \int_0^{\varphi(t_0)} \mu_f T_N r_s d\varphi \end{aligned} \quad (3.13)$$

对式(3.13)关于飞轮转角  $\varphi$  变分，其中：

$$\frac{d\left[\frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2\right]}{d\varphi} = \frac{d\left[\frac{1}{2}(\dot{\varphi})^2\right]}{d\dot{\varphi}} \cdot \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi} = \frac{\dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = \ddot{\varphi} \quad (3.14)$$

故方程(3.13)变换为：

$$J\ddot{\varphi}(t) + c_d \dot{\varphi}(t) = T_N \left( \frac{L_d}{2\pi} - \mu_f r_s \right) \quad (3.15)$$

上式(3.15)即为惯容器在仅受载摩擦作用时的运动方程。

### 3.1.4 常摩擦和载摩擦共同作用下惯容器的运动方程

一般地，认为丝杠所受的摩擦为常摩擦和载摩擦共同作用，因此将式(3.6)和式(3.15)组合即可得两种摩擦共同作用下的丝杠的运动方程。联合式(2.22)和式(2.21)可得考虑摩擦力情况下带自平衡惯容器的单层框架系统的运动学方程：

$$\begin{cases} m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) + k_s \left[ u(t) - \frac{\varphi(t)}{2\pi} L_d \right] = F(t) \\ J\ddot{\varphi}(t) + M_{fr} \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}(t)) + c_d \dot{\varphi}(t) - k_s \left[ u(t) - \frac{\varphi(t)}{2\pi} L_d \right] \left( \frac{L_d}{2\pi} - \mu_f r_s \right) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

可以看出，载摩擦对惯容器的出力有影响。可以把这种影响看成为对连接弹簧刚度  $k_s$  的削弱。为了后续分析的便利，定义载摩擦系数  $\varepsilon_0$  如下：

$$\varepsilon_0 = \frac{L_d}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{L_d}{2\pi} - \mu_f r_s} = \frac{1}{1 - \frac{\mu_f}{\tan \beta}} \geq 1 \quad (3.17)$$

载摩擦系数  $\varepsilon_0$  的作用是削弱连接弹簧刚度  $k_s$ ；也可将方程两端同时乘以  $2\pi\varepsilon_0/L_d$ ，看作载摩擦会对阻尼力、摩擦力和惯性力有增幅的效应。无论如何，连接刚度都将不足以完全支撑丝杠的运动。同时应当注意，由于摩擦力自锁效应，载摩擦系数  $\mu_f$  不应当大于导程角的正切值  $\tan\beta$ ，否则惯容器将不可能运动。

## 3.2 摩擦影响下系统的响应

### 3.2.1 常摩擦

载摩擦的无量纲化已由式(3.17)确定，而对常摩擦则采用以下定义：

$$f_0 = \frac{2\pi}{mL_d} M_{fr} \quad (3.18)$$

其中  $f_0$  称为名义常摩擦。因此，将式(2.26)改写一下即可得无量纲化的有摩擦影响下的系统的运动方程：

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_f\dot{u}(t) + \omega_f^2 u(t) + \kappa\omega_f^2 [u(t) - u_d(t)] = -a_g(t) \\ \mu\ddot{u}_d(t) + 2\xi\omega_f\dot{u}_d(t) + f_0 \cdot \text{sgn}[\dot{u}_d(t)] - \frac{1}{\varepsilon_0} \kappa\omega_f^2 [u(t) - u_d(t)] = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

参考式(2.28)，其矩阵形式为：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + 2\omega_f\boldsymbol{\Xi}\dot{\mathbf{u}} + \omega_f^2\mathbf{K}\mathbf{u} + \kappa\omega_f^2\mathbf{K}_{in0}\mathbf{u} = \mathbf{F}_0 \quad (3.20)$$

其中：

$$\mathbf{K}_{in0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{\varepsilon_0} & \frac{1}{\varepsilon_0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_0 = \begin{Bmatrix} -a_g(t) \\ -f_0 \text{sgn}[\dot{u}_d(t)] \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

### 3.2.2 载摩擦作用下系统的传递函数

当惯容器只受到载摩擦作用时， $f_0 = 0$ ，此时方程(3.20)仍旧为二阶线性常微

分方程组，因此可以进行拉普拉斯变换。和 3.2.1 节相似，框架的楼板的位移和惯容器的位移相对于激励  $a_g(t)$  的传递函数为：

$$H_U(s) = \frac{-(s^2 \varepsilon_0 \mu + 2s \varepsilon_0 \xi \omega_f + \kappa \omega_f^2)}{\left[ \begin{array}{c} s^4 \varepsilon_0 \mu + 2s^3 \varepsilon_0 (\zeta \mu + \xi) \omega_f + s^2 (\kappa + \varepsilon_0 \mu + \kappa \varepsilon_0 \mu + 4\varepsilon_0 \zeta \xi) \omega_f^2 \\ + 2s (\zeta \kappa + \varepsilon_0 \xi + \kappa \varepsilon_0 \xi) \omega_f^3 + \kappa \omega_f^4 \end{array} \right]} \quad (3.22)$$

$$H_{U_d}(i\omega) = \frac{-\kappa \omega_f^2}{\left[ \begin{array}{c} s^4 \varepsilon_0 \mu + 2s^3 \varepsilon_0 (\zeta \mu + \xi) \omega_f + s^2 (\kappa + \varepsilon_0 \mu + \kappa \varepsilon_0 \mu + 4\varepsilon_0 \zeta \xi) \omega_f^2 \\ + 2s (\zeta \kappa + \varepsilon_0 \xi + \kappa \varepsilon_0 \xi) \omega_f^3 + \kappa \omega_f^4 \end{array} \right]} \quad (3.23)$$

### 3.2.3 常摩擦作用下系统的响应

当惯容器只受到载摩擦作用时， $\varepsilon_0 = 1$ ，此时方程(3.20)变为非线性常微分方程组，不能进行拉普拉斯变换。为求得此时系统的响应，采用慢变参数法对方程(3.20)进行等效线性化。假定外界激励为  $a_g(t) = A_g \cdot \sin(\omega t)$ ，则在整个系统稳定后，框架的楼板和惯容器的位移方程也应为简谐运动。设框架的楼板和惯容器位移的幅值为  $R_0$  和  $R_1$ ，相位角分别为  $\varphi_0$  和  $\varphi_1$ ，故各自的位移方程为：

$$\begin{cases} u = R_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \\ u_d = R_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \end{cases} \quad (3.24)$$

由于位移方程也为简谐运动，因此可以求出在惯容器运动的一个周期内摩擦力所做的功，求平均即得摩擦力的平均值。对方程(3.20)作代换  $\theta = \omega t$ ，并让  $\theta$  从 0 变化至  $2\pi$ 。将方程(3.20)分别乘上  $\sin \theta$  和  $\cos \theta$ ，并对  $\theta$  从 0 积分至  $2\pi$ ：

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + 2\omega_f \boldsymbol{\Xi}\dot{\mathbf{u}} + \omega_f^2 \mathbf{K}\mathbf{u} + \kappa\omega_f^2 \mathbf{K}_{in}\mathbf{u}) \sin \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \sin \theta d\theta \\ \int_0^{2\pi} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + 2\omega_f \boldsymbol{\Xi}\dot{\mathbf{u}} + \omega_f^2 \mathbf{K}\mathbf{u} + \kappa\omega_f^2 \mathbf{K}_{in}\mathbf{u}) \cos \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (3.25)$$

其中：

$$\begin{aligned} [\dot{u}, \ddot{u}] &= [\omega R_0 \cos(\omega t + \varphi_0), -\omega^2 R_0 \sin(\omega t + \varphi_0)] \\ [\dot{u}_d, \ddot{u}_d] &= [\omega R_1 \cos(\omega t + \varphi_1), -\omega^2 R_1 \sin(\omega t + \varphi_1)] \end{aligned} \quad (3.26)$$

由三角函数的正交性可知：

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin(\theta + \varphi_i) \sin \theta d\theta = \pi \cos \varphi_i \\ \int_0^{2\pi} \sin(\theta + \varphi_i) \cos \theta d\theta = \pi \sin \varphi_i \\ \int_0^{2\pi} \cos(\theta + \varphi_i) \sin \theta d\theta = -\pi \sin \varphi_i \\ \int_0^{2\pi} \cos(\theta + \varphi_i) \cos \theta d\theta = \pi \cos \varphi_i \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}[\sin(\theta + \varphi_i)] \cdot \sin \theta d\theta = 4 \cos \varphi_i \\ \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}[\sin(\theta + \varphi_i)] \cdot \cos \theta d\theta = 4 \sin \varphi_i \\ \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}[\cos(\theta + \varphi_i)] \cdot \sin \theta d\theta = -4 \sin \varphi_i \\ \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}[\cos(\theta + \varphi_i)] \cdot \cos \theta d\theta = 4 \cos \varphi_i \end{cases} \quad (3.28)$$

因此，将式(3.26)(3.27)(3.28)带入方程组(3.25)，可得：

$$\begin{aligned} & -\pi\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \mu & & \\ & & 1 & \\ & & & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_0 \cos \varphi_0 \\ R_1 \cos \varphi_1 \\ R_0 \sin \varphi_0 \\ R_1 \sin \varphi_1 \end{Bmatrix} + 2\pi\omega\omega_f \begin{bmatrix} -\zeta & & & \\ & -\xi & & \\ & & \zeta & \\ & & & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_0 \sin \varphi_0 \\ R_1 \sin \varphi_1 \\ R_0 \cos \varphi_0 \\ R_1 \cos \varphi_1 \end{Bmatrix} \\ & + \pi\omega_f^2 \begin{Bmatrix} R_0 \cos \varphi_0 \\ 0 \\ R_0 \sin \varphi_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \pi\kappa\omega_f^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_0 \cos \varphi_0 \\ R_1 \cos \varphi_1 \\ R_0 \sin \varphi_0 \\ R_1 \sin \varphi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\pi A_g \\ 4f_0 \sin \varphi_1 \\ 0 \\ -4f_0 \cos \varphi_1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.29)$$

方程组(3.29)是一个强非线性方程组，直接求解  $R_0$ ， $R_1$ ， $\varphi_0$  和  $\varphi_1$  在迭代时会消耗大量的时间。为了提高求解方程的效率，先将  $R_0 \cos \varphi_0$ ， $R_0 \sin \varphi_0$ ， $R_1 \cos \varphi_1$  和  $R_1 \sin \varphi_1$  认为是方程组(3.29)的四个未知量，因此为一个简单的线性方程组，可以将这四个量表达为：

$$\begin{cases} R_0 \sin \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + B_1 \cos \varphi_1 + C_1}{De} \\ R_0 \cos \varphi_0 = \frac{A_2 \sin \varphi_1 + B_2 \cos \varphi_1 + C_2}{De} \\ R_1 \sin \varphi_1 = \frac{A_3 \sin \varphi_1 + B_3 \cos \varphi_1 + C_3}{De} \\ R_1 \cos \varphi_1 = \frac{A_4 \sin \varphi_1 + B_4 \cos \varphi_1 + C_4}{De} \end{cases} \quad (3.30)$$

其中：

$$\begin{aligned} De = & \pi\mu^2\omega^8 + 2\pi(2\zeta^2\mu^2 - \kappa\mu^2 - \kappa\mu - \mu^2 + 2\xi^2)\omega_f^2\omega^6 \\ & - \pi(8\zeta^2\kappa\mu - 16\zeta^2\xi^2 - \kappa^2\mu^2 - 2\kappa^2\mu - 2\kappa\mu^2 + 8\kappa\xi^2 - \kappa^2 - 4\kappa\mu - \mu^2 + 8\xi^2)\omega_f^4\omega^4 \\ & + 2\pi(2\zeta^2\kappa^2 + 4\zeta\xi\kappa^2 + 2\kappa^2\xi^2 - \kappa^2\mu + 4\kappa\xi^2 - \kappa^2 - \mu\kappa + 2\xi^2)\omega_f^6\omega^2 + \pi\kappa^2\omega_f^8 \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} A_1 = 8f_0\kappa[(\zeta\mu + \xi)\omega^3\omega_f^3 - (\zeta\kappa + \kappa\xi + \xi)\omega\omega_f^5] \\ B_1 = -4f_0\kappa[\mu\omega^4\omega_f^2 + (4\xi\zeta + \kappa\mu + \kappa + \mu)\omega^2\omega_f^4 - \kappa\omega_f^6] \\ C_1 = 2\pi A_g[\zeta\mu^2\omega^5\omega_f - 2\zeta(\kappa\mu - 2\xi^2)\omega^3\omega_f^3 + \kappa^2(\zeta + \xi)\omega\omega_f^5] \\ A_2 = 4f_0\kappa[\mu\omega^4\omega_f^2 - (4\xi\zeta + \kappa\mu + \kappa + \mu)\omega^2\omega_f^4 + \omega_f^6] \\ B_2 = 8f_0\kappa[(\zeta\mu + \xi)\omega^3\omega_f^3 - (\zeta\kappa + \kappa\xi + \xi)\omega\omega_f^5] = A_1 \\ C_2 = \pi A_g \left[ \begin{array}{l} \mu^2\omega^6 - (\kappa\mu^2 + 2\kappa\mu + \mu^2 - 4\xi^2)\omega^4\omega_f^2 \\ + (\kappa^2\mu - 4\kappa\xi^2 + \kappa^2 + 2\kappa\mu - 4\xi^2)\omega^2\omega_f^4 - \kappa^2\omega_f^6 \end{array} \right] \\ A_3 = -8f_0[\xi\omega^5\omega_f + 2\xi(2\zeta^2 - \kappa - 1)\omega^3\omega_f^3 + (\zeta\kappa^2 + \xi\kappa^2 + 2\kappa\xi + \xi)\omega\omega_f^5] \\ B_3 = 4f_0 \left[ \begin{array}{l} \mu\omega^6 + (4\zeta^2\mu - 2\kappa\mu - \kappa - 2\mu)\omega^4\omega_f^2 - \kappa(\kappa + 1)\omega_f^6 \\ - (4\zeta^2\kappa - \kappa^2\mu - \kappa^2 - 2\kappa\mu - 2\kappa - \mu)\omega^2\omega_f^4 \end{array} \right] \\ C_3 = 2\pi\kappa A_g [ -(\zeta\mu + \xi)\omega^3\omega_f^3 + (\zeta\kappa + \kappa\xi + \xi)\omega\omega_f^5 ] \\ A_4 = 4f_0 \left[ \begin{array}{l} -\mu\omega^6 - (4\zeta^2\mu - 2\kappa\mu - \kappa - 2\mu)\omega^4\omega_f^2 + \kappa(\kappa + 1)\omega_f^6 \\ + (4\zeta^2\kappa - \kappa^2\mu - \kappa^2 - 2\kappa\mu - 2\kappa - \mu)\omega^2\omega_f^4 \end{array} \right] \\ B_4 = -8f_0[\xi\omega^5\omega_f + 2\xi(2\zeta^2 - \kappa - 1)\omega^3\omega_f^3 + (\zeta\kappa^2 + \xi\kappa^2 + 2\kappa\xi + \xi)\omega\omega_f^5] \\ C_4 = -\pi\kappa A_g [\mu\omega^4\omega_f^2 - (4\xi\zeta + \kappa\mu + \kappa + \mu)\omega^2\omega_f^4 + \omega_f^6] \end{cases} \quad (3.32)$$

将式(3.30)的第(3)和(4)式相除，得：

$$\tan \varphi_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} = \frac{A_3 \sin \varphi_1 + B_3 \cos \varphi_1 + C_3}{A_4 \sin \varphi_1 + B_4 \cos \varphi_1 + C_4} \quad (3.33)$$

原本的四个强非线性方程组缩减为一个非线性方程，大大缩减了计算量。求解方程(3.33)可得 $\varphi_1$ ，代入式(3.30)可获得 $R_0 \cos \varphi_0$ ， $R_0 \sin \varphi_0$ ， $R_1 \cos \varphi_1$ 和 $R_1 \sin \varphi_1$ 的值，即可得到框架的楼板的位移反应 $R_0$ 和惯容器的位移反应 $R_1$ 。

### 3.3.4 等效线性化的适用范围

上述等效线性化的方法只有在摩擦力相对较小的情况下才足够精确，否则解将变得不稳定，甚至惯容器可能被摩擦力直接锁死不能动，故该方法具有一定的适用范围。假设惯容器被摩擦力锁死，此时惯容器的位移 $u_d = 0$ ，代入(3.19)，设 $a_g(t) = \ddot{x}_g(t)$ ，可得：

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_f\dot{u}(t) + \omega_f^2 u(t) + \kappa\omega_f^2 [u(t) - u_d(t)] = -\ddot{x}_g(t) \quad (3.34)$$

对式(3.34)进行拉普拉斯变换，可得位移传递函数为：

$$\left| \frac{X_g(s)}{U(s)} \right| = \left| \frac{s^2}{-s^2 + 2\zeta\omega_f s + (\kappa+1)\omega_f^2} \right| \quad (3.35)$$

对于该单自由度体系，设 $s = i\beta\omega_f$ ，带入式(3.35)可得：

$$\begin{aligned} \left| \frac{X_g(i\beta\omega_f)}{U(i\beta\omega_f)} \right| &= \left| \frac{1}{-1 + 2\zeta \frac{1}{\beta} i + (\kappa+1) \frac{1}{\beta^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left[ (\kappa+1) \frac{1}{\beta^2} - 1 \right]^2 + \left( 2\zeta \frac{1}{\beta} \right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\kappa+1)^2 \left( \frac{1}{\beta^2} \right)^2 + [4\zeta^2 - 2(\kappa+1)] \left( \frac{1}{\beta^2} \right) + 1}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

当 $1/\beta^2 = (\kappa+1 - 2\zeta^2)/(\kappa+1)^2$ 时，位移达到峰值，带入式(3.36)可知：

$$\begin{aligned}
 D_{mf} &= \left\| \frac{X_g(i\beta\omega_f)}{U(i\beta\omega_f)} \right\|_{\max} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(\kappa+1)^2 \left[ \frac{\kappa+1-2\zeta^2}{(\kappa+1)^2} \right]^2 + [4\zeta^2 - 2(\kappa+1)] \left[ \frac{\kappa+1-2\zeta^2}{(\kappa+1)^2} \right] + 1}} = \frac{1}{2\zeta} \cdot \frac{\kappa+1}{\sqrt{\kappa}}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

为了保证等效线性化的稳定性，令  $D_{mf} \geq 1000f_0$ ，可以得到一个经验上的名义常摩擦的限值：

$$f_0 \leq \frac{1}{2000\zeta} \frac{\kappa+1}{\sqrt{\kappa}} \tag{3.38}$$

式(3.38)也可以用于衡量惯容器的常摩擦。代入空框架的阻尼比和惯容器的刚度比计算。若常摩擦超过此限值，这说明系统的非线性程度高，不能用本节的线性模型来模拟真实情况。此时，就需要 3.5 节中的大摩擦讨论。

### 3.3 非平衡条件下自平衡惯容器的敏感性分析

在实际制作自平衡惯容器的过程中，由于误差的产生，两个飞轮之间会存在微小的差异，甚至丝杠的导程也可能存在一定的不稳定。本文称这种由于导程不稳定、质量不相等造成不自平衡的惯容器为非自平衡惯容器，并认为是自平衡惯容器特有的制造缺陷。在转动的过程中，由于飞轮的转动惯量往往是丝杠的转动惯量的数千甚至数万倍，双飞轮较小的转动惯量之差引起的扭矩之差有可能对惯容器的旋转惯性有影响。因此，有必要对自平衡惯容器进行敏感性分析。

#### 3.3.1 非平衡条件下自平衡惯容器的等效转动惯量

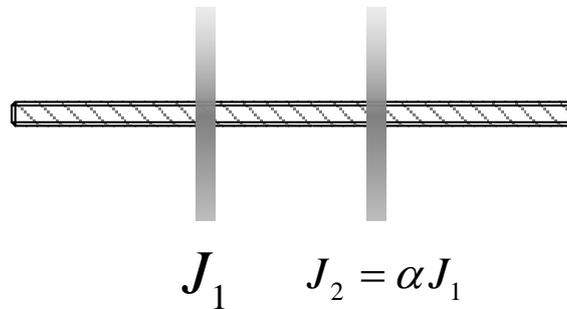


图 3.2 非自平衡惯容器计算简图

图 3.2 为一非自平衡惯容器。由于双飞轮的转动惯量不一致，并且丝杠的转动也并没有被限制，若不考虑丝杠与飞轮之间的摩擦力，丝杠会因双飞轮不平衡的转动力矩而转动。丝杠转动后，双飞轮会相对于丝杠重新自平衡。假定左边的飞轮的转动惯量为  $J_1$ ，称之为标准飞轮；右边的飞轮的转动惯量为  $J_2$ ，用于平衡左边飞轮转动时产生的扭矩，称之为平衡飞轮。

由于双飞轮转动惯量不同，施加于丝杠的扭矩就不相同，这会导致丝杠产生转动。考虑丝杠的转动惯量，设为  $J_0$ 。假设丝杠向左位移为正方向，位移为  $s(t)$ ，丝杠相对地面的角位移设为  $\varphi_a(t)$ 。当两侧螺纹的导程相同时，双飞轮的角位移均为  $\varphi(t)$ ，转向相反。对丝杠可以写出丝杠的运动学方程：

$$J_0 \cdot \ddot{\varphi}_a = J_1(\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_a) - J_2(\ddot{\varphi} + \ddot{\varphi}_a) \quad (3.39)$$

假设：

$$(\alpha, \beta) = \left( \frac{J_2}{J_1}, \frac{J_0}{J_1} \right) \quad (3.40)$$

因此可以求得丝杠转动的角加速度为：

$$\ddot{\varphi}_a = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha + \beta} \ddot{\varphi} \quad (3.41)$$

可以看出丝杠的转向和标准飞轮相同。由于飞轮的绝对转速不同，需要从能量守恒的角度推导非自平衡惯容器的等效转动惯量。参考式(3.7)(3.8)，在惯容器运动过程中，外力做功和阻尼力做功的计算式相同的，不同的在于惯性力的计算式上。初始动能仍旧为 0，末动能为：

$$\begin{aligned} E_{kend} &= \frac{1}{2} J_1 (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_a)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_a)^2 + \frac{1}{2} J_0 (\dot{\varphi}_a)^2 \\ &= \frac{(2\alpha + \beta)^2 + \alpha(2 + \beta)^2 + \beta(1 - \alpha)^2}{(\alpha + \beta + 1)^2} \left[ \frac{1}{2} J_1 (\dot{\varphi})^2 \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

因此，方程(2.24)第二式应当改写为：

$$J_e \ddot{\varphi}(t) + c_d \dot{\varphi}(t) - k_s \left[ u(t) - \frac{\varphi(t)}{2\pi} L_d \right] \left( \frac{L_d}{2\pi} - \mu_f r_s \right) = 0 \quad (3.43)$$

其中：

$$J_e = \frac{(2\alpha + \beta)^2 + \alpha(2 + \beta)^2 + \beta(1 - \alpha)^2}{(\alpha + \beta + 1)^2} J_1 \quad (3.44)$$

式(3.43)中的角位移  $\varphi(t)$  应当认为是双飞轮相对于丝杠的角位移，并且和丝杠的水平位移  $s(t)$  有关系  $L_d \varphi(t) = 2\pi s(t)$ 。

若考虑平衡飞轮处的螺纹导程和标准飞轮处的螺纹导程不同，这样的偏差导致在平衡飞轮实际运行的导程为  $L_d/\lambda$ ，则平衡飞轮的角位移为  $\lambda\varphi(t)$ ，替换式(3.41)相关量可解得丝杠的转动角加速度为：

$$\ddot{\varphi}_{a\lambda} = \frac{1 - \alpha\lambda}{1 + \alpha + \beta} \ddot{\varphi} \quad (3.45)$$

因此可以解得在导程偏差和表观质量偏差影响下的等效转动惯量：

$$J_{e\lambda} = \frac{(\alpha + \lambda\alpha + \beta)^2 + \alpha(1 + \lambda + \lambda\beta)^2 + \beta(1 - \lambda\alpha)^2}{(\alpha + \beta + 1)^2} J_1 \quad (3.46)$$

由于相对转速发生了变化，阻尼力也发生了变化，故方程(3.43)应改写为：

$$J_{e\lambda} \ddot{\varphi}(t) + \frac{(1 + \lambda)^2}{4} c_d \dot{\varphi}(t) - k_s \left[ u(t) - \frac{\varphi(t)}{2\pi} L_d \right] \left( \frac{L_d}{2\pi} - \mu_f r_s \right) = 0 \quad (3.47)$$

对于一般情况，由于丝杠的转动惯量相对于飞轮的转动惯量极小，可以忽略，即认为  $\beta \approx 0$ ，此时式(3.44)和式(3.46)退化为：

$$J_e = \frac{4\alpha}{\alpha + 1} J_1 \quad (3.48)$$

$$J_{e\lambda} = \frac{\alpha(\lambda + 1)^2}{\alpha + 1} J_1 \quad (3.49)$$

### 3.3.2 非平衡条件对等效转动惯量的影响

针对自平衡惯容器特有的两个偏差进行讨论，不考虑丝杠本身的转动惯量。显然，从式(3.48)可知，转动惯量引起的不平衡和丝杠导程引起的不平衡对等效转动惯量的影响可用下述两个修正系数来表达：

$$\varepsilon_J = \frac{4\alpha}{1+\alpha} \quad (3.50)$$

$$\varepsilon_\lambda = \frac{(\lambda+1)^2}{4} \quad (3.51)$$

当发生这些偏差时，等效转动惯量的变化曲线与无偏差的理想值曲线（本文中理想值为水平直线）之间可能有三种关系：相切、斜交、垂直。若相切，则代表在小偏差范围内，这些因素引起的偏差可以忽略不计。这是由于当两者相切时，两条曲线的变化率是相近的。若两条曲线发生斜交，则说明这种偏差会带来一定的影响，但基本上是可控的。若两条曲线发生垂直，则说明这些因素即使有很小的偏差会造成等效转动惯量极大的误差，也即数值上失稳。

首先讨论转动惯量不平衡的影响。限定范围 $0 \leq \alpha \leq 2$ ，因此可以作出图像为：

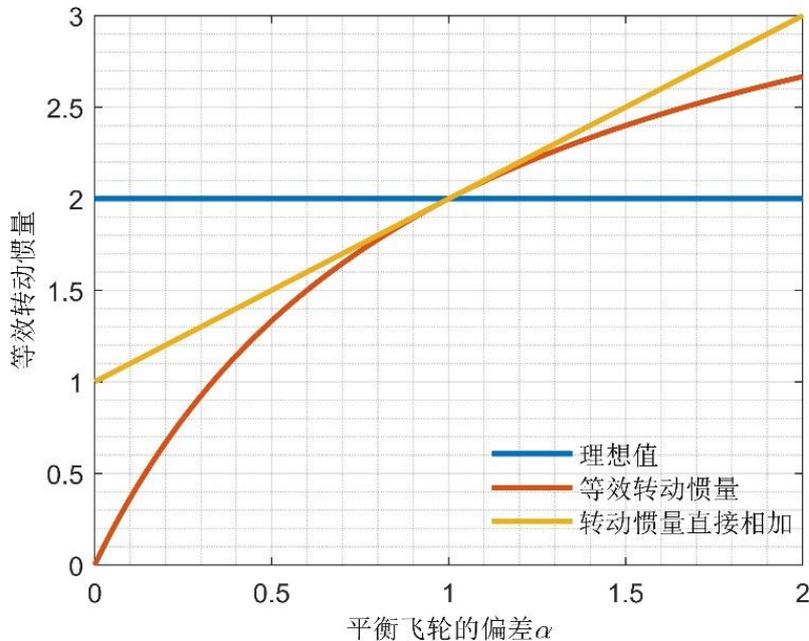


图 3.3 转动惯量不平衡的影响

可以看出，在 $\alpha=1$ 附近，等效转动惯量的变化和直接将转动惯量相加接近，

并且略低于转动惯量直接相加的值。等效转动惯量的变化曲线在  $\alpha = 1$  的切线正好为转动惯量直接相加的曲线。

对于导程的偏差，同样地，限定其范围  $0 \leq \alpha \leq 2$  作出图像：

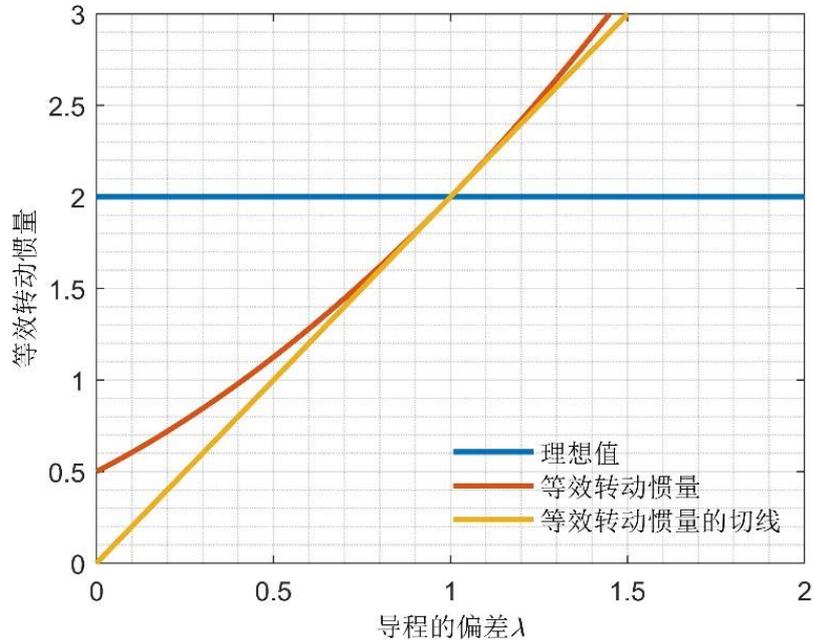


图 3.4 导程偏差的影响

可以对比两者的影响，导程的偏差要大于转动惯量的偏差的影响。这一点可以从  $J_{e\lambda}$  的变分可知：

$$\begin{aligned} \delta J_{e\lambda} \Big|_{\alpha=1, \lambda=1} &= \left( \frac{\partial J_{e\lambda}}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial J_{e\lambda}}{\partial \lambda} \delta \lambda \right) \Big|_{\alpha=1, \lambda=1} = \left[ \left( \frac{\lambda+1}{\alpha+1} \right)^2 \delta \alpha + \frac{2\alpha(\lambda+1)}{\alpha+1} \delta \lambda \right] \Big|_{\alpha=1, \lambda=1} \\ &= \delta \alpha + 2\delta \lambda \end{aligned} \quad (3.52)$$

由于等效转动惯量的变化曲线在点 (1,2) 附近并不与水平直线相切，这代表在标准情况附近，两曲线发生斜交，即导程的偏差会引起两倍于该偏差的等效转动惯量的偏差，因此等效转动惯量对这两个缺陷的敏感性较大；但是曲线没有出现数值上失稳，故仍在一定的可控范围内。

### 3.3.3 非平衡条件对自平衡惯容器调谐的影响

单个惯容器受力的系统简图如图 3.5 所示。不考虑常摩擦和载摩擦，惯容器构件单独在外界激励下的运动方程为：

$$\frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\mu\ddot{u}_d + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2\xi\omega_f\dot{u}_d + \kappa\omega_f^2u_d = -a_g(t) \quad (3.53)$$

故传递函数为:

$$H(s) = -\frac{1}{\frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\mu s^2 + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2\xi\omega_f s + \kappa\omega_f^2} \quad (3.54)$$

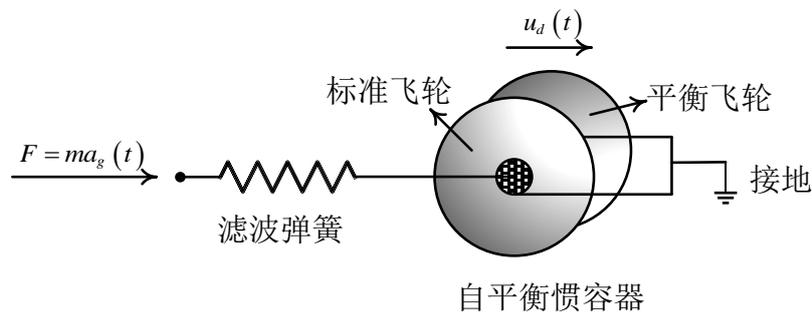
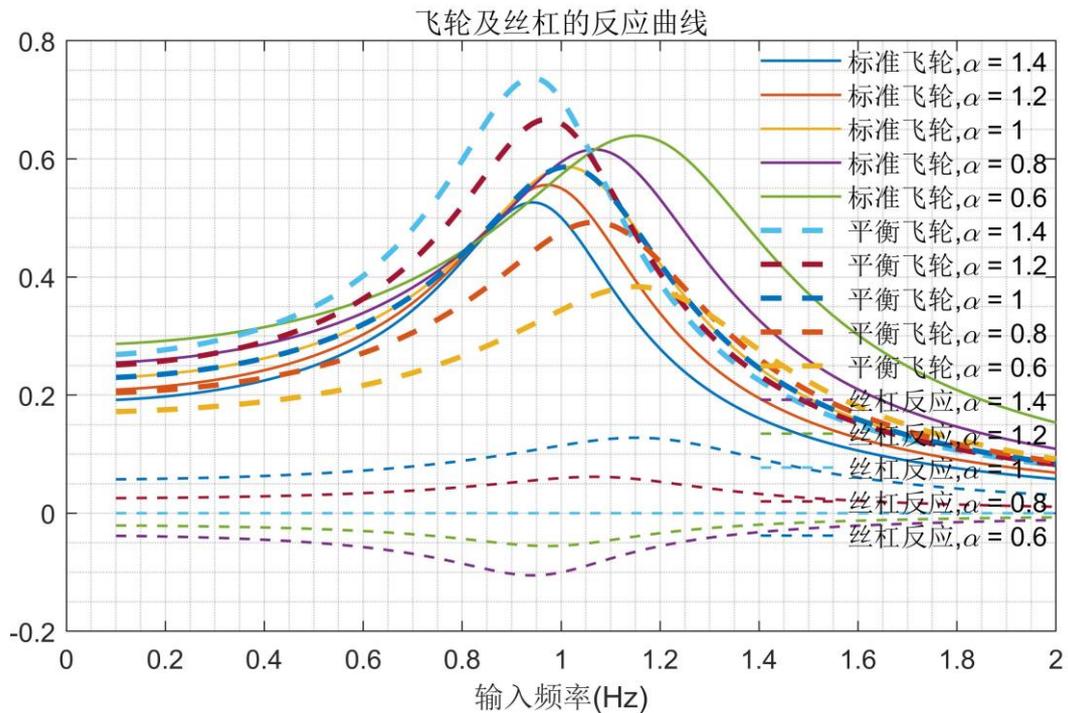
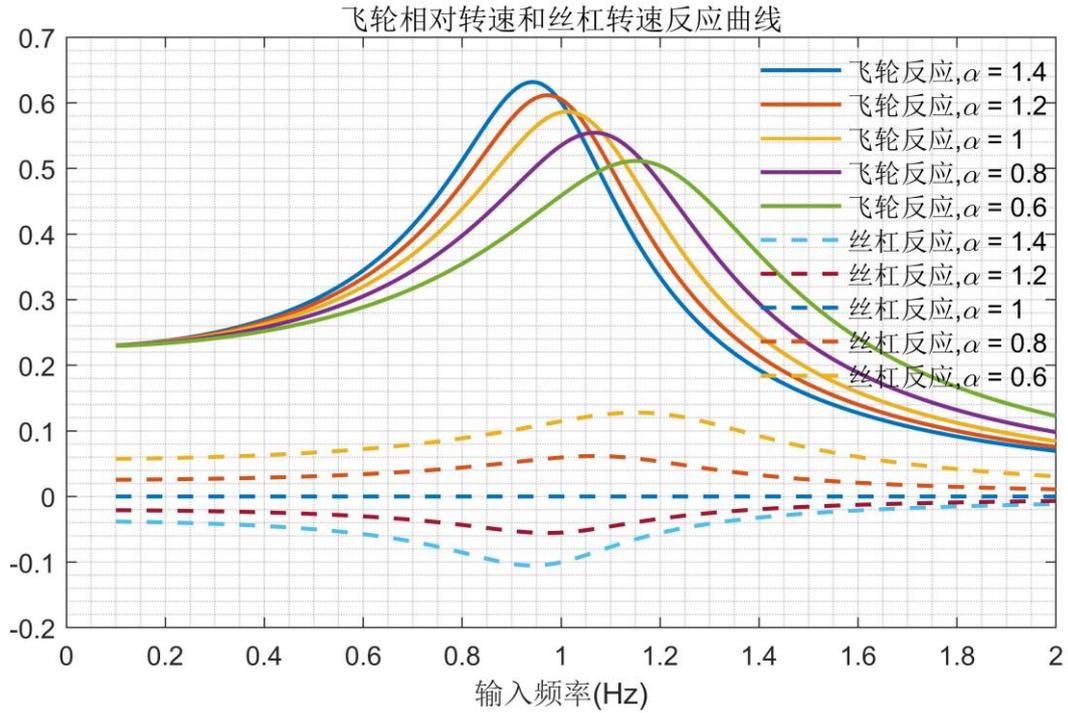


图 3.5 自平衡惯容器示意图

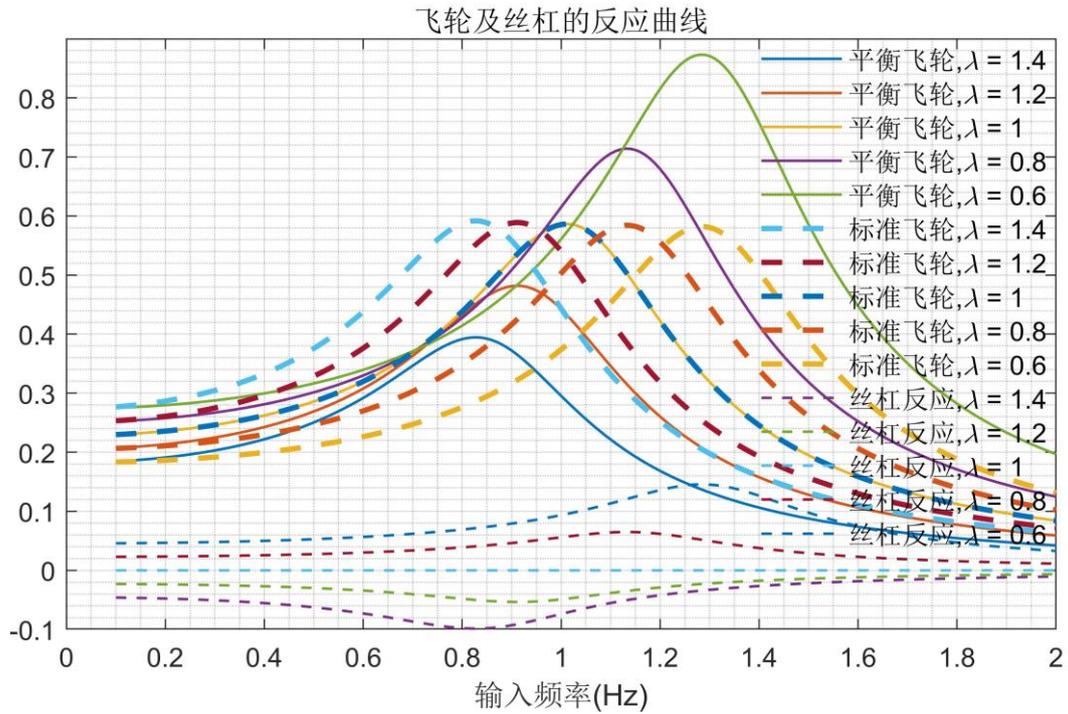


(a) 双飞轮绝对转速及丝杠转速反应曲线

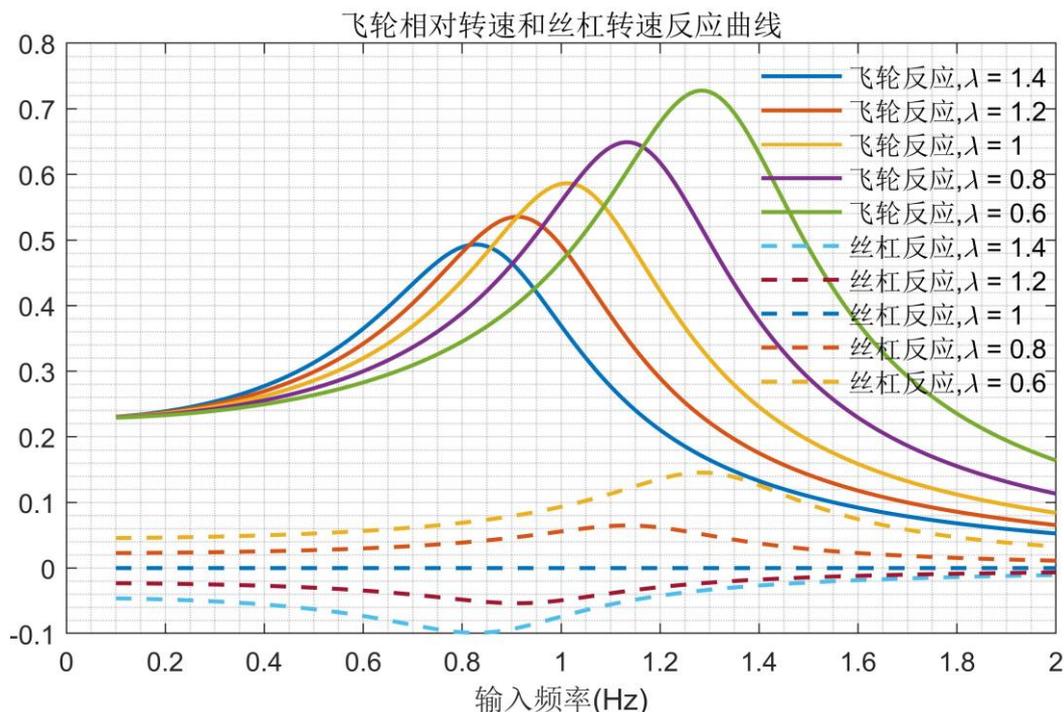


(b) 飞轮相对转速与丝杠转速反应曲线

图 3.6 转动惯量的偏差对双飞轮及丝杠的影响



(a) 双飞轮绝对转速及丝杠转速反应曲线



(b) 飞轮相对转速与丝杠转速反应曲线

图 3.7 导程的偏差对频响函数的影响

取质量比  $\mu = 0.1$ ，由式(2.40)和式(2.43)确定刚度比  $\kappa = 0.1111$  和名义阻尼比  $\xi = 0.0209$ 。设定  $\omega_f = 2\pi \text{ rad/s}$ ，即自振频率为 1Hz，假定  $\alpha$  取值为 1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6,  $\lambda$  取值为 1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6, 分别作出前述转动惯量的偏差和导程偏差下自平衡惯容器的频响函数图。考虑到在转动惯量出现缺陷时，惯容器的共振频率会发生偏移，因此将共振点对齐并加上丝杠转动的频响函数如下所示：

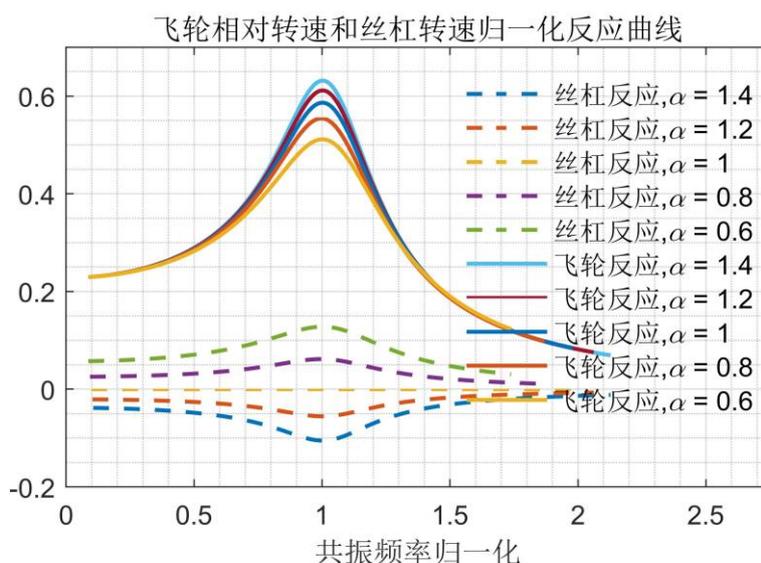


图 3.8 转动惯量的偏差对飞轮和丝杠的影响

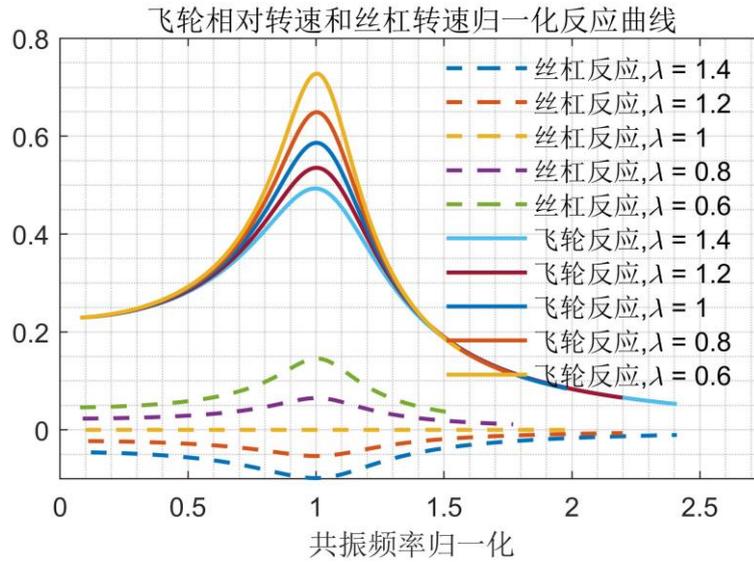


图 3.9 导程的偏差对飞轮和丝杠的影响

可以看出，随着转动惯量的减少及导程的增大，平衡飞轮提供的等效转动惯量减小，飞轮的相对转速也会减小。而当转动惯量和导程完全一致时，丝杠才不会有运动。

### 3.3.4 非自平衡条件对自平衡惯容器耗能的影响

对于一个带自平衡惯容系统的单自由度体系，由于质量和导程的偏差的存在，需要探究这些偏差导致的非自平衡对惯容器耗能的影响。考虑非自平衡后系统的运动方程如下：

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_f\dot{u}(t) + \omega_f^2u(t) + \kappa\omega_f^2[u(t) - u_d(t)] = -a_g(t) \\ \frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\mu\ddot{u}_d + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2\xi\omega_f\dot{u}_d - \kappa\omega_f^2[u(t) - u_d(t)] = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

此时，框架楼层和惯容器的位移传递函数为：

$$\begin{aligned} \frac{U(s)}{A_g(s)} = & -\frac{\frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\mu s^2 + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2\xi\omega_f s + \kappa\omega_f^2}{\frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\mu s^4 + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2\xi\omega_f s^3 + s^2 \left[ \kappa + \frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\mu + \frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\kappa\mu \right] \omega_f^2} \\ & + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2 s(\xi + \kappa\xi)\omega_f^3 + \kappa\omega_f^4 \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\frac{U_d(s)}{A_g(s)} = - \frac{\kappa \omega_f^2}{\frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)} \mu s^4 + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2 \xi \omega_f s^3 + s^2 \left[ \kappa + \frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)} \mu + \frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)} \kappa \mu \right] \omega_f^2 + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2 s(\xi + \kappa \xi) \omega_f^3 + \kappa \omega_f^4} \quad (3.57)$$

同样地， $\alpha$ 取值为1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6,  $\lambda$ 取值为1.4, 1.2, 1, 0.8, 0.6, 分别作出转动惯量的偏差和导程偏差下带自平衡惯容系统的单自由度体系的楼层位移和惯容器的频响函数。

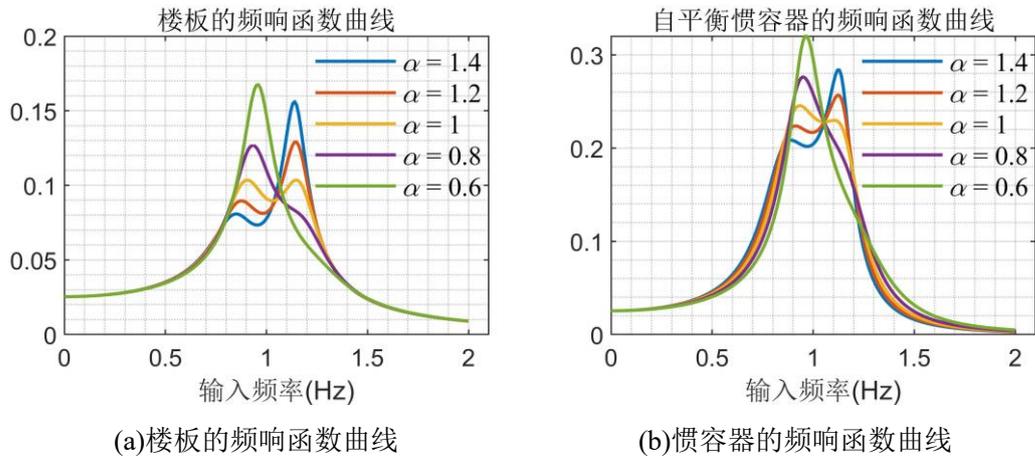


图 3.10 表观质量偏差下系统的频响函数

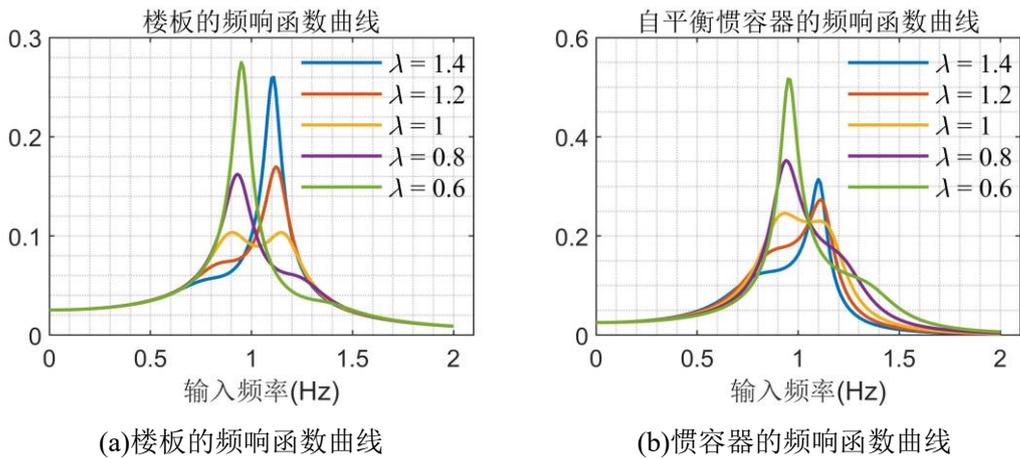
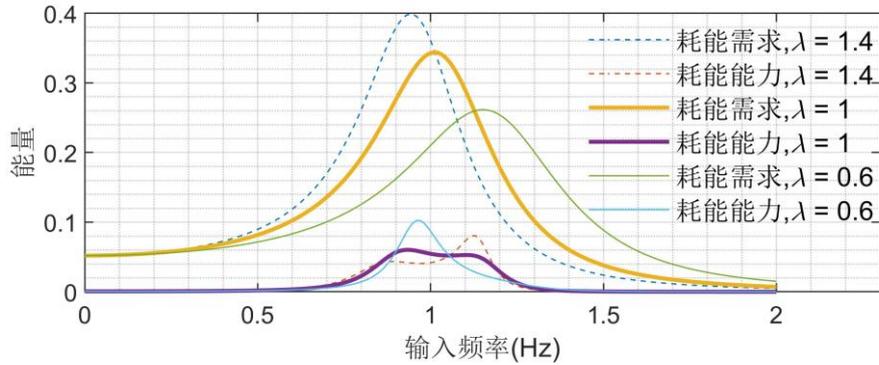


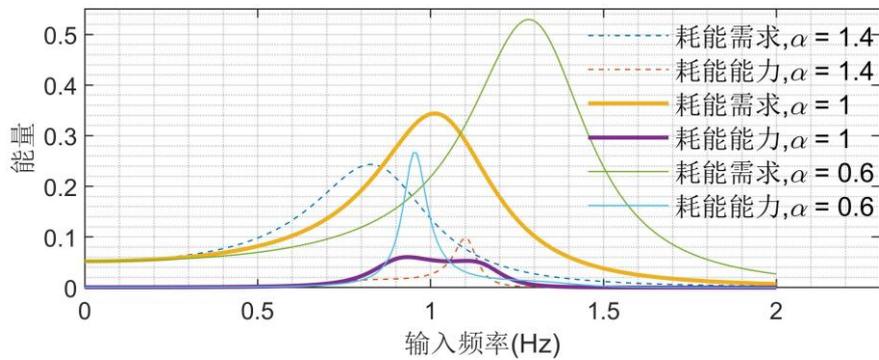
图 3.11 导程偏差下系统的频响函数

可以看出，当双飞轮发生不自平衡的现象时，楼板位移峰值增大，惯容器的控制效果会降低，尤其是导程的偏差的影响更大。对于耗能来说，楼层的位移增大时，惯容器中耗能元件的耗能也会变大。但是不能直接用惯容器的位移来评价

耗能效率，因为一方面惯容器的位移越大往往意味着输入楼层的能量越大，控制效果差，即不能认为惯容器的位移越大耗能效果越佳；另一方面导程的变化也会影响惯容器的名义阻尼比。因此，对于惯容器实际的耗能效果的评价，应当结合惯容器本身的自振频率来确定。



(a) 表观质量影响下的对比



(b) 导程影响下的对比

图 3.12 “耗能能力”与“耗能需求”对比

事实上，惯容器在每个频率下的耗能能力不同，而在装配到结构上之后结构和惯容系统的受迫振动频率是相同的，那么可以将结构对惯容器的作用力看作惯容器的外激励，因此可以确定在每个频率下惯容器的实际耗能需求。

如图 3.6 和图 3.7 中所示的曲线族，这些曲线族代表了单个惯容器在外界激励下的频响函数曲线，显示惯容器的反应随着输入频率的变化、偏差的大小而不同。由于惯容器的耗能能力与惯容器的位移的平方有关，那么可以将这些曲线族平方后看作惯容器在不同的输入频率下的“耗能能力”。

而将惯容器安装到某一单自由度体系中去后，惯容器的频响函数曲线如图 3.10(b)和图 3.11(b)所示。这时，可以将结构的位移看作惯容器的“外界激励”输入惯容器中，因此这些反应曲线平方后可以看作结构要求惯容器作出的能量消耗，即惯容器的实际“耗能需求”。这种“耗能需求”越大，则代表惯容器所消耗的能量越多。不能一味追求这种“耗能需求”达到峰值，原因在于“耗能需求”越

大往往也代表结构本身位移越大。

同时，由于惯容器在不同频率下的“耗能能力”不同，结构在不同输入频率的激励下对惯容器的“耗能需求”也不相同。一般地，应将“耗能能力”曲线与“耗能需求”曲线的峰值尽可能相互匹配，这样可以使得结构需要较大的惯容器耗能时惯容器同时也能提供尽可能较大的耗能能力与之匹配，如图 3.12 所示。只有当质量和导程精确平衡时，“耗能能力”与“耗能需求”才会相互匹配，耗能效果最佳。本文根据这种思想，定义“耗能需求”与“耗能能力”之比的平方根值作为耗能要求，值越大代表效率越低。公式为：

$$\eta = \sqrt{\frac{|H_{Ud}(i\omega)|^2}{|H_s(i\omega)|^2}} = \frac{|H_{Ud}(i\omega)|}{|H_s(i\omega)|} \quad (3.58)$$

其中， $\eta$  即耗能要求， $H_{Ud}(i\omega)$  为装配了自平衡惯容器后框架的楼层的频响函数， $H_{SDOF}(i\omega)$  为惯容器单独在外界激励下的频响函数。耗能要求的峰值点越低代表惯容器“做尽可能最少的事情”就可以达到最佳的结构控制效果。

因此，由式(3.54)与式(3.57)可知，耗能要求的计算式为：

$$\begin{aligned} \eta &= \left| \frac{H_{Ud}(i\omega)}{H_s(i\omega)} \right| \\ &= \frac{\kappa\omega_f^2}{\left\{ \frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\mu s^4 + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2 \xi\omega_f s^3 + s^2 \left[ \kappa + \frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\mu + \frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\kappa\mu \right] \omega_f^2 \right.} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2 s(\xi + \kappa\xi)\omega_f^3 + \kappa\omega_f^4 \right\} \\ &= \frac{1}{\frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\mu s^2 + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2 \xi\omega_f s + \kappa\omega_f^2} \\ &\quad \times \frac{\kappa\omega_f^2 \left[ \frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\mu s^2 + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2 \xi\omega_f s + \kappa\omega_f^2 \right]}{\left\{ \frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\mu s^4 + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2 \xi\omega_f s^3 + s^2 \left[ \kappa + \frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\mu + \frac{\alpha(\lambda+1)^2}{2(\alpha+1)}\kappa\mu \right] \omega_f^2 \right.} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\lambda+1)^2 s(\xi + \kappa\xi)\omega_f^3 + \kappa\omega_f^4 \right\} \end{aligned} \quad (3.59)$$

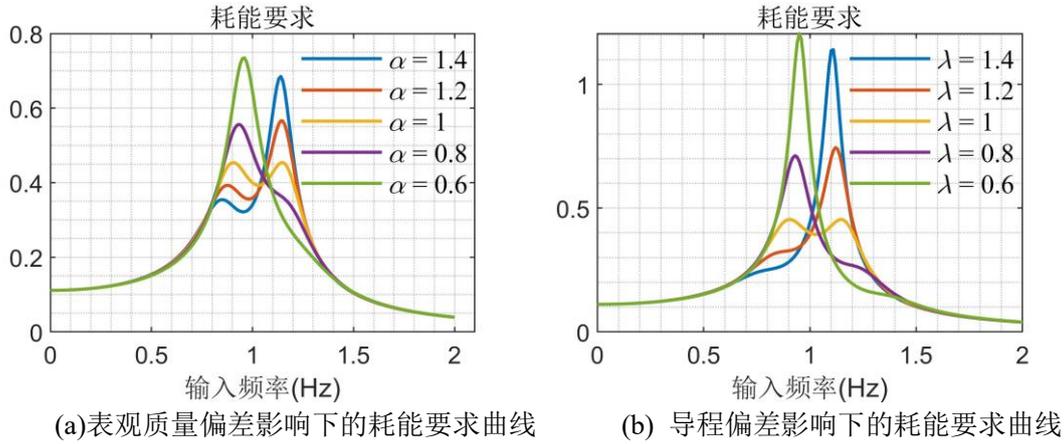


图 3.13 两种偏差影响下的耗能要求曲线

可以看出，质量和导程的偏差越大，惯容器的耗效率就越差，并且导程的偏差的影响要大于转动惯量的偏差的影响。观察式(3.59)和式(2.29)可知，两者只相差一个常数项  $\kappa\omega_f^2$ 。由定点理论可知，耗能要求曲线和框架楼板位移的频响函数的定点的频率应当是相同的。这从能量消耗的角度解释了优化公式的准确性。

### 3.3.5 量化分析表观质量和导程偏差的影响

为了量化表观质量和导程偏差所带来的影响，以最优控制为归一化目标，以频响函数峰值的误差在 5%以内为界，讨论表观质量和导程偏差的限值。

首先尝试计算出在  $\mu = 0.1$  时，表观质量和导程偏差造成结构频响函数峰值被放大的倍数，结果如所示。可以看出，较小偏差对频响函数峰值的影响线性程度较好，并且导程偏差的影响要大于表观质量偏差。同时，正偏差的影响要大于负偏差。由于线性程度较好，在考虑表观质量偏差和导程偏差的综合影响时可以直接相加考虑。若控制放大倍数在 1.05 倍以下，即频响函数峰值的误差在 5%，则质量偏差允许的范围为 -5.4% ~ 4.2%，导程偏差允许的范围为 -2.4% ~ 1.9%。

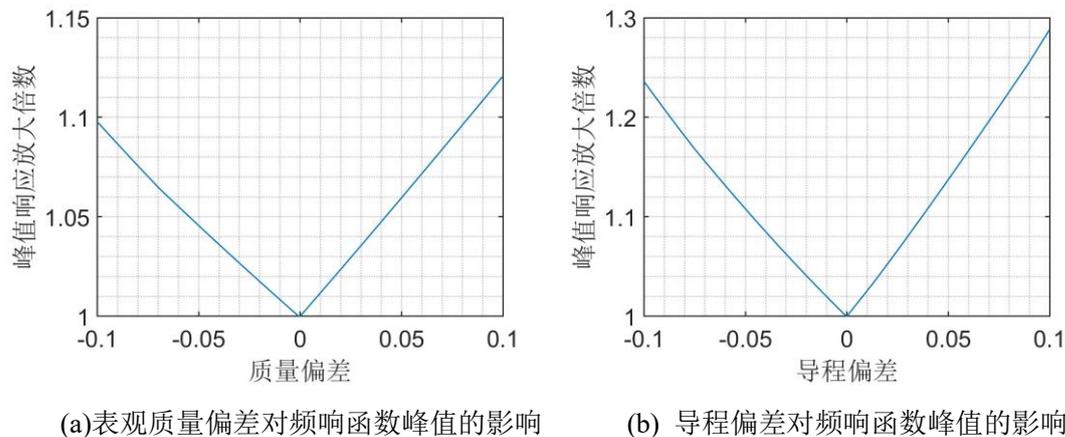


图 3.14 质量和导程偏差的影响

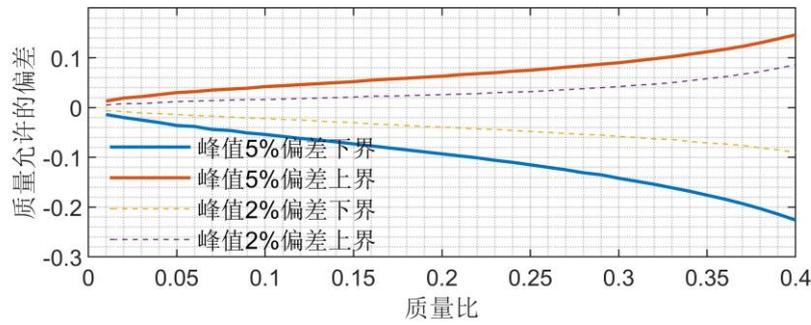


图 3.15 不同质量比下允许的飞轮的表现质量偏差

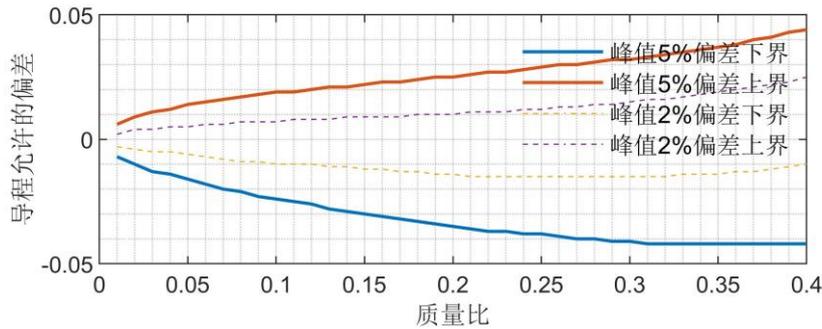


图 3.16 不同质量比下允许的导程偏差

应当注意的是，惯容器的质量比也会影响到这些偏差允许的范围。考虑  $\mu = 0.01 \sim 0.4$ ，可以作出该范围内在控制频响应函数峰值的误差在 2%和 5%以内时允许的表现质量偏差和导程偏差图如上。

可以看出，随着质量比的增大，允许的表现质量和导程偏差的范围也会一定程度地扩大，同时导程偏差的影响会远大于质量偏差的影响。若从严控制（即  $\mu = 0.01$ ），控制目标误差在 2%以内需要控制表现质量偏差在 0.5%，导程偏差在 0.2%以内；控制目标误差在 5%以内需要控制表现质量偏差在 1.2%，导程偏差在 0.6%以内。一般表现质量容易达到这样的精度控制，而对导程精度提出了较高的要求，实际应用中应当注意。

### 3.4 针对小摩擦情况下优化参数的修正

#### 3.4.1 载摩擦影响下系统的影响

仅在载摩擦作用时，整个系统为线性系统。为了研究载摩擦的影响，同样地，定义质量比  $\mu = 0.1$ ，刚度比和名义阻尼比根据式(2.40)和式(2.43)确定为  $\kappa = 0.1111$ ， $\xi = 0.0209$ 。设定载摩擦系数  $\varepsilon_0 = 1, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2$ 。忽略框架本

身的阻尼比, 在外界激励下框架的楼板的位移响应和惯容器的位移响应可以用式(3.22)和式(3.23)计算, 如图 3.17 所示。显然, 载摩擦的存在会削弱惯容器的调谐效果。图中可以看出摩擦力会导致响应的峰值增大, 代表结构的最大位移增大, 因此控制效果变差; 同时两个峰将不等高, 这意味着惯容器失调。当摩擦力有 5% 时, 楼板的峰值位移响应增大了 8%, 这表明自平衡惯容器的减震效果降低。

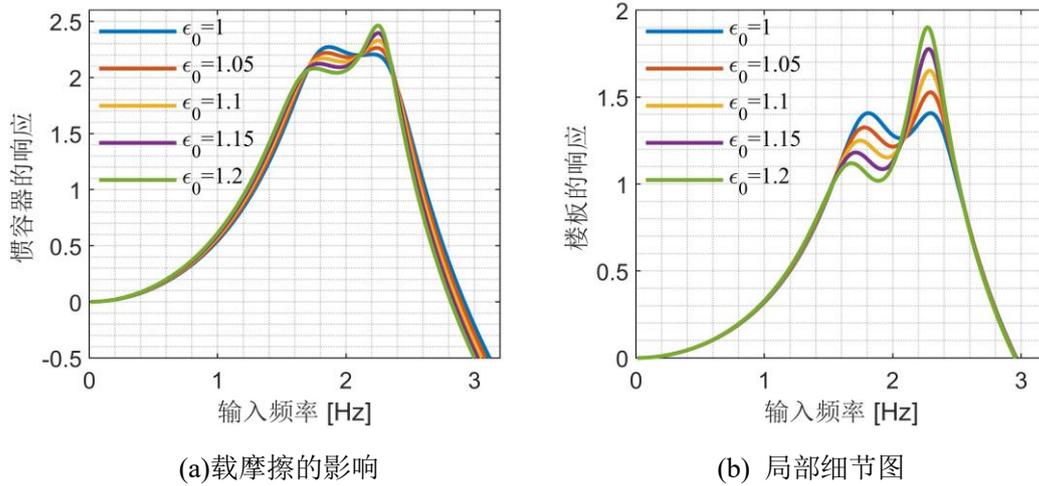


图 3.17 仅载摩擦作用下系统的响应

为了消除载摩擦对系统的影响, 需要对惯容器及阻尼器进行参数上的修正。观察式(2.26)和式(3.19), 这里不考虑常摩擦, 可以发现两者的区别就在于方程中刚度这一项的不同。直接对式(3.19)求优化参数是费力且重复的, 但可以通过数学上的处理方法进行回避。将刚度项中的载摩擦系数移到刚度比和阻尼比上:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_f\dot{u}(t) + \omega_f^2 u(t) + \kappa\omega_f^2 [u(t) - u_d(t)] = -a_g(t) \\ (\varepsilon_0\mu)\ddot{u}_d(t) + (2\varepsilon_0\xi\omega_f)\dot{u}_d(t) - \kappa\omega_f^2 [u(t) - u_d(t)] = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

可以看出上式与式(2.26)在数学表达式上没有本质区别, 因此可以直接写出考虑载摩擦后的修正的优化参数:

$$\begin{aligned} \kappa^{opt} &= \frac{\varepsilon_0\mu}{1 - \varepsilon_0\mu} \\ \varepsilon_0\xi^{opt} &= \frac{\varepsilon_0\mu}{2} \sqrt{\frac{3\varepsilon_0\mu}{(1 - \varepsilon_0\mu)(2 - \varepsilon_0\mu)}} \end{aligned} \quad (3.61)$$

上式看起来是修正了质量比, 但事实上这是为了数学处理上的方便进行的变量代换, 实际上是用一个“名义”的质量比计算刚度比和阻尼比, 本质上是修正

刚度比和阻尼比。为了验证修正公式的准确性，设载摩擦系数  $\varepsilon_0 = 1.1$ ，则修正过的刚度比和阻尼比分别为  $\kappa = 0.1236$ ， $\xi = 0.0244$ 。考虑以下三种情况：

Case I：不考虑摩擦的带自平衡惯容器的单自由度体系；

Case II：考虑载摩擦，但是不修正刚度比和阻尼比；

Case III：考虑载摩擦，并修正刚度比和阻尼比。

做出上述三种情况下框架楼板的传递函数如图 3.18 所示。

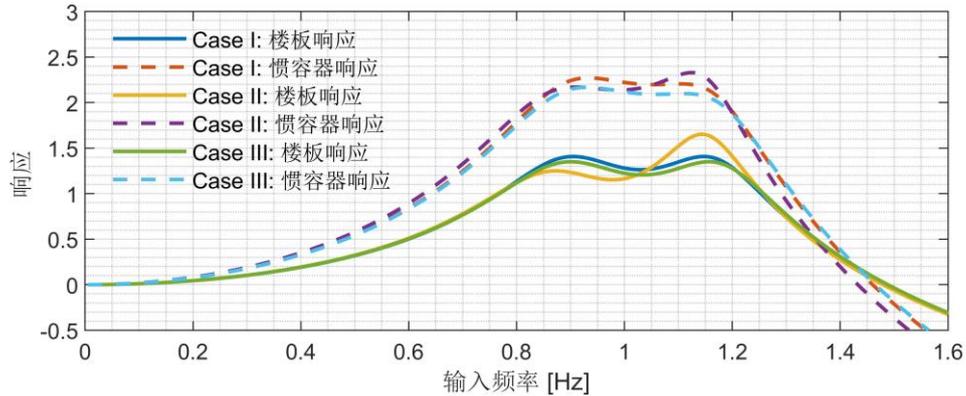


图 3.18 修正参数后的传递函数

从图 3.18 可知，载摩擦的存在削弱了实际的连接刚度，因此自平衡惯容器实际的质量比和阻尼比偏小。并且，由于载摩擦的出现，惯容器本身的调谐效果也降低，因为频响函数的双峰不再保持同一高度。而 Case III 中实际的质量比是不能和修正前的刚度比与阻尼比相匹配的，因此会出现 Case II 中减振效率降低的情况。而 Case III 由于质量比要比 Case I 大，因此当修正了刚度比与阻尼比后，新的一组参数能够相互匹配并且发挥出更好的减振效果。

### 3.4.2 常摩擦影响下对调谐的影响

同样地，为了确定常摩擦的影响，定义质量比，刚度比和名义阻尼比为  $\mu = 0.1$ ， $\kappa = 0.1111$ ， $\xi = 0.0209$ 。考虑式 (84)，名义常摩擦限制为 0.045，因此可以取  $f_0 = 0.001, 0.002, 0.003, 0.01, 0.03$  进行讨论。

图 3.19 即为带自平衡惯容器的框架的楼板的位移频响函数图，右边为放大的细节图像。可以看出，每条曲线都有一定的不稳定，因为常摩擦对于惯容器来说是一种非线性的缺陷。随着摩擦力的增大，自平衡惯容器的调谐效果也变差，因为频响函数的双峰不再保持同一高度。这种影响和载摩擦的影响类似。和载摩擦的修正类似，需要修正惯容器的刚度比和名义阻尼比来使得双峰重新保持同一高度。然而，一方面由于方程(3.29)的解过于复杂，理论上的修正公式不实用；另一方面由于等效线性化的适用范围较小，因此针对常摩擦的修正放在 3.5 节的

大摩擦中去讨论。

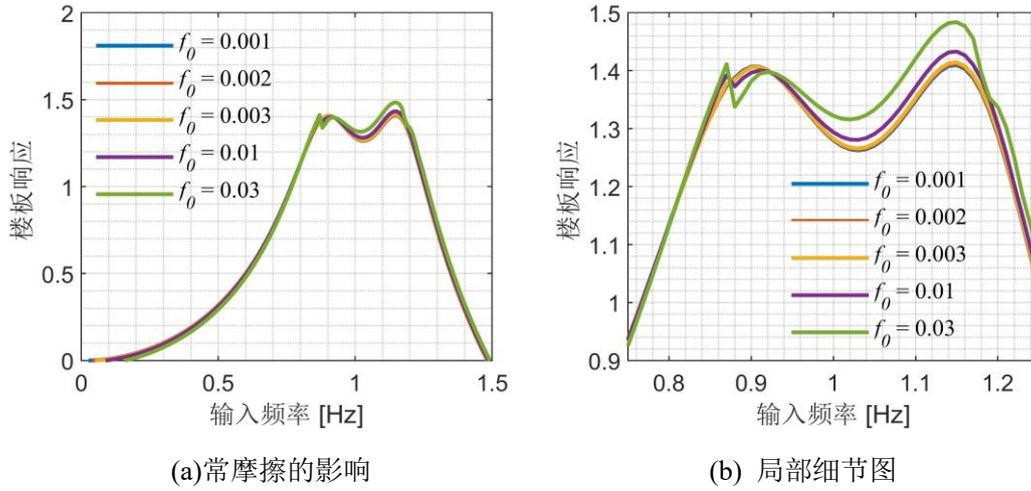


图 3.19 常摩擦影响下框架楼板的响应

### 3.4.3 小摩擦对阻尼器耗能的影响

$$\begin{aligned}
 E_{\text{structure}} &= \oint_u 2\zeta\omega_f \dot{u} du = 2\pi R_0^2 \zeta \omega_f \omega \\
 E_{\text{damping}} &= \oint_u 2\zeta\omega_f \dot{u}_d du_d = 2\pi R_1^2 \zeta \omega_f \omega \\
 E_{\text{friction}} &= \oint_u |f_0 du_d| = 4f_0 |R_1|
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

从前述可知，常摩擦和载摩擦影响了惯容器的调谐效果，但是不能说明这两种摩擦对于惯容器并联的阻尼器的耗能的影响。一方面，由于载摩擦是一种线性化的摩擦，因此其影响也是线性的，从式(3.19)和式(3.61)可以看出，虽然阻尼比也会因载摩擦系数而增大，但只会增大  $\varepsilon_0$  倍，不足以匹配因载摩擦而修正的质量比，因此一定是不利于阻尼器耗能的。而对于常摩擦，需要重新评估其对耗能的影响。实际结构中由于结构存在阻尼，因此在共振频率处结构的振动与激励会产生相位差，导致振动能量输入结构。这部分输入的能量靠结构自身的阻尼、附加的阻尼器和摩擦力来消耗。这三部分消耗的能量可用式(3.62)计算。

在激励的频率接近结构的自振频率时，结构的最大位移会达到峰值，此时阻尼器的工作性能是最佳的。这种现象可以用频域上的耗能占比图表现。频域上的耗能占比图可用于了解耗能设备的工作性能。显然，对于常摩擦而言，阻尼器的振幅会影响到其耗能的占比，因为阻尼耗能与振幅的二次方相关，而常摩擦只有一次方。为了研究常摩擦的影响，假设原框架的阻尼比  $\zeta = 0.01$ ，而质量比，刚度比和名义阻尼比为  $\mu = 0.1$ ， $\kappa = 0.1111$ ， $\xi = 0.0209$ ，名义常摩擦  $f_0$  为 0.005，

0.01和0.03。由于振幅也有影响，因此考虑地面峰值加速度（PGA）为 50gal，100gal 和 200gal。

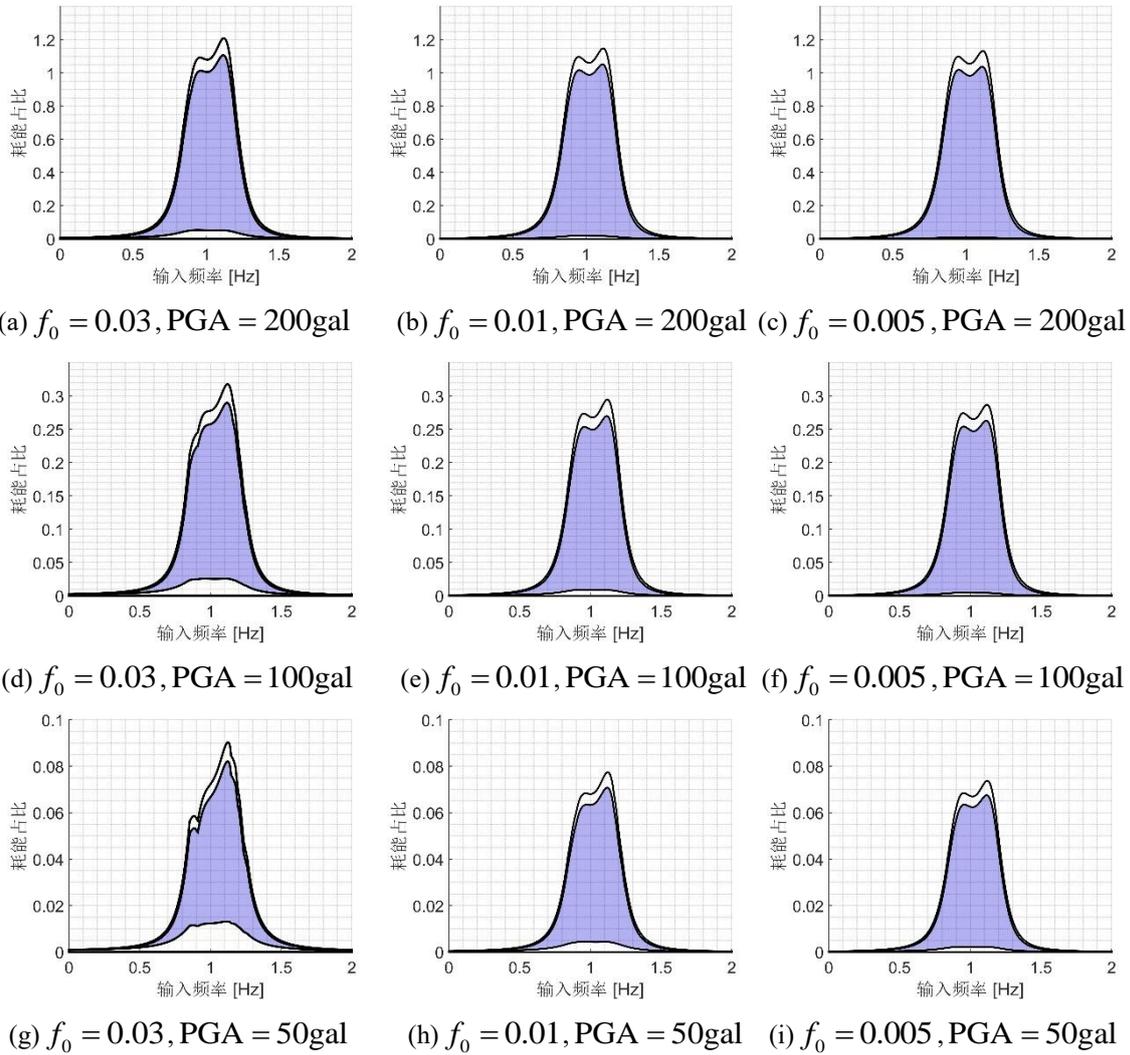


图 3.20 频域耗能占比图

图 3.20 为按照式(3.62)计算的频域中结构自身阻尼、惯容器中的附加阻尼器以及常摩擦的耗能占比图。每张图有三个图层组成，最上面的白色图层代表了结构自身阻尼的耗能占比，中部蓝色图层代表了惯容器中的附加阻尼器的耗能占比，最底下的白色图层代表了自平衡惯容器的常摩擦耗能占比。随着地面峰值加速度的增加，常摩擦的影响会逐渐减小，因为常摩擦的耗能能力近似正比于地面峰值加速度的值，而结构自身的阻尼和惯容器中附加的阻尼器的阻尼的耗能能力则近似正比于峰值加速度的平方。显然，常摩擦会提高系统的整体的耗能。但是，需要注意的是，耗能量的增大并不代表有利于结构，因为耗能的增大往往意味着结构的位移的增大。因此，常摩擦会破坏阻尼器的正常工作状态。同样应当注意的是，由于在地面峰值加速度较小时常摩擦的影响很大，因此在控制较小的振动时，

如风致振动，应当充分考虑常摩擦的影响，针对常摩擦的刚度比和名义阻尼比的修正是非常有必要的。

### 3.5 针对大摩擦情况下优化参数的修正

对于载摩擦来说，其大小和正压力相关。只要不发生自锁现象，载摩擦是不影响惯容器运动的，只是削弱了连接刚度，因此可以作为修正参数处理；而常摩擦具有很强的非线性，因此本节主要针对常摩擦进行讨论。

#### 3.5.1 大摩擦的仿真模型

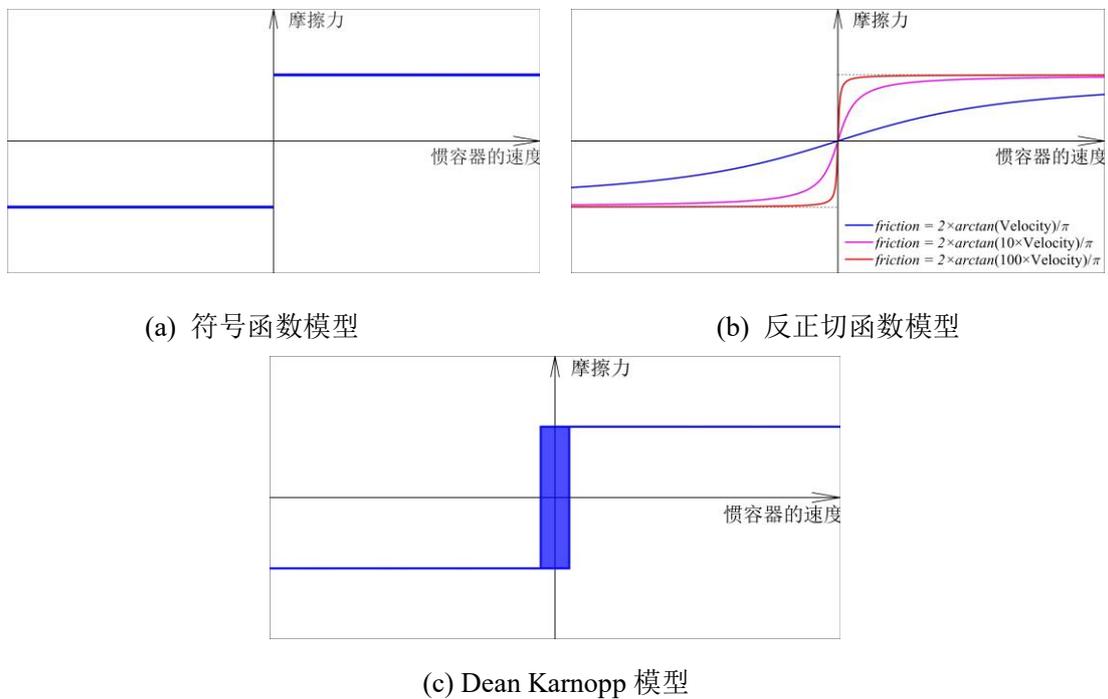


图 3.21 几种模拟摩擦力的模型

很多研究者对常摩擦的模型提出过很多模拟的模型来研究其对惯容器的影响。在文献<sup>[83]</sup>中，常摩擦的模型被认为是和式(3.1)一样，如图 3.21 (a) 所示。而在文献<sup>[88]</sup>中，一种利用反正切函数的连续近似被用来模拟常摩擦，如图 3.21 (b) 所示。这两种模型针对无卡顿或者卡顿时间极短的运动是拟合效果较好。但是，当摩擦力增大时，惯容器可能会出现卡顿的情况，这两种连续模型不能模拟这种情况，因为在惯容器出现卡顿时，惯容器受到的是静摩擦力，其大小取决于外力，而不是一个恒定的值。

在文献<sup>[91]</sup>中，Dean Karnopp 指出对于数值计算来说，式(3.1)过于理想化，因

为数值计算过程中不存在速度为 0，此时速度的值是一个非常接近 0 的数；而当惯容器出现卡顿时其速度确实为 0。因此，他首先将运动状态分为“滑动”(Slip)和“卡顿”(Stick)两种情况。为了解决数值计算中速度不能为 0 的矛盾，他定义了一个在 0 附近的极小区间。在这个区间内，可以将惯容器的速度认为是 0，属于卡顿的状态。Dean Karnopp 的摩擦模型如图 3.21 (c) 所示。

### 3.5.2 大摩擦下系统仿真模型

本文将基于 MATLAB 的 Simulink 工具箱来建立在大摩擦情况下带自平衡惯容器的单层框架的运动方程的仿真。首先需要建立的是 Dean Karnopp 摩擦模型，如图 3.22 所示。该仿真模型主要有三个选择器 A、B、C 和红色虚线框内的两个逻辑输出构成。仿真的具体过程如下：

- (a) 不论惯容器处于滑动还是卡顿的状态，可以先由方程组(3.19)第二式计算出初始的惯容器的阻尼力，弹簧恢复力和摩擦力之和（以下简称合力）作为待修正的输入进入选择器 B 和选择器 C；
- (b) 将惯容器的速度的绝对值也输入选择器 B 中，用于判断惯容器处于滑动还是卡顿的状态。若惯容器处于滑动状态，则选择器 B 输出值为合力；否则输出 0，代表惯容器没有处于运动的状态；
- (c) 判断连接弹簧是否能够克服常摩擦驱动惯容器运动，将连接弹簧的力输入选择器 C 中。若连接弹簧上的力大于常摩擦的大小，则代表惯容器处于滑动的状态，选择器 C 输出合力；否则输出 0，代表惯容器没有处于运动的状态。图中的 0.7 即为一种常摩擦的值；
- (d) 将选择器 B 和 C 的输出进行逻辑判断。选择器 C 的存在是为了判断惯容器在进入卡顿状态后能否重新启动的依据。针对 B 和 C 的输出情况可以作出下表：

表 3.1 运动状态对应表

惯容器的运动状态	B 的输出为合力	B 的输出为 0
C 的输出为合力	惯容器处于运动状态（运动状态 1）	惯容器将启动（运动状态 2）
C 的输出为 0	惯容器依靠惯性运动（运动状态 3）	惯容器卡顿（运动状态 4）

可以看出，当惯容器处于状态 1、2、3 时，适用方程组(3.19)；而处于运动状态 4 时，惯容器则进入卡顿。为了达到处于状态 1、2、3 时输出合力，而处于状态 4 时输出 0，设计了红色虚线框的逻辑输出和选择器 A。首先

将选择器 B 和选择器 C 的输出直接相加，而选择器 A 的输入则为选择器 B 和选择器 C 的输出值之和与和的 0.5 倍。然后判断选择器 B 和选择器 C 的输出值是否相等，若相等则此时为运动状态 1 或者运动状态 4，故原本输出为合力的两倍或者为 0，故除以 2 保证前后相等从选择器 A 中输出。若两者不相等，此时处于运动状态 2 或者运动状态 3，故有一方必为 0，故直接输出两者之和即可；

(e) 将修正后的惯容器的阻尼力，弹簧恢复力和摩擦力之和输出。

图 3.23 即为整个单层框架的 Simulink 仿真模型。积分方法采用四阶龙格-库塔算法，积分步长由积分器自动确定，最大步长不大于 0.001s。

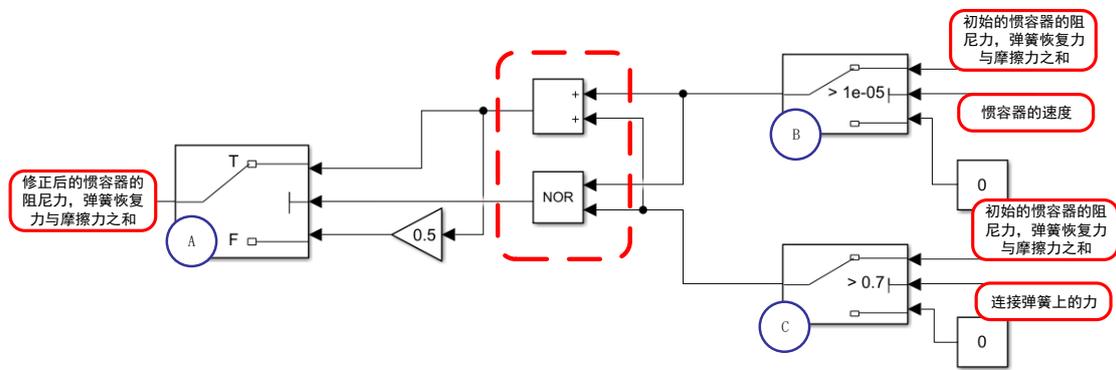


图 3.22 Dean Karnopp 摩擦模型的 Simulink 仿真

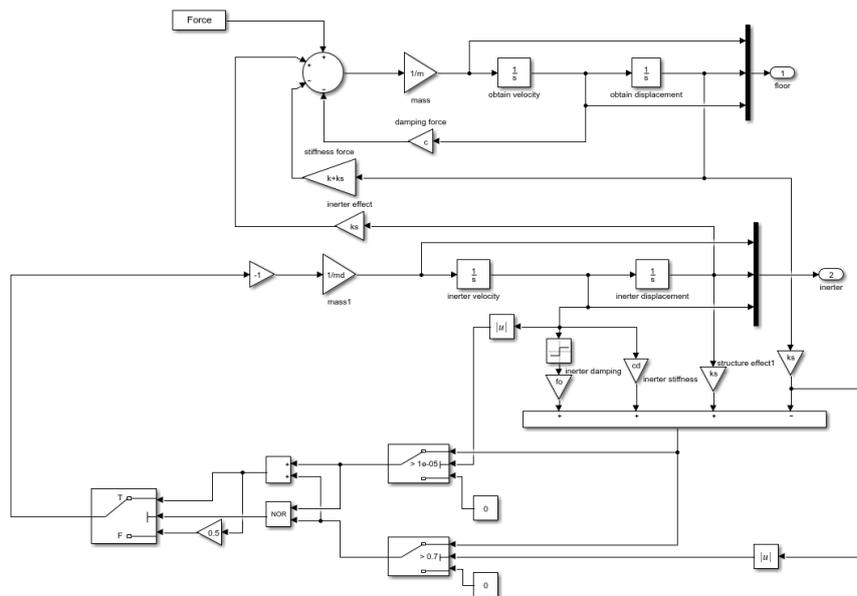


图 3.23 带惯容器的单层框架运动仿真模型

### 3.5.3 大摩擦下系统的简谐受迫振动

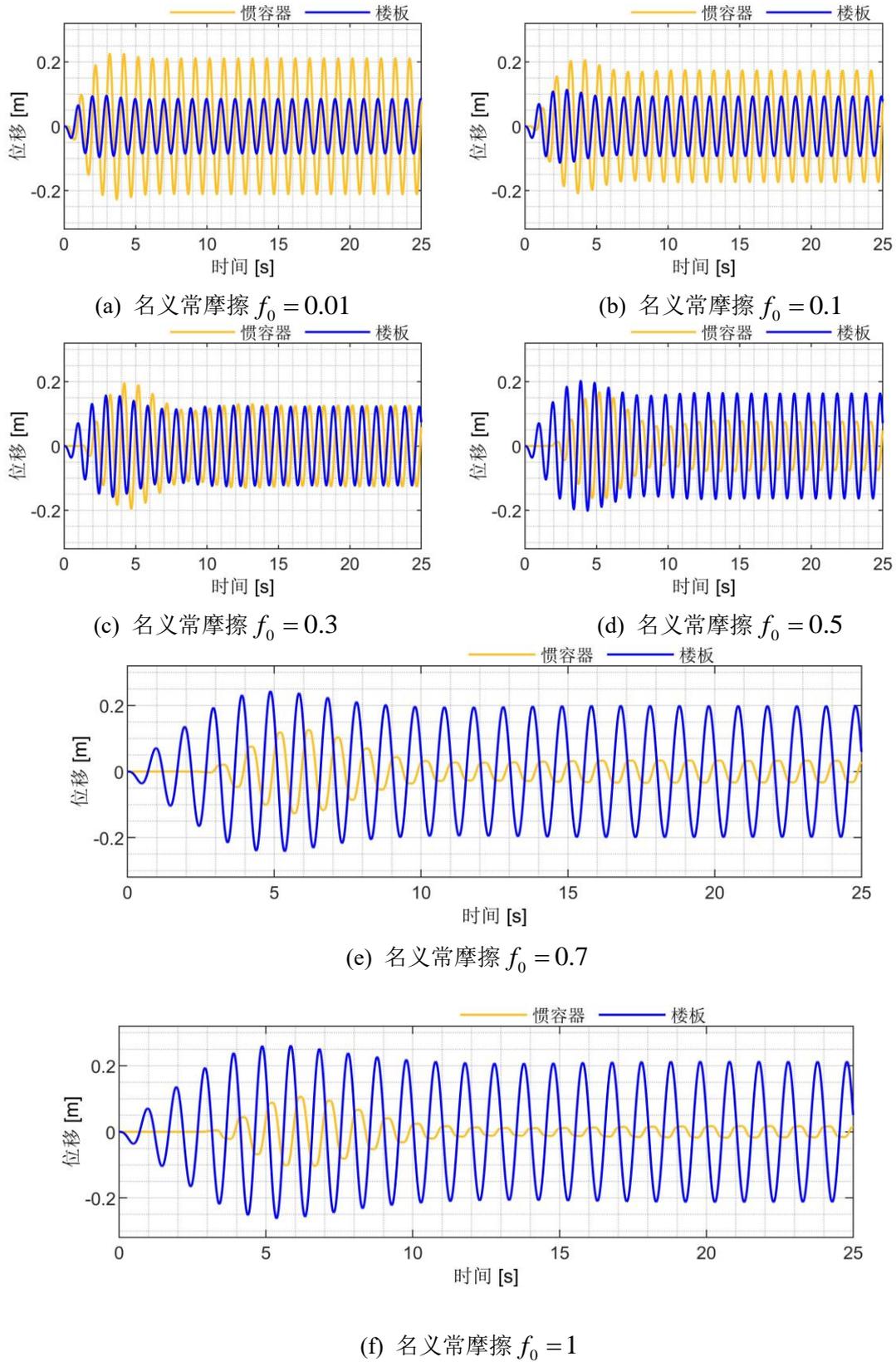


图 3.24 惯容器和楼板的位移响应

本节利用图 3. 23 模拟系统在大摩擦影响下的简谐激励下的运动情况，同时判断模型的正确性。当常摩擦达到一定程度时，惯容器会出现卡顿的现象，惯容器的位移曲线会出现一些水平直线段。同样地，设定原框架的阻尼比  $\zeta = 0.01$ ，质量比，刚度比和名义阻尼比为  $\mu = 0.1$ ， $\kappa = 0.1111$ ， $\xi = 0.0209$ ，名义常摩擦  $f_0$  为 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 1，地面峰值加速度（PGA）为 100gal。可以看出，楼板的位移降低率依赖于惯容器的位移。惯容器的位移越大，楼板的最大位移响应越小。随着常摩擦的增加，惯容器会出现卡顿的现象，大约在名义常摩擦  $f_0 = 0.3 \sim 0.5$  左右。并且常摩擦越大时，惯容器的启动时间也就越晚，处于“卡顿”状态的时间也越长，位移时程曲线的水平直线段越长。同时可以看出，当惯容器的位移时程曲线出现了水平直线段后，楼板的最大位移的降低率不明显，可以说水平直线段的出现意味着阻尼器的失效。因此，对于惯容减振系统来说，过大的常摩擦会使它失效，因为常摩擦阻止了惯容器的吸振，也就影响了振动能量在阻尼器中的耗散。不过，一般机械制造下，对于足尺模型的较大振动来说，惯容器可能实际难以到达名义常摩擦  $f_0 = 0.5$ 。但是在缩尺模型以及较小的振动情况下，即使常摩擦较小也应当考虑其对惯容器的影响。

因此，对于含常摩擦的惯容器的分析中，根据上述分析情况以及式(3.38)，可以由常摩擦的大小大致划分分析的阶段：

- (a)  $f_0 \leq 0.01 \sim 0.05$ ，此区间内等效线性化理论较准确，弱非线性区段；
- (b)  $0.01 \sim 0.05 \leq f_0 \leq 0.5$ ，此区间内等效线性化理论的结果不稳定，理论失效，应当从时程分析的角度来分析常摩擦的影响，强非线性区段；
- (c)  $f_0 \geq 0.5$ ，常摩擦过大使得惯容器几乎不能正常工作，对于工程实际来说没有意义。后续讨论应当限制名义常摩擦不大于 0.5。

### 3.5.4 大摩擦下系统地震波激励下的时程分析

为了评价惯容器在地震作用下的减震效果，本节利用图 3. 23 所示的 Simulink 仿真模型来计算惯容器的减震率，并考虑摩擦力的影响。同样地，设定质量比，刚度比和名义阻尼比为  $\mu = 0.1$ ， $\kappa = 0.1111$ ， $\xi = 0.0209$ ，名义常摩擦  $f_0$  为 0, 0.1, 0.25。地面峰值加速度（PGA）为 100gal。定义减震率为：

$$Rd = \frac{O_{\text{控制}}(\theta)}{O_{\text{无控}}(\theta)} \quad (3.63)$$

其中， $\theta$ 代表结构的响应，如位移、速度、加速度等等；函数  $O(\cdot)$ 代表一种计算方法，如取峰值、均方根值等。本文采用位移峰值、加速度峰值、位移均方根值

和加速度均方根值四种减震率来评价惯容器的减振效果。

计算用的地震波采用日本 311 地震波记录（记录于日本东北大学）和 El Centro 波记录。使用的波的原始数据值如下列图所示：

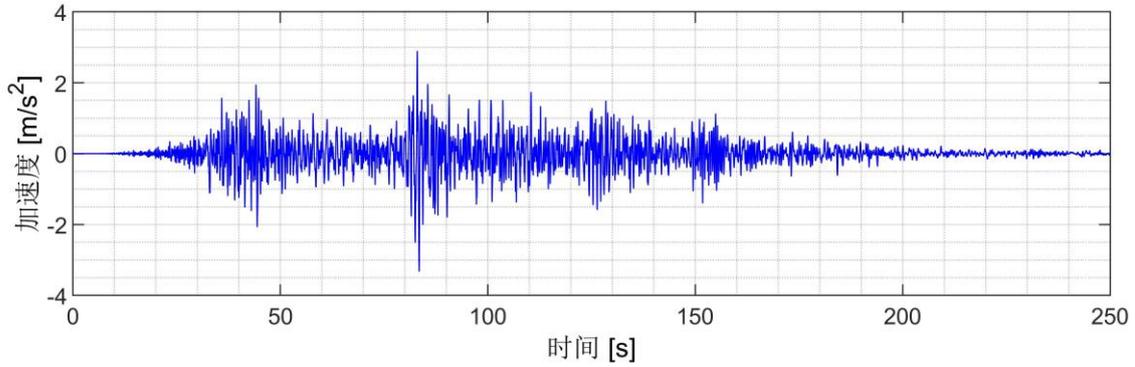


图 3.25 日本东北大学记录 2011 年东日本大地震波

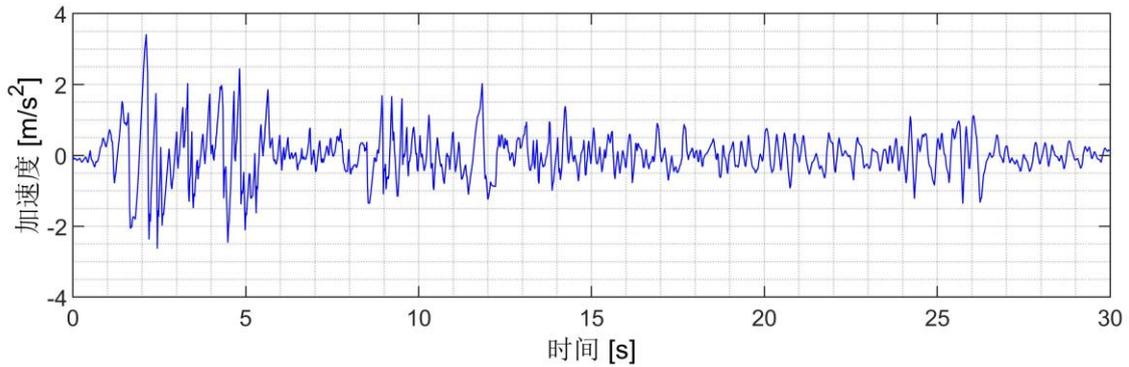


图 3.26 El Centro 波记录

在日本东北大学记录的东日本大地震的记录波和 El Centro 地震波记录的激励下，结构的位移和加速度响应如下列图所示。

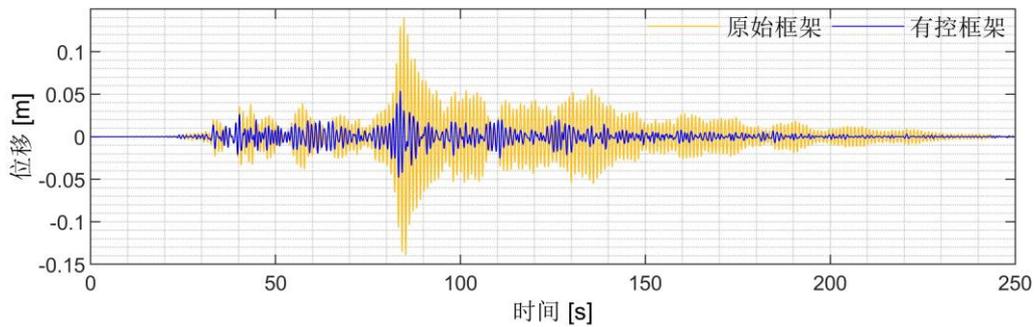


图 3.27 名义常摩擦  $f_0$  为 0 时框架的位移

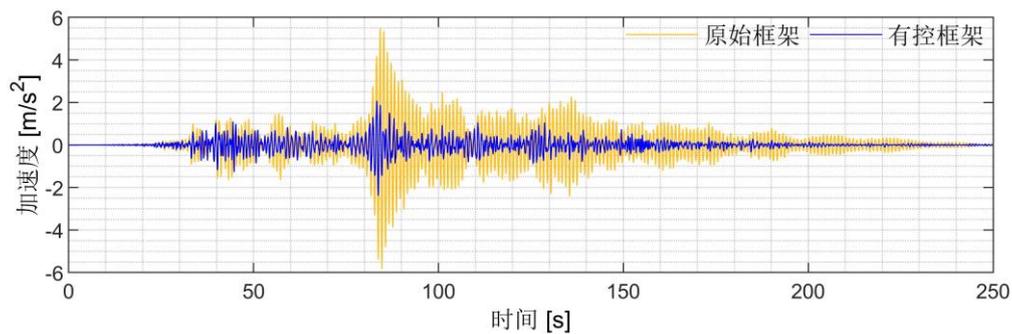


图 3.28 名义常摩擦  $f_0$  为 0 时框架的加速度

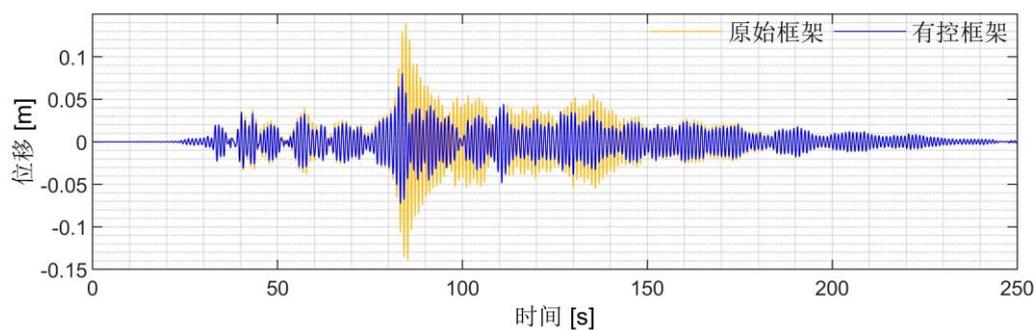


图 3.29 名义常摩擦  $f_0$  为 0.1 时框架的位移

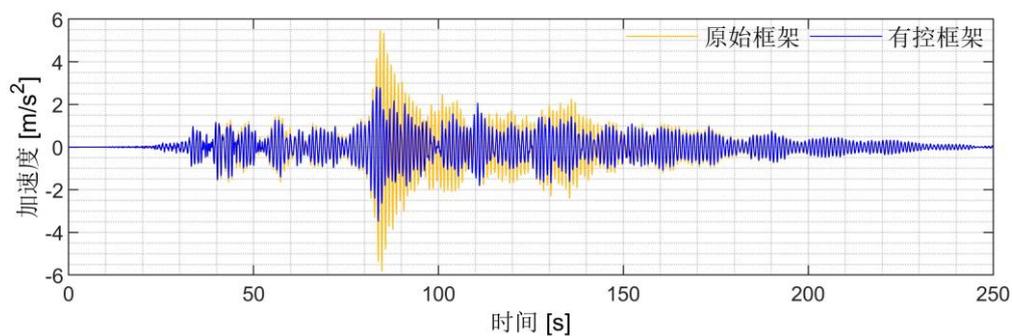


图 3.30 名义常摩擦  $f_0$  为 0.1 时框架的加速度

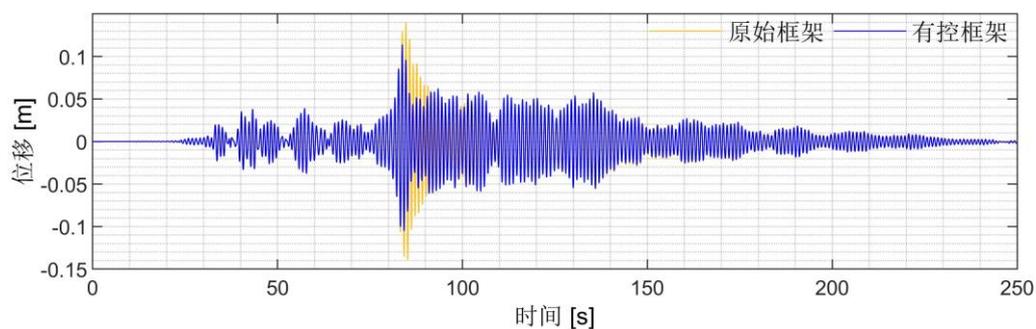


图 3.31 名义常摩擦  $f_0$  为 0.25 时框架的位移

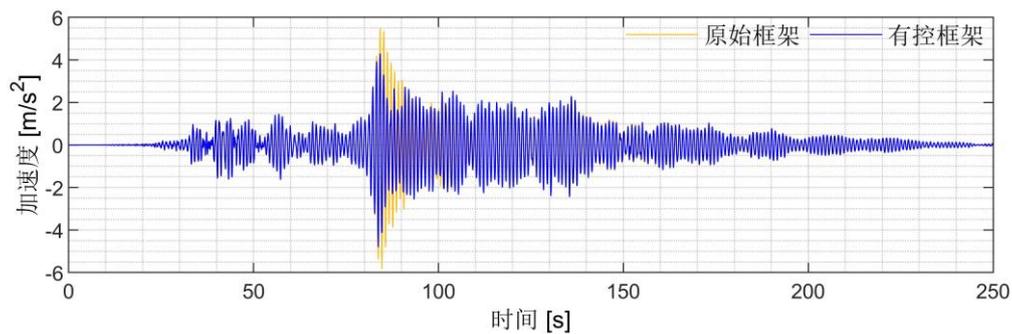


图 3.32 名义常摩擦  $f_0$  为 0.25 时框架的加速度

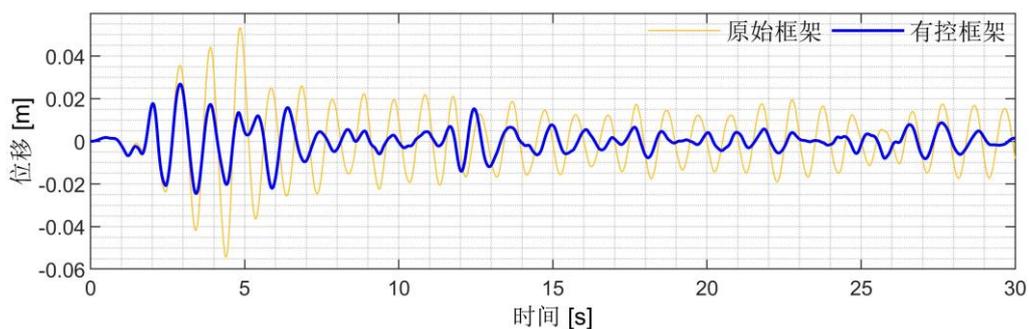


图 3.33 名义常摩擦  $f_0$  为 0 时框架的位移

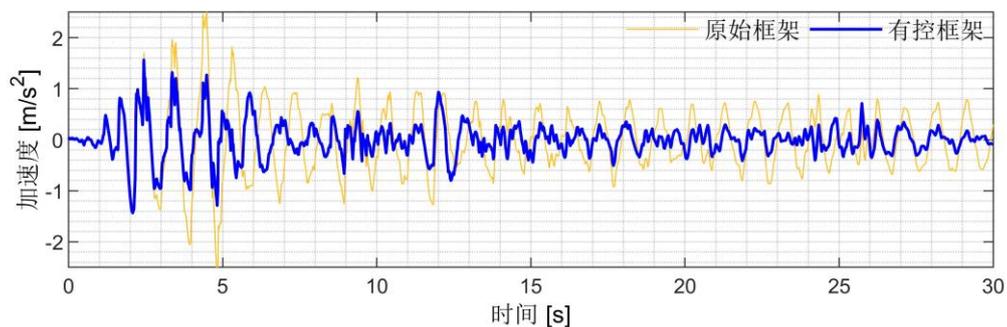


图 3.34 名义常摩擦  $f_0$  为 0 时框架的加速度

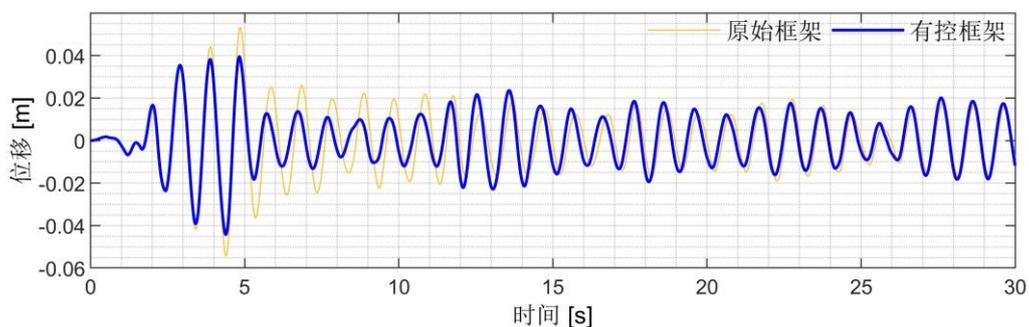


图 3.35 名义常摩擦  $f_0$  为 0.1 时框架的位移

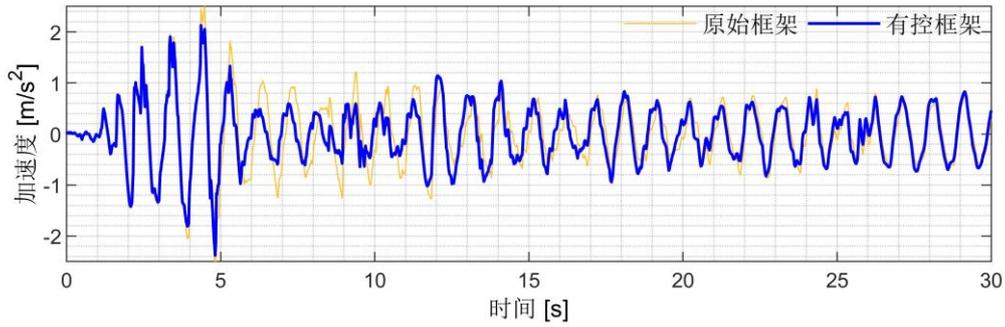


图 3.36 名义常摩擦  $f_0$  为 0.1 时框架的加速度

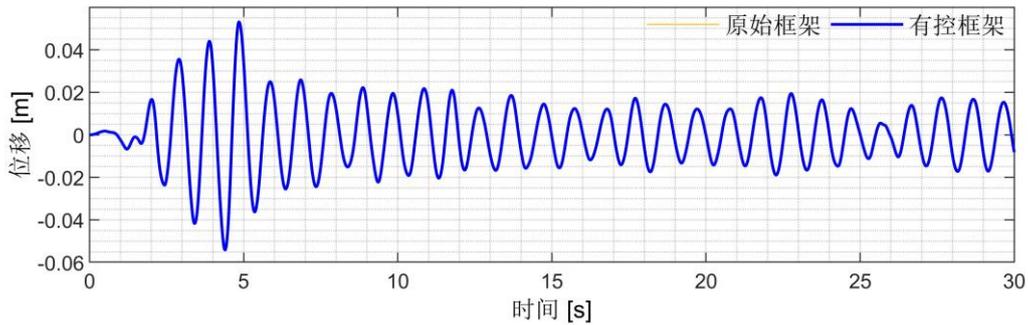


图 3.37 名义常摩擦  $f_0$  为 0.25 时框架的位移

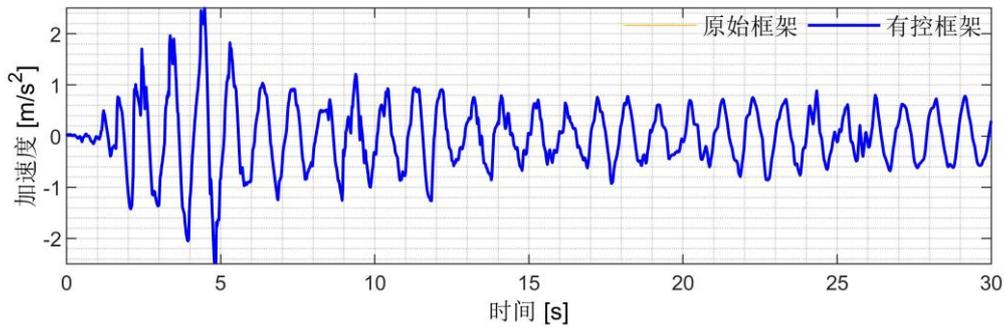


图 3.38 名义常摩擦  $f_0$  为 0.25 时框架的加速度

在日本 311 地震波记录和 El Centro 地震波记录的激励下，结构的峰值响应的减震率和均方根值的减震率分别如下表 3.2，表 3.3，表 3.4，表 3.5 所示。可以看出，由于常摩擦的存在，和惯容器中的阻尼单元的耗能效率会急剧降低，尤其是在激励较小的时候，这可以从 311 波激励下结构的位移和加速度响应较小的地方有控框架和原始框架对比几乎相同看出，因此常摩擦对于 311 波这一类频谱多靠近结构自振频率的波来说，对结构位移和加速度的峰值的减震率影响比结构位移和加速度均方根值的减震率的影响更大。对于 El Centro 波激励来说，较小的常摩擦就会产生很大的影响，其位移响应和加速度响应在名义常摩擦  $f_0$  为 0.4 时甚至与无控结构的响应几乎重合，减震率也几乎等于 0。这主要是因为 El Cenrto 波中的长周期成分多，与结构的自振频率重合较少，因此激励后结构的位

移和加速度响应相对较小，常摩擦对惯容器的影响更大。因此，当利用自平衡惯容器控制小幅振动时，应当充分考虑常摩擦的不利影响。综上所述，针对常摩擦的惯容器参数修正非常有必要。

表 3.2 日本 311 地震波记录激励下的位移减震率

地震输入	日本 311 地震波记录（位移）					
	峰值响应			响应均方根		
无控	0.1402			0.0211		
摩擦	0	0.1	0.25	0	0.1	0.25
有控	0.0538	0.0805	0.1138	0.0067	0.0136	0.200
减震率（%）	61.64	42.59	18.79	68.12	25.365	5.12

表 3.3 日本 311 地震波记录激励下的加速度减震率

地震输入	日本 311 地震波记录（加速度）					
	峰值响应			响应均方根		
无控	5.8086			0.8451		
摩擦	0	0.1	0.25	0	0.1	0.25
有控	2.3828	3.4912	4.7957	0.2821	0.5555	0.8034
减震率（%）	58.98	39.90	17.44	66.63	34.27	4.94

表 3.4 El Centro 地震波记录激励下的位移减震率

地震输入	El Centro 地震波记录（位移）					
	峰值响应			响应均方根		
无控	0.0542			0.0150		
摩擦	0	0.1	0.25	0	0.1	0.25
有控	0.0268	0.0442	0.0541	0.0068	0.130	0.0149
减震率（%）	50.51	18.43	0.14	54.79	13.24	0.26

表 3.5 El Centro 地震波记录激励下的加速度减震率

地震输入	El Centro 地震波记录波（加速度）					
	峰值响应			响应均方根		
无控	2.7902			0.6357		
摩擦	0	0.1	0.25	0	0.1	0.25
有控	1.5648	2.3789	2.7886	0.3367	0.5667	0.6352
减震率 (%)	43.92	14.74	0.06	47.03	10.86	0.08

### 3.5.5 大摩擦下系统地震波激励下的频域分析

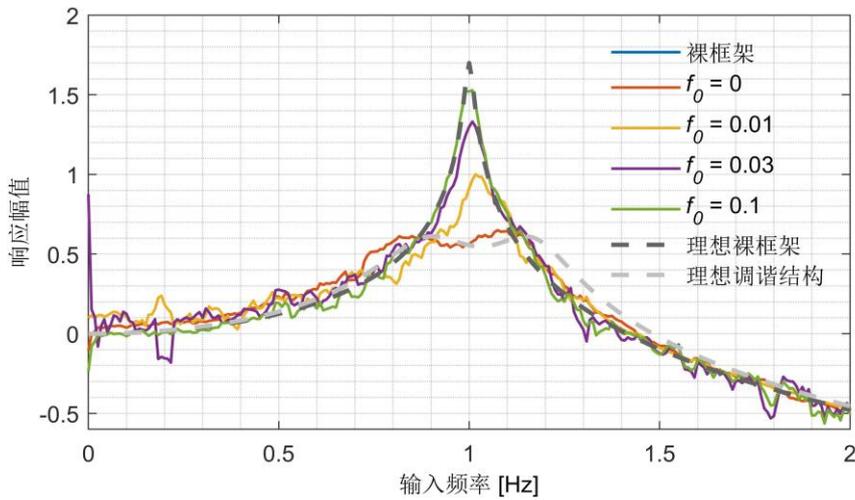


图 3.39 峰值地面加速度为 100gal

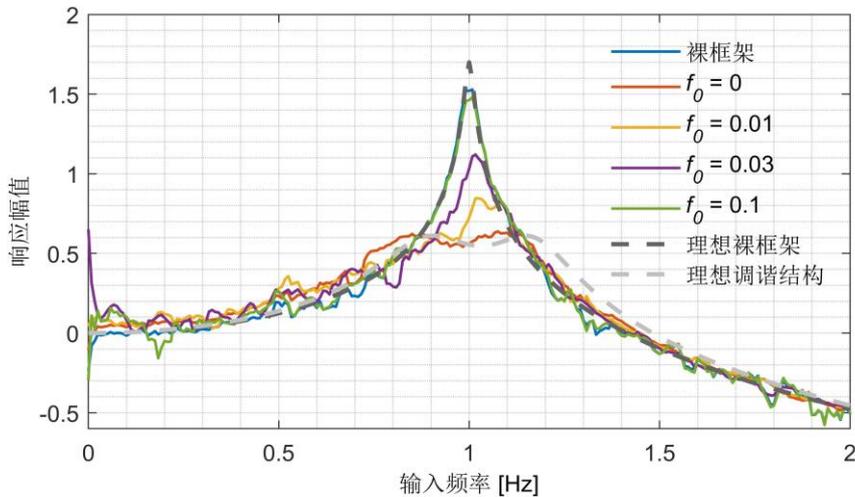


图 3.40 峰值地面加速度为 200gal

由上述时程分析可知,常摩擦会对与惯容器中的阻尼单元的耗能性能有很大的影响,但是对惯容器的调谐效果的影响未知,需要进行频域上的分析。利用图 3.23 所示的 Simulink 仿真模型可以获得结构位移的时程响应,进行傅里叶变换后可以获得结构在激励下的计算传递函数。同样地,设定质量比,刚度比和名义阻尼比为  $\mu = 0.1$ ,  $\kappa = 0.1111$ ,  $\xi = 0.0209$ , 名义常摩擦  $f_0$  为 0, 0.01, 0.03, 0.1。考虑到常摩擦的影响和激励的幅值有关,地面峰值加速度 (PGA) 为 100gal 和 200gal。由图 3.39 和图 3.40 可知,随着常摩擦的增大,结构的动力特性会越来越靠近裸框架的动力特性。可以看出,常摩擦的存在会削弱惯容器的调谐效果,因为常摩擦会阻碍惯容器和阻尼器的运动,降低了惯容器和阻尼器的工作行程。

### 3.5.6 大摩擦下惯容器设计参数的修正

针对常摩擦的惯容器设计参数的修正理论上过于复杂,本文考虑从经验上建立修正公式。在实际工程中,应当考虑常摩擦实际上就是对刚度比的削弱,因此需要增加刚度比。考虑到载摩擦对设计参数的修正在于修正实际的表观质量,载摩擦的影响和质量比的关系为相乘的关系,而常摩擦与质量比的关系为相加的关系。因此在修正刚度时本文倾向于利用加法修正质量比,用新的质量比修正刚度比和阻尼比。同时应当注意,这种修正应当考虑实际可能受到的外界激励、常摩擦的大小来进行修正。从这个角度出发,本文提出如下一个建议的修正公式:

$$\mu' = \mu + \nu \frac{2\pi f_0}{g} \quad \kappa' = \frac{\mu'}{1 - \mu'} \quad \xi' = \frac{\mu'}{2} \sqrt{\frac{3\mu'}{(1 - \mu')(2 - \mu')}} \quad (3.64)$$

对  $f_0$  前乘的系数  $2\pi$  是考虑到常摩擦的滞回曲线为方形,而阻尼的滞回曲线为一个圆,应当和圆周率相关;而重力加速度  $g$  则是为了保证修正式量纲一致。系数  $\nu$  则应根据实际工程情况取用,限于篇幅本文不讨论如何取值,而在后续的模拟中取为 1。之所以不使用“opt”作为各参数的上标是因为式(3.64)只是一个基于类比推理的公式,而不是最优参数。并且,常摩擦对惯容器参数的修正一定与激励的幅值相关,不可能对所有的地震激励和所有的工程有普适性,因此应当根据工程所在地区实际考虑以抗大幅振动还是以抗小幅振动为主进行修正或者调整。修正后的减震率见下列表。

表 3.6 修正系数后 311 地震波记录激励下的位移减震率

地震输入	日本 311 地震波记录 (位移)					
	峰值响应			响应均方根		
无控	0.1402			0.0211		
摩擦	0	0.1	0.25	0	0.1	0.25
有控	0.0538	<b>0.0564</b>	<b>0.0497</b>	0.0067	<b>0.094</b>	<b>0.0106</b>
减震率 (%)	61.64	<b>59.76</b>	<b>64.57</b>	68.12	<b>56.35</b>	<b>49.60</b>

表 3.7 修正系数后 311 地震波记录激励下的加速度减震率

地震输入	日本 311 地震波记录 (加速度)					
	峰值响应			响应均方根		
无控	5.8086			0.8451		
摩擦	0	0.1	0.25	0	0.1	0.25
有控	2.3828	2.5356	2.2969	0.2821	0.3976	0.4382
减震率 (%)	58.98	56.35	60.46	66.63	52.95	48.15

表 3.8 修正系数后 El Centro 地震波记录激励下的位移减震率

地震输入	El Centro 地震波记录 (位移)					
	峰值响应			响应均方根		
无控	0.0542			0.0150		
摩擦	0	0.1	0.25	0	0.1	0.25
有控	0.0268	0.0319	0.0332	0.0068	0.0098	0.0106
减震率 (%)	50.51	41.25	38.68	54.79	34.30	29.16

表 3.9 修正系数后 El Centro 地震波记录激励下的加速度减震率

地震输入	El Centro 地震波记录波 (加速度)					
	峰值响应			响应均方根		
无控	2.7902			0.6357		
摩擦	0	0.1	0.25	0	0.1	0.25
有控	1.5648	1.7493	1.8350	0.3367	0.4440	0.4710
减震率 (%)	43.92	37.31	34.23	47.03	30.15	25.90

可以看出,对于用式(3.64)修正后的惯容器设计参数,结构的减震效果有一个明显的提升,但是对长周期激励和小幅激励来说修正结果可能还是欠佳。修正后的设计参数相当于是提高了连接刚度,提高了结构传递给惯容器的力用于克服常摩擦。因此,当结构以抗大幅振动为重点时,宜采取上述修正,必要时宜适当提高阻尼器与主体结构连接刚度来保证阻尼器正常工作;当结构以抗小幅振动为重点时,重心应放在降低装置的摩擦上来,而非采取修正值。

### 3.6 本章小结

本章提出了一种新的利用惯容效应减震/振的装置,利用双飞轮的平衡效应使得惯容器达到自平衡。自平衡惯容器具有两端不存在扭矩的优势,使得惯容器和结构的连接更加简单方便,放松支座内力,还可以降低设备内力。然后,建立了带惯容器的单层框架的运动学方程和仿真模型,针对自平衡惯容器存在的三个非线性缺陷进行分析,三个缺陷分别是摩擦力、转动惯量的偏差和导程的偏差。最后,对该装置进行数值仿真,从频域和时域的角度解析这些因素的影响。基于上述讨论,可得出如下结论:

(1) 自平衡惯容器通过双飞轮的平衡来达到自平衡的特性。自平衡的特性对于双飞轮的转动惯量的偏差、导程的偏差有一定程度的敏感,但仍处于可控的状态。而当惯容器处于非自平衡状态时,其调谐效果和并联的阻尼器的耗能效率都会降低,导程的偏差影响更大;

(2) 针对自平衡惯容器受到的摩擦力的特性,重新划分为常摩擦和载摩擦两部分。载摩擦由接触面上的正压力以及粗糙程度决定,是一种线性摩擦;而常摩擦则与荷载无关,有很强的非线性。针对小的常摩擦,本文使用平均能量的方法将其等效线性化,探究其对惯容器的影响。结果显示,常摩擦会阻止惯容器的正常工作,并且影响程度和激励的幅值相关。激励的幅值越大,常摩擦的影响就会越小;

(3) 当常摩擦过大时,等效线性化的方法将失效。对于这种情况,本章利用 Simulink 建立了用于计算时程反应的仿真模型,并考虑了静摩擦力的影响,在时域和频域上分析常摩擦的影响。结果显示,和小的常摩擦一致,常摩擦会降低惯容器的调谐效果,其阻尼单元的耗能效率也将降低。特别是针对长周期的振动和小幅振动,常摩擦的影响极大;

(4) 由于载摩擦的线性性质,其影响可以通过修正质量比,并用新的质量比来计算新的刚度比和新的名义阻尼比来修正惯容器的参数。由于新的质量比更大,原则上当匹配合适的刚度比和名义阻尼比时减震效果更好;

(5) 常摩擦具有很强的非线性性质，其影响还与激励相关，因此针对常摩擦的普适性修正在工程上是不切实际的。但是针对常摩擦的特性，适当提高阻尼器的连接刚度可以增大连接弹簧的力用于克服摩擦力是一种折中的方案。本文则根据载摩擦的修正公式，提出了一个简单的对于常摩擦的修正公式，仿真结果显示效果较好；

(6) 根据仿真的结果可知，对强振抑制来说，应当考虑摩擦对阻尼器的不利影响，对优化参数进行一定的修正；而对于弱振，应当提高阻尼器的加工精细度，而不是修正参数。

## 第4章 自平衡惯容器实验研究

### 4.1 构件实验模型

#### 4.1.1 惯容器构件

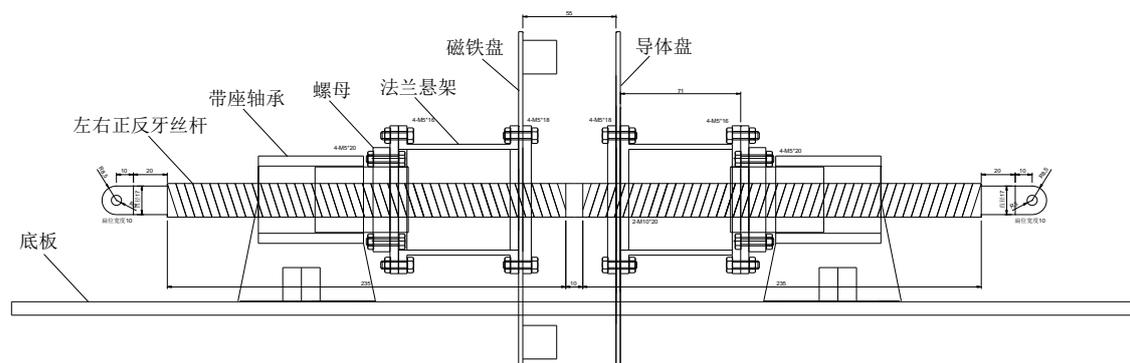


图 4.1 惯容器构件图

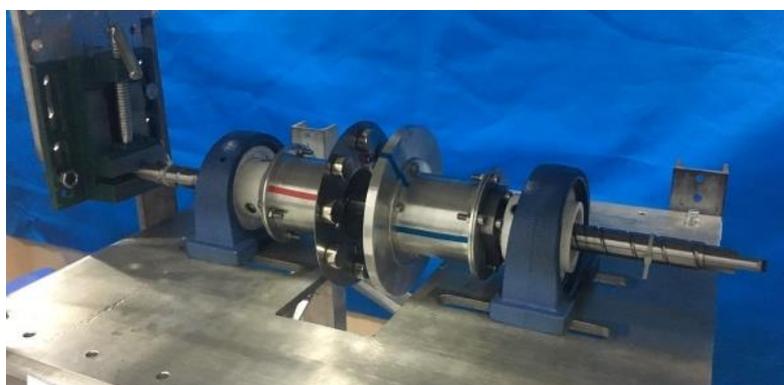


图 4.2 惯容器实物图

如图 4.1 所示，实验所用的惯容器的装置由中间的丝杠，丝杠上的螺母以及装在螺母上的法兰悬架组成。在法兰盘上安装磁铁盘和导体盘两个轮盘，磁铁盘上可安装阻尼装置，采用电涡流阻尼，磁场源选取钕铁硼圆柱形永磁体，磁极按照相邻磁体磁极相反的原则交错分布，共 12 个，如图 1.6 所示。其中，丝杠的质量  $m_0$  为 1.22kg，导程  $L_d$  为 80mm，丝杠半径  $r_s$  为 10mm，正反牙部分长度（即工作行程）各为 235mm，总长 550mm。此丝杠的最大摩擦角的正切值为  $\tan \beta = L_d / 2\pi r_s = 80 / (2\pi \times 10) = 1.2732$ 。磁铁盘（铁质）和导体盘（铝质）的直径为 180mm，厚度分别为 1mm 和 7mm。包含法兰悬架、螺母及各种装配件，旋转

惯性部分的等效质量经过计算为  $m_1 = 15.13 \text{ kg}$ ，因此整个装置的等效质量为  $16.3535 \text{ kg}$ 。磁铁部分产生的转动惯量为  $6.9857 \text{ kg}$ ，因此含电涡流阻尼时自平衡惯容器的表观质量为  $23.3392 \text{ kg}$ 。实物图如图 4.2 所示。

在测量装置的常摩擦，应采用低频激励。为了防止惯性力过大导致摩擦力测量不准，应当计算低频激励下惯性力的大小，实验结果受到惯性力的影响很小。假设激励的频率为  $0.1 \text{ Hz}$ ，激励的振幅为  $10 \text{ mm}$  与  $15 \text{ mm}$ ，可计算得惯性力大小为  $0.0645 \text{ N}$  和  $0.0968 \text{ N}$ ；激励的频率为  $0.2 \text{ Hz}$ ，激励的振幅为  $10 \text{ mm}$  与  $15 \text{ mm}$ ，可计算得惯性力大小为  $0.2582 \text{ N}$  和  $0.3873 \text{ N}$ 。由于装置和作动器的限制，作动器输出的最高频率为  $4 \text{ Hz}$ ，此时装置在  $10 \text{ mm}$  与  $15 \text{ mm}$  的振幅下的惯性力大小分别为  $103.28 \text{ N}$  和  $154.91 \text{ N}$ 。这部分计算用于与后续试验数据对比说明模型的准确性。

#### 4.1.2 构件实验设计

如图 4.3 所示，采用这套装置对自平衡惯容器进行构件实验。最左侧为反力墙，在反力墙上安装作动器，作动器可以按照输入的波形输出相应的位移响应。在自平衡惯容器前加一个滤波弹簧以滤过不良反应，同时起到一定的调谐作用。在自平衡惯容器外套一个外钢框，将惯容器的丝杠直接顶在外钢框内，一方面实现了自平衡惯容器两端连接方式的放松，另一方面则可减小摩擦力（若采用轴承连接，则装置的输出的力会不可避免得含有更大的摩擦）。整体的实物的装置图如下页图 4.4 所示。自平衡惯容器左端利用作动器驱动，作动器安装于反力墙上，同时作动器内自带有位移传感器。自平衡惯容器右端连接拉线式位移传感器，记录惯容器的实际位移。自平衡惯容器的左右两端各连接一个力传感器，型号为上海力恒生成的 LH-S09A 微型拉压力传感器，量程  $2000 \text{ N}$ ，精度  $0.05\%$ 。两个传感器测得的数据之差即为自平衡惯容器的出力。

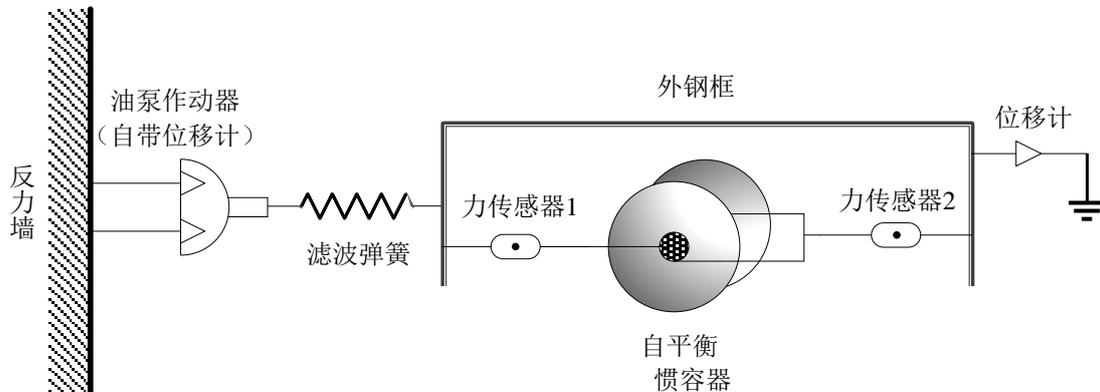


图 4.3 自平衡惯容器构件实验简图



图 4.4 实验装置实物图

结合力传感器和位移计可以获得阻尼器的滞回曲线。为了拟合滞回曲线获得阻尼器的参数，需要建立滞回曲线的理论模型。考虑到摩擦力以及从传感器中直接获得的位移和力数据，本文改写方程形成如下的滞回模型：

$$\begin{cases} u = A \cos(2\pi f \cdot t) \\ F = -c[A(2\pi f) \sin(2\pi f \cdot t)] - b[A(2\pi f)^2 \cos(2\pi f \cdot t)] + f \cdot \text{sgn}(\dot{u}) \end{cases} \quad (3.65)$$

其中， $A$  为惯容器振动的振幅， $c$  为惯容器内的粘滞阻尼参数， $b$  为惯质系数， $f$  为常摩擦的大小。 $\omega$  为外界输入的激励的圆频率。消去参数  $t$ ，可以获得滞回曲线的方程：

$$\frac{u^2}{p_1^2} + \frac{(F + p_3 u - p_4 \text{sgn}(\dot{u}))^2}{p_2^2} = 1 \quad (3.66)$$

计算参数

$$\begin{cases} p_1 = A \\ p_2 = cA\omega \\ p_3 = b\omega^2 \\ p_4 = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{p_2}{\omega p_1} \\ b = \frac{p_3}{\omega^2} \end{cases} \quad (3.67)$$

由识别出来的参数可以反推得到结构的等效质量与阻尼。

当构件中不安装阻尼装置时，式(3.65)中  $c=0$ ，其方程为：

$$F = -p_3 u + p_4 \operatorname{sgn}(\dot{u}) \quad (3.68)$$

实验共设计 5 组大工况，大工况表如下：

表 4.1 大工况表

序号	1	2	3	4	5
大工况名称	Case-D0-F0	Case-D20-F0	Case-D20-F20	Case-D20-F40	Case-D20-F60

表中大工况名称的含义见图 4.5。每个大工况下，根据作动器输出的激励的频率和位移的不同分为 11 个小工况，如表 4.2 小工况表所示。其中小工况 1、2、7 的目的在于获得自平衡惯容器的摩擦力；小工况 5、6、10、11 用于验证惯容器正常工作时的性能；其余小工况则是过渡工况，可以获得惯容器在摩擦力与惯性力相持时的表现。若数据识别情况良好则进一步分析，否则只做参考。

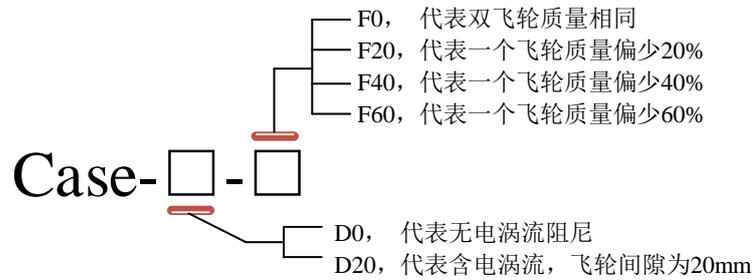


图 4.5 大工况名称含义

表 4.2 小工况表

序号	频率 (Hz)	振幅(m)	备注
1	0.1	0.01	摩擦
2	0.2	0.01	摩擦
3	1	0.01	过渡
4	2	0.01	过渡
5	3	0.01	性能测试
6	4	0.01	性能测试
7	0.2	0.015	摩擦
8	1	0.015	过渡
9	2	0.015	过渡
10	3	0.015	性能测试
11	4	0.015	性能测试

## 4.2 自平衡惯容器的摩擦力实验数据验证

### 4.2.1 自平衡惯容器摩擦力的来源

本构件实验中的惯容器采用的是梯形丝杠传动,丝杠中的摩擦力主要来源于润滑剂。润滑油的作用机理是在两个接触面之间形成一道润滑油膜,这道润滑油膜可以降低金属件摩擦带来的磨损和减小金属表面之间滑动的摩擦力,清除接触面上的磨粒,并吸收和消散摩擦生热。但是,润滑油的粘滞特性给装置带来常摩擦,并且高速运动时还会一定程度上转化为粘滞阻尼。一般地,润滑油在温度升高时其粘滞特性会降低,在运动速度增大时粘滞特性增大并且静摩擦力减小。因此,对于实际装置来说,惯容器在涂抹润滑油后其常摩擦和载摩擦在运动过程中不会保持不变。随着装置的运动,润滑油也会逐渐地流失,此时润滑油膜有可能不足以将相互接触的两个面隔开。由于接触面是不可能光滑的,接触的表面上的一些粗糙峰会穿透油膜彼此接触,产生滑动摩擦切应力,会大大增加载摩擦和常摩擦。同时,由于润滑油具有非牛顿流体的特性,在发生运动突变时其瞬时抗剪强度会有所提高,因此其静摩擦要比常摩擦略大。

当装置所处的环境相对恶劣时,建议使用固体类润滑剂,如石墨、二硫化钼( $\text{MoS}_2$ )和二硫化钨( $\text{WS}_2$ )等。这些材料具有层状复合晶格结构,在界面上抗剪能力很弱,在接触部位发生摩擦时会发热融化,具有良好的润滑作用,且粘滞阻尼效应较小<sup>[89,90]</sup>。但是固体类润滑剂不能像液体润滑剂一样带走装置摩擦产生的热量,难以更换,且摩擦系数较高<sup>[89,90]</sup>。

### 4.2.2 运动过程中的卡顿现象

在本文的第3.6.2节建立了考虑在大摩擦的情况下装置出现卡顿的仿真模型。事实上,当外界激励大于一定值(临界值)时,这种卡顿的现象是不会出现的。这样的实验现象在下面的章节会呈现,这里主要讨论这个临界值。需要注意的是,卡顿现象是指运动速度达到0的同时,相对加速度也为0,这在第3.6.2节中的仿真模型的建立中也有体现。物体在一般的简谐运动过程中也会出现速度瞬时为0的情况,这不是所谓的卡顿,因为此时的加速度不为0。

为了解出这个临界值,建立如图4.6所示的模型。一个质量为 $m$ 的放在一水平地面上,假设地面位移为 $x_g(t) = A\sin(\omega t)$ ,与此同时物块的位移为 $x_0$ ,物块与地面之间的摩擦力为 $f$ 。

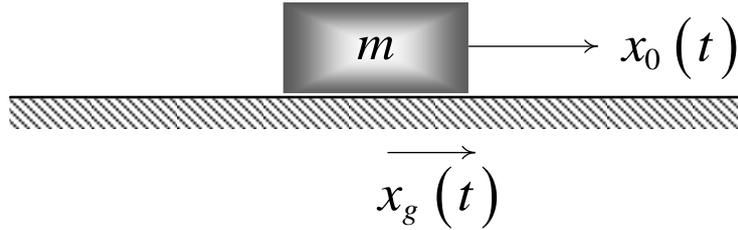


图 4.6 物块位于简谐振动地面之上

$t=0$ 时刻,地面加速度不够大,此时若摩擦力足够大,则物块将随着地面一起运动。直到某一时刻 $t_1$ ,此时地面的加速度将会超过摩擦力所能提供的加速度,因此有:

$$-A\omega^2 m \sin(\omega t_1) = -f \quad (3.69)$$

在时刻 $t_1$ 以后,物块以加速度为 $\ddot{x}_0 = -f/m$ 作减速运动。此后,物块的运动速度为:

$$\dot{x}_0(t) = A\omega \cos(\omega t_1) - \frac{f}{m}(t - t_1) \quad (3.70)$$

此后,摩擦力不应过小,否则当地面减速到0时,物块的速度不为0,物块与地面将相反运动,这样物块不能在地面的运动周期内形成一个完整的往复运动。为了避免这种情况的发生,在1/4周期时,即 $t = \pi/2\omega$ 时,式(3.70)应为0,可得:

$$A\omega \cos(\omega t_1) = \frac{f}{m} \left( \frac{\pi}{2\omega} - t_1 \right) \quad (3.71)$$

在这种情况下,联立式(3.69)和式(3.71),方程无解,即这种情况不存在。此时,当 $t = \pi/2\omega$ 时,地面已经开始反向运动,物块还未反向运动。直到某一时刻 $t_2 > \pi/2\omega$ ,物块才开始反向运动。由于物块的加速度未在第一个1/4周期内追回和地面相同的速度,那么物块也必然不可能在第二个1/4周期内追上地面的速度。因此,当物块达到和地面相同的速度时,已经到达了简谐振动的第三个1/4周期内,假设这个时间为 $t_3$ 。此时,地面减速而物块持续加速,因此必然存在一个时刻两者的速度相等。 $t_3$ 这个时刻非常特殊,可以分成三种情况讨论。

- (1) 如果 $t_3 < t_1 + \pi$ ,即摩擦力相对较大时,此时地面的加速度还相对较小,没有达到 $f/m$ ,这样就会造成有一段时间物块将于地面一起运动,此时即为卡顿的状态;

- (2) 如果  $t_3 > t_1 + \pi$ ，即摩擦力相对较小时，此时地面加速度已经大于  $f/m$ ，物块将继续相对地面向后滑动，保持一直滑动的状态；
- (3) 如果  $t_3 = t_1 + \pi$ ，此时物块将相对地面保持瞬时静止。此后，由于地面加速度大于  $f/m$ ，物块在瞬间静止之后又开始以  $f/m$  的加速度继续减速。这种情况与  $t = t_1$  时完全相同。故此时为摩擦力能够取得的最大的临界值。

根据第(3)种情形描述，由式(3.70)可得在  $t = t_3$  时刻，其速度大小与  $t_1$  时刻相同但方向相反：

$$A\omega \cos(\omega t_1) - \frac{f}{m}(t_3 - t_1) = -A\omega \cos(\omega t_1) \quad (3.72)$$

此时联立式(3.69)与式(3.72)，可解得临界摩擦力为：

$$f = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}} A m \omega^2 \approx 0.5370 A m \omega^2 \quad (3.73)$$

因此，当摩擦力大于式(3.73)时，会产生卡顿现象。此时对应于自平衡惯容器来说，会有一段时间处于完全静止的状态。若不考虑这个卡顿直接对数据进行参数识别，其表观质量会偏大。特别地，当摩擦力等于此临界值时，除了开始阶段物块会做简谐运动之外，其余时刻均为匀加速直线运动。

### 4.2.3 自平衡惯容器的常摩擦

常摩擦的测量主要是利用低频激励下，由于惯性力和阻尼力小到可以忽略不计，此时测得的力即为自平衡惯容器的常摩擦。部分试验结果见下图 4.7(a)~(d)，采取的激励均为 0.1Hz。由于装置含电涡流阻尼，因此表观质量为 23.3392 kg。

从滞回曲线可以看出，常摩擦具有一定的方波特性。当无附加阻尼时，惯容器从静止到运动需要克服一个较大的常摩擦力，然后随着运动速度的增加有一定程度的减小，这与之前润滑油带来的常摩擦随着速度的增加而减小的理论相吻合。当施加了附加阻尼（永磁体）后，由于微量的阻尼存在，常摩擦随着速度的增加而减小的特性被抵消。而对于气隙为 10mm 和 30mm 的地方，由于实验过程中存在润滑油分布不均匀、乏油的问题，导致在正位移的地方其常摩擦偏大。因为在做无附加阻尼的工况（a）和气隙 20mm 的工况（c）之前重新对装置进行了润滑处理，所以方波的特性非常明显，没有出现两端常摩擦力不相等的状况。

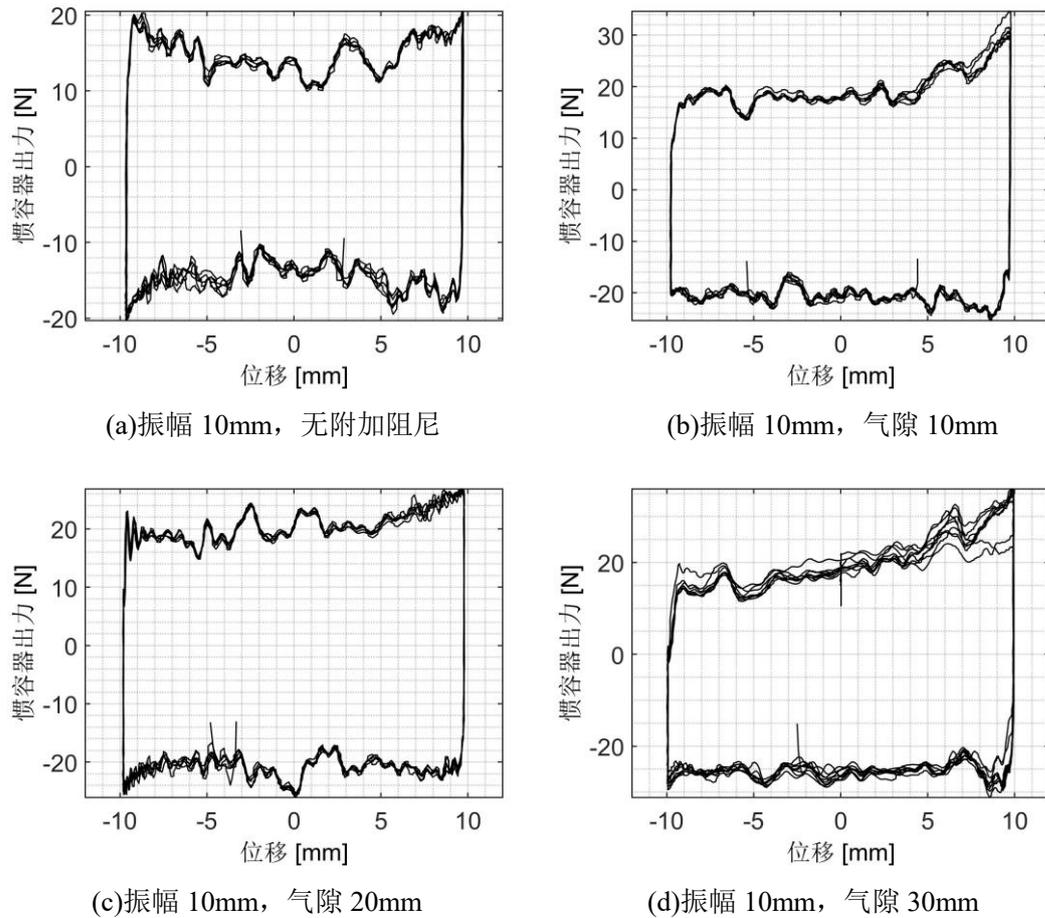


图 4.7 低频激励下惯容器的滞回曲线

常摩擦的大小和惯容器的等效表观质量有关。识别常摩擦时, 应针对式(3.65)进行修改:

$$F = f \operatorname{sgn}(\dot{u}) \quad (3.74)$$

无附加阻尼下的常摩擦的平均值为 13.9476 N (等效表观质量为 16.35 kg), 气隙为 20mm 的情况下其常摩擦的平均值为 19.7852 N (等效表观质量为 23.3392 kg)。常摩擦力与等效质量的重力比值分别为 0.0870 与 0.0865, 线性程度较高。虽然气隙为 10mm (b) 与 30mm (d) 在一侧的常摩擦由于乏油的问题而偏大, 但在另一端充分润滑之后保持在 19.7852 N 附近, 可以认为在充分润滑后, 最大常摩擦和惯容器的表观质量具有线性关系。将拟合后的滞回曲线与实验测得的滞回曲线对比, 如图 4.8 所示, 拟合结果较好。

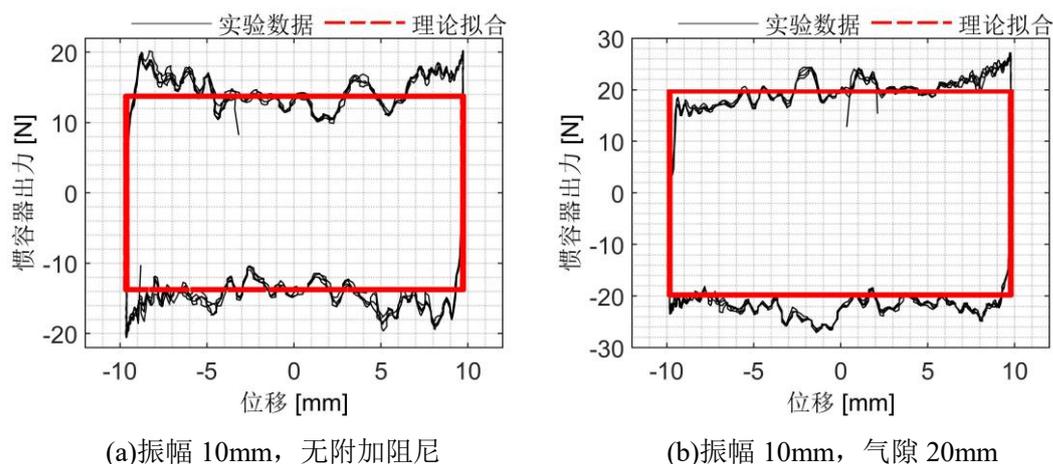


图 4.8 滞回曲线拟合

事实上, 图上显示的测得的力的数据并不是真实的常摩擦的大小, 因为常摩擦会被载摩擦系数放大。但是, 由于载摩擦系数一般都较小, 因此这个数据也可以近似地认为就是常摩擦的大小。4.2.5 节将计算载摩擦力。

#### 4.2.4 自平衡惯容器的载摩擦

因为载摩擦具有放大等效表观质量的效果, 所以载摩擦可以通过实验数据识别出来的表观质量与实际的表观质量之比来确定其大小。由于附加阻尼会影响等效表观质量的识别, 进而影响载摩擦的测量, 本节只采用无附加阻尼的工况进行识别计算。

为了保证滞回曲线不出现明显的卡顿, 即没有图 4.7 中的竖线, 需要满足式 (3.73)。将上一节计算得到的摩擦力 13.9476 N 以及理论表观质量 16.35 kg 带入计算, 可得:

$$A\omega^2 = \frac{13.9476}{0.5370 \times 16.35} = 2.28 < 0.01 \times (2\pi \times 3)^2 = 3.55 \quad (3.75)$$

理论上, 在 3Hz 以后滞回曲线将不会出现竖线, 前提是在运动过程中, 自平衡惯容器的摩擦力不应大于 31.16 N。

当惯容器不出现卡顿时, 其滞回曲线靠近中心的位置应为两条关于原点对称的直线, 两头尖中间扁平, 呈现长条棒状。理想的惯容器的滞回曲线应当为一根过圆心直线, 而常摩擦会使滞回曲线在来回的过程中分离开来形成两条关于原点对称的直线。

设定作动器的激励为 3Hz 与 4Hz, 激励的振幅为 10mm 与 15mm, 惯容器的滞回曲线如图 4.9 所示。

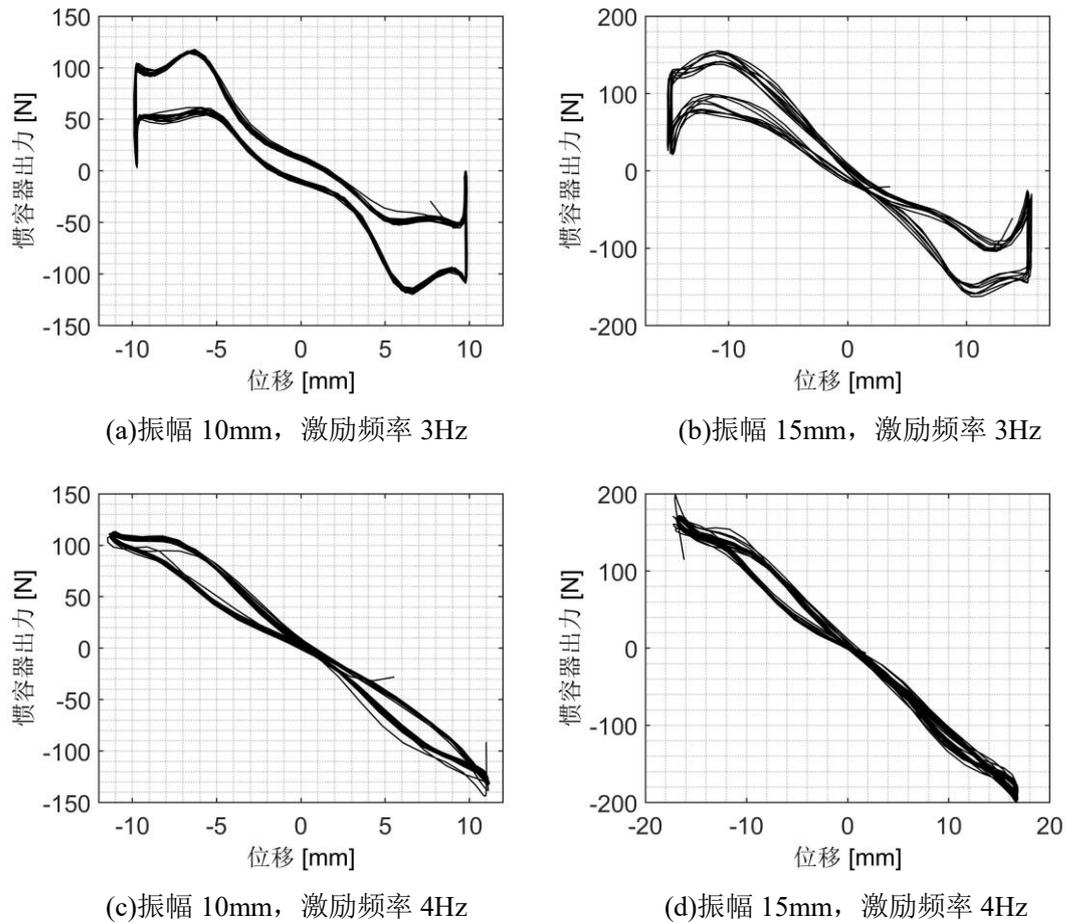


图 4.9 高频激励下惯容器的滞回曲线

尽管理论上认为当外界激励的频率不小于 3Hz 时, 惯容器不会出现卡顿的现象, 但是实验中依旧可以发现当位移达到幅值时, 力有一个突变。这是由于力和加速度关于等效质量成正比。如果没有这个卡顿, 加速度会随着位移的增大而连续增加, 方向与位移方向相反。而卡顿出现后, 速度会在一段时间内归为 0, 加速度就瞬间归为 0, 此时惯性力急剧下降, 造成了滞回曲线上的一个急剧的下降段。而当外界激励的频率为 4Hz 时, 惯容器不出现卡顿, 对此时的滞回曲线进行等效表观质量的参数识别可以取得很好的效果。接下来关注外界激励为 4Hz 的惯容器的运动状况。对采集的数据和理论公式进行直接拟合, 采用遗传算法优化。

$$\min \sqrt{\sum \|F_{th}(i) - F_{exp}(i)\|_2} \quad (3.76)$$

识别等效惯性质量时, 应采用式(3.68)。当振幅为 10mm 时, 等效表观质量的识别结果平均值为 17.3734 kg; 振幅为 15mm 时, 等效表观质量的识别结果的平均值为 17.0268 kg。由此可以计算得载摩擦系数  $\varepsilon_0$  为:

$$\varepsilon_0|_{A=10\text{mm}} = \frac{17.3734}{16.3535} = 1.0626 \quad (3.77)$$

$$\varepsilon_0|_{A=15\text{mm}} = \frac{17.0268}{16.3535} = 1.0412 \quad (3.78)$$

将式(3.77)带入式(3.17)可计算得接触面上的滑动摩擦系数为:

$$\mu_f|_{A=10\text{mm}} = 1.2732 \left( 1 - \frac{1}{1.0626} \right) = 0.0750 \quad (3.79)$$

$$\mu_f|_{A=15\text{mm}} = 1.2732 \left( 1 - \frac{1}{1.0412} \right) = 0.0504 \quad (3.80)$$

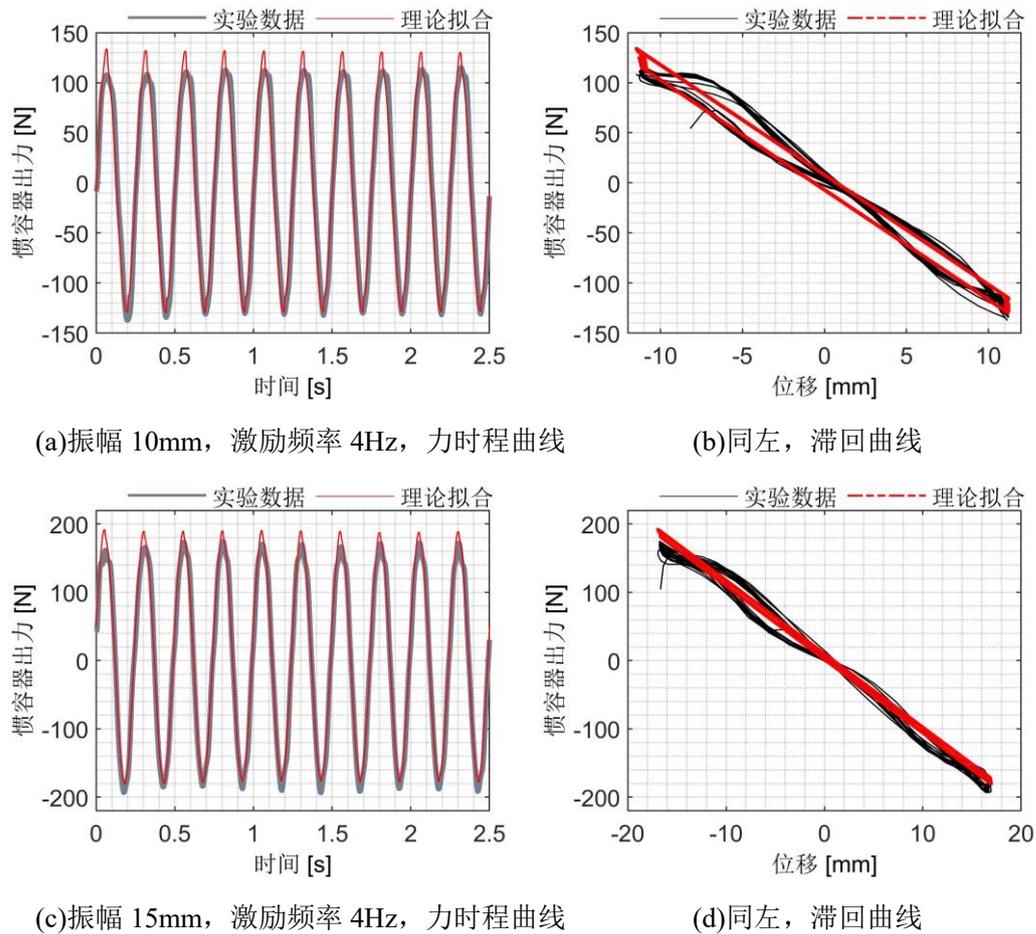


图 4.10 力的时程曲线和惯容器的滞回曲线的拟合

从图 4.10 可以看出, 随着振幅的增大, 由于惯容器的运动速度加快, 润滑油带来的滑动摩擦力也会随之减小, 同时一直滑动状态下惯容器的常摩擦也对于惯容器卡顿状态下的常摩擦相比急剧减小。利用上述识别结果, 可以作出惯容器

在外界激励 4Hz 下的滞回曲线以及出力关于时间的时程曲线，拟合结果较好。

回到外界激励为 3Hz 的情形，可以从定性的角度上看到靠近原点附近摩擦力也有减小的趋势。在 3Hz 就出现卡顿的原因，主要在于惯容器需要在卡顿和运动两种状态之间往复切换，从卡顿切换到运动状态时需要克服更大的常摩擦；同时，由于这种不均匀的剧烈的运动状态的变化很容易造成内部润滑油不均匀，从而导致乏油的情况引起摩擦力进一步增大。对于外界激励为 3Hz 的情况将在下文 4.3.1 节进行讨论展开。

### 4.3 自平衡惯容器的表观质量实验数据验证

#### 4.3.1 大摩擦下等效表观质量及载摩擦的识别

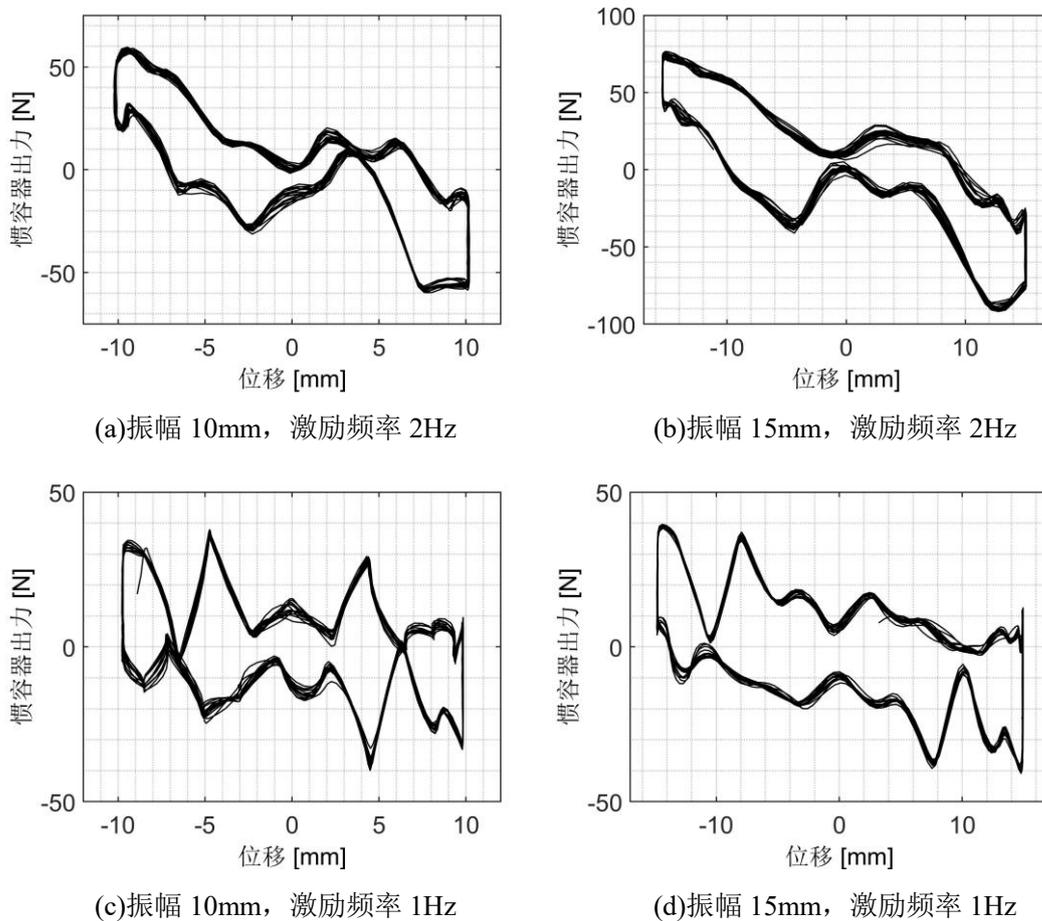


图 4.11 大摩擦下惯容器的滞回曲线

设定作动器的激励为 1Hz 与 2Hz，激励的振幅为 10mm 与 15mm，惯容器的滞回曲线如图 4.11 所示。在大摩擦下，由于惯容器会产生卡顿，在卡顿时其加

速度归零，因此不能使用式(3.68)来识别，因为这个式子只有在惯容器做比较标准的简谐振动时才会有比较好的识别效果。当考虑惯容器运动过程中的卡顿现象时，直接写出滞回曲线的方程较为困难。但是事实上，惯性力是由加速度直接产生的，这里应当使用惯容器的加速度来识别更简便且准确。惯容器的加速度由惯容器的位移求二阶导数获得。使用的拟合公式为：

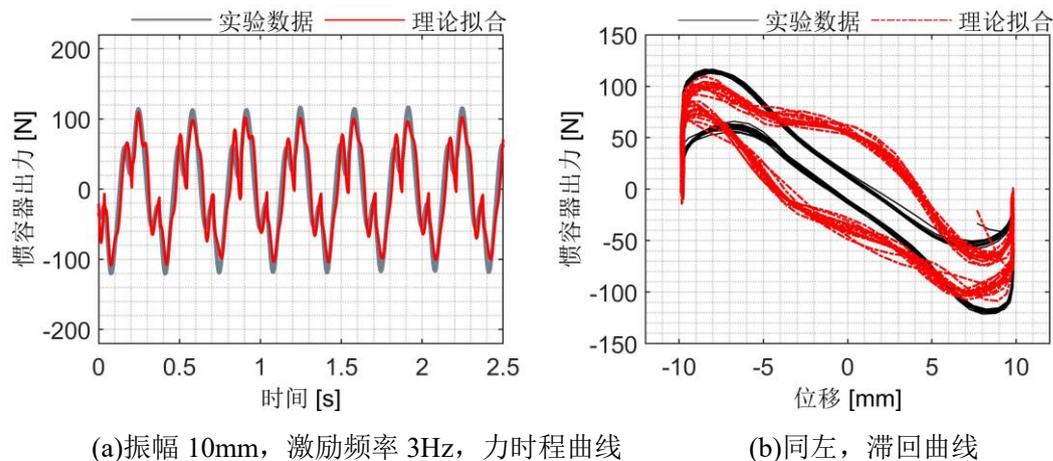
$$F = -b\ddot{u} + f \operatorname{sgn}(\dot{u}) \quad (3.81)$$

结合图 4.9(a)(b)两图，可以看出在摩擦力较大时，惯容器在运动过程中会遇到严重的卡顿现象。除去卡顿的阶段，其滞回曲线也有较强的非线性。由于每个滞回环并没有存在较强的随机性，滞回环保持相对稳定，所以认为这是惯容器内飞轮和丝杠的接触面上粗糙峰较为严重所造成的。即使对接触面进行充分地润滑，接触面上的粗糙峰依旧能够相互碰到，剪切应力较大且不稳定，因此惯容器的总出力相对来说较不稳定。

表 4.3 表观质量与常摩擦力识别结果

行程 (mm)	外界激励频率 3Hz		外界激励频率 2Hz	
	10	15	10	15
表观质量 (kg)	17.8645	19.5846	18.9463	17.8386
常摩擦 (N)	10.5284	15.2456	22.8267	27.6928

当外界激励频率继续降低至 1Hz 时，滞回曲线出现了严重的非线性，此时摩擦力占惯容器出力的主要部分，曲线更加近似于方波，因此识别等效惯性质量非常困难。因此，可以根据外界激励为 2Hz 与 3Hz 的情况，依据式(3.81)拟合出力数据，可获得各工况下的识别出的平均等效表观质量和常摩擦的大小，如表 4.3 所示。根据此表结果，部分拟合时程与滞回曲线的图像见图 4.12。



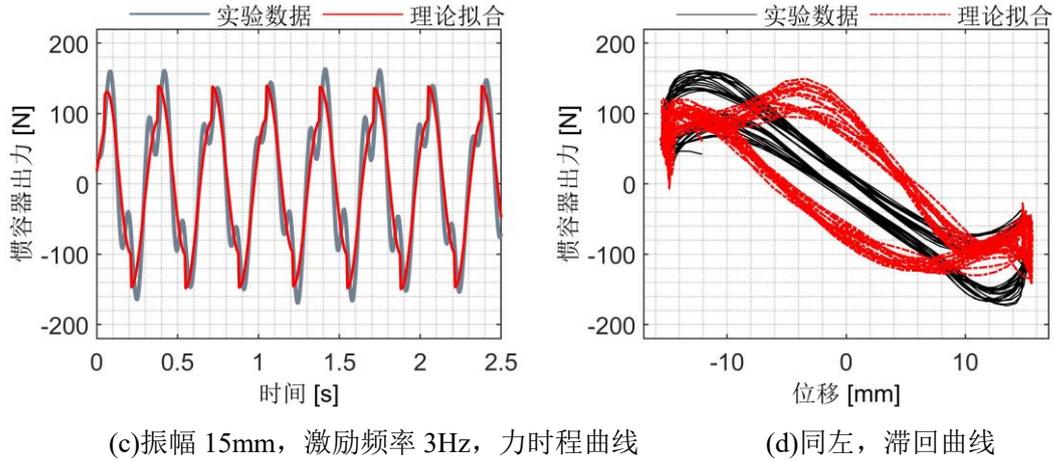


图 4.12 力的时程曲线和惯容器的滞回曲线的拟合

可以看出,模型对时程的拟合结果较好,但是滞回曲线的拟合结果相对不佳。需要针对大摩擦,尤其是随着运动状态而变化的摩擦建立更精细的摩擦力模型来描述在摩擦力影响较大时惯容器的运动规律。

### 4.3.2 摩擦力抑制非自平衡运动的作用

由 4.2.4 节的结论,在研究非自平衡性上应当采用外界激励为 4Hz 的工况以弱化常摩擦的非线性影响。在识别发生非自平衡现象时惯容器的等效表观质量时,阻尼也是用同一方法一起识别的。本小节主要针对非自平衡性讨论。

事实上,由于常摩擦的存在,当丝杠将发生非自平衡旋转时,常摩擦会减弱这种非自平衡造成的等效质量的削弱。对于一定的常摩擦  $f$ , 其可以抑制的不平衡扭矩为  $M$ , 其中  $f$  与  $M$  满足关系式:

$$f = \frac{2\pi}{L_d} M \quad (3.82)$$

假设两轮盘的转动惯量之差为  $\Delta J$ , 惯容器位移  $u = A \sin(\omega t)$ , 转盘的角位移  $\theta$  与惯容器线位移之间也有和式(3.82)的关系。扭矩差也可由下式计算:

$$\Delta J \ddot{\theta} = -\Delta J \frac{2\pi}{L_d} A \omega^2 \sin(\omega t) \leq \frac{L_d}{2\pi} f \quad (3.83)$$

由等效表观质量与转动惯量之间的关系式(2.25),等效表观质量之差  $\Delta m$  对应的转动惯量之差  $\Delta J$ , 故有:

$$\Delta m = \frac{f}{A\omega^2} \quad (3.84)$$

又因为在第 4.2.3 节中认为, 充分润滑后的惯容器的常摩擦与等效表观质量的重力值成正比, 假设这个比值为  $\mu$ , 因此有:

$$f = \mu mg = \Delta mA\omega^2 \Rightarrow \frac{\Delta m}{m} = \frac{\mu g}{A\omega^2} \quad (3.85)$$

由式(3.48)可得表观质量差之比与转动惯量差之比的关系:

$$\frac{\Delta m}{m} = 1 - \frac{2\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \frac{\Delta m}{m}}{1 + \frac{\Delta m}{m}} = \frac{1 - \frac{\mu g}{A\omega^2}}{1 + \frac{\mu g}{A\omega^2}} \quad (3.86)$$

如果带入 4.2.3 节中  $\mu$  的一个参考数据 0.0870 到式(3.86)中, 则在外界激励的频率为 4Hz、振幅为 10mm 的条件下, 这个大小的摩擦力可以抵抗 23.79%的转动惯量之差, 而振幅达到 15mm 则可以抵抗 16.51%的转动惯量之差。因此在一般情况下, 装置中存在的常摩擦足够抵抗由于制造误差而产生的非自平衡。随着振幅和激励的增大, 常摩擦对抑制非自平衡作用的效果会降低。应当注意的是, 这里的常摩擦力和前述 4.2.3 节的常摩擦力略有不同。前述的常摩擦应为惯容器在运动过程中的平均常摩擦力, 而这里的常摩擦应采用惯容器从静止到运动时需要克服的常摩擦力, 而这个摩擦力往往要比平均摩擦力大一些, 在润滑油不均匀或者接触面粗糙峰极不均匀时则会大很多。因此, 理论上常摩擦能抵抗的转动惯量之差会大于上述计算值。

当发生非自平衡现象时, 双飞轮的扭矩的不同会造成丝杠的旋转。这里额外需要注意丝杠是否会因为这个摩擦的存在而不卡顿地转动, 临界条件也是由式(3.85)决定的。令这个扭矩差下的临界摩擦力与实际摩擦力相等, 可解得在临界摩擦力下丝杠发生连续转动的条件:

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}} mA\omega^2 = \mu mg \Rightarrow \alpha = \frac{1 - \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} \frac{\mu g}{A\omega^2}}{1 + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} \frac{\mu g}{A\omega^2}} \quad (3.87)$$

带入 4.2.3 节中  $\mu$  的一个参考数据 0.0870 到式(3.87)中, 在外界激励的频率

为为 4Hz、振幅为 10mm 的条件下，这个大小的摩擦力在  $\alpha = 61.86\%$  时丝杠会不卡顿地转动，而振幅达到 15mm 则在  $\alpha = 72.85\%$  就会发生不卡顿地转动。当惯容器在运动中发生卡顿，识别等效表观质量时会有偏大的问题。实际的摩擦可能会更偏大一些，因此可以认为在约 40% 的表观质量偏差时才会发生丝杠转动卡顿的现象。

### 4.3.3 非自平衡运动状态

当丝杠能够连续转动时，常摩擦会以一定的附加表观质量的形式呈现在惯容器的整体出力中，识别出等效表观质量后应当将这部分扣除。假设测得的等效表观质量为  $\tilde{m}$ ，真实的表观质量为  $m_0$ ，由式(3.85)可知多出的等效表观质量为  $\mu mg/A\omega^2$ ，并考虑载摩擦的增益  $\varepsilon_0$ ，因此有：

$$\tilde{m} = \varepsilon_0 m_0 + \frac{\varepsilon_0 \mu m_0 g}{A\omega^2} = \varepsilon_0 m_0 + \frac{\tilde{f}}{A\omega^2} = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{\mu g}{A\omega^2} \right) m_0 = \varepsilon_0 \eta m_0 \quad (3.88)$$

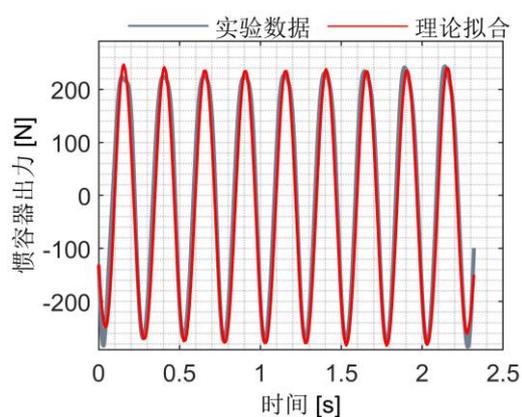
式中  $\tilde{f}$  为实验中测得的摩擦力， $\eta$  为常摩擦带给实测等效表观质量的增益。为了验证非自平衡性，设计将某一转盘的转动惯量削减至 20%，40% 和 60%，时程曲线和滞回曲线如所示，理论表观质量、实验数据识别的表观质量以及平均和最大常摩擦如下表 4.4 所示，惯容器的滞回曲线和时程曲线如图 4.13 所示，识别方法同 4.2.5 节。

当丝杠的转动被完全卡住或者完全克服常摩擦全程滑动时，应采用平均常摩擦来计算常摩擦的增益  $\eta$ ，因为这时滑动时的较小的常摩擦起作用。而当丝杠出现卡顿时，需要克服较大的常摩擦，运动状态变化剧烈。这一点可以用振幅 10mm，而转动惯量被削弱了 20% 和 40% 时的工况看出，两者的理论表观质量相差约 3kg，但是识别出的等效表观质量却相近，这正是由于 20% 时的扭矩差不足以克服常摩擦，而 40% 的转动惯量差会导致惯容器在运动中时会出现卡顿，常摩擦较大，导致识别的表观质量偏大。同样处于卡顿的运动状态的还有振幅为 15mm，转动惯量削弱程度在 20% 和 40% 的工况上，这和式(3.87)的预测相吻合。因此，当计算处于卡顿状态的惯容器的常摩擦的增益  $\eta$  时，应采用最大常摩擦。对于载摩擦增益  $\varepsilon_0$ ，考虑和 4.2.4 节的计算结果相同，振幅为 10mm 时取为 1.0612，振幅为 15mm 时取 1.0412。从识别的等效表观质量中除去这两个增益的效果，并将结果与式(3.50)的预测结果相比较，如图 4.14 所示。可以看出扣除常摩擦与载摩擦的影响后，等效表观质量与预测值相吻合，特别是振幅为 15mm 的工况。这是由于振幅 15mm 的工况惯容器的惯性力出力较大，常摩擦的不均匀性被很好的平均

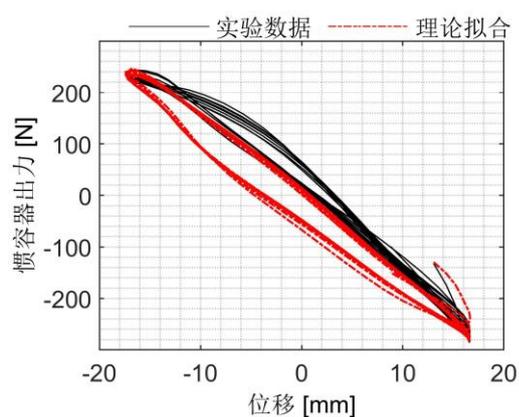
中和了。

表 4.4 识别的表现质量与常摩擦

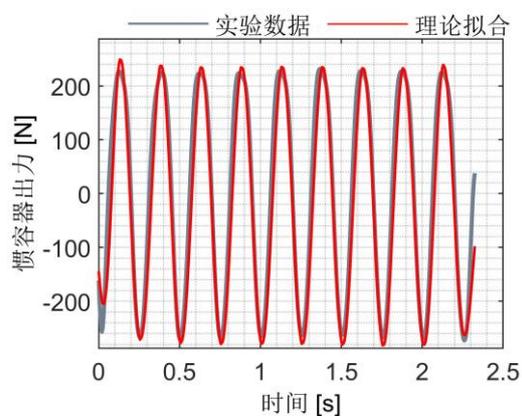
		理论表现质量 (kg)	实验识别结果 (kg)	最大常摩擦 (N)	$\left(1 + \frac{\mu g}{A\omega^2}\right)$	平均常摩擦 (N)	$\left(1 + \frac{\mu g}{A\omega^2}\right)$
振幅 10mm	无削弱	23.3392	30.8732	—	—	19.7852	1.1342
	削弱 20%	20.8810	23.2078	17.2046	1.1304	17.1013	1.1297
	削弱 40%	17.8088	23.6708	22.6773	1.2015	14.9267	1.0998
	削弱 60%	13.8589	16.1507	—	—	11.8595	1.1355
振幅 15mm	无削弱	23.3392	27.3532	—	—	24.3212	1.1100
	削弱 20%	20.8810	25.1894	21.2458	1.1074	16.1214	1.0815
	削弱 40%	17.8088	22.3117	20.1165	1.1192	14.5012	1.0859
	削弱 60%	13.8589	15.5331	—	—	11.7047	1.0891



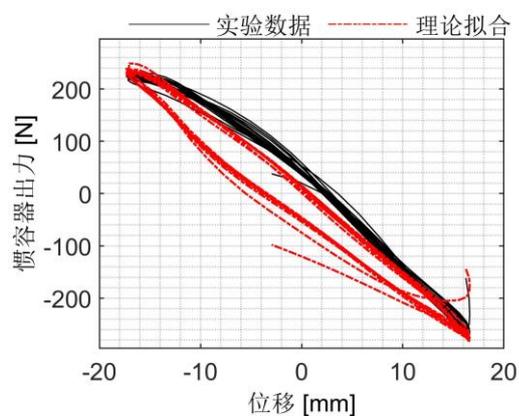
(a) 转动惯量削弱 20% 的力时程曲线



(b) 同左, 滞回曲线



(c) 转动惯量削弱 40% 的力时程曲线



(d) 同左, 滞回曲线

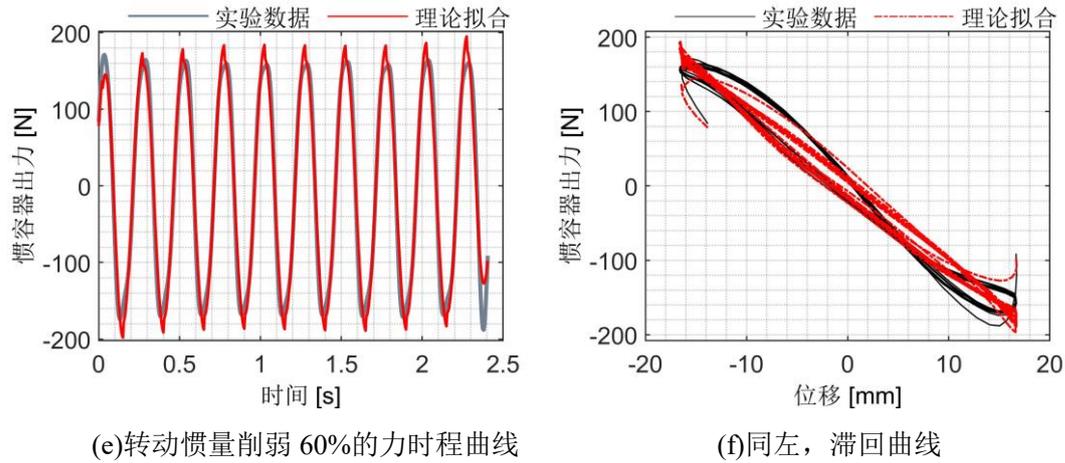


图 4.13 非自平衡状态下惯容器的时程曲线和滞回曲线

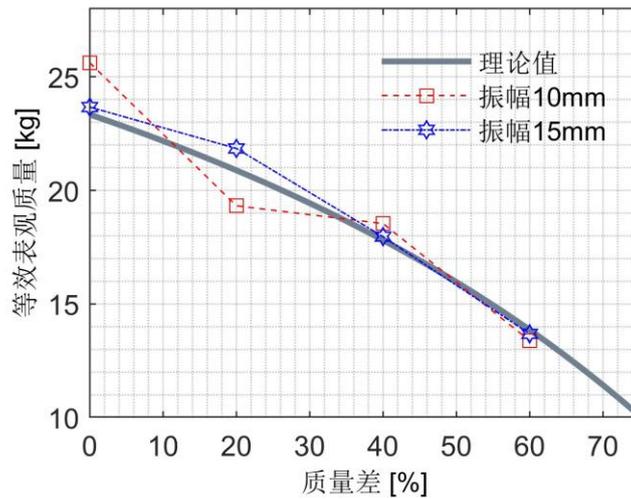


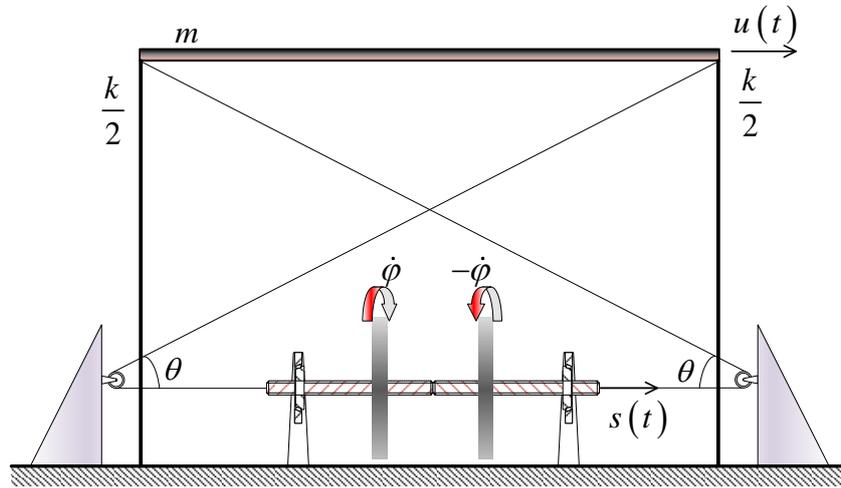
图 4.14 等效表观质量实验与理论对比图

## 4.4 自平衡惯容器振动台试验数据验证

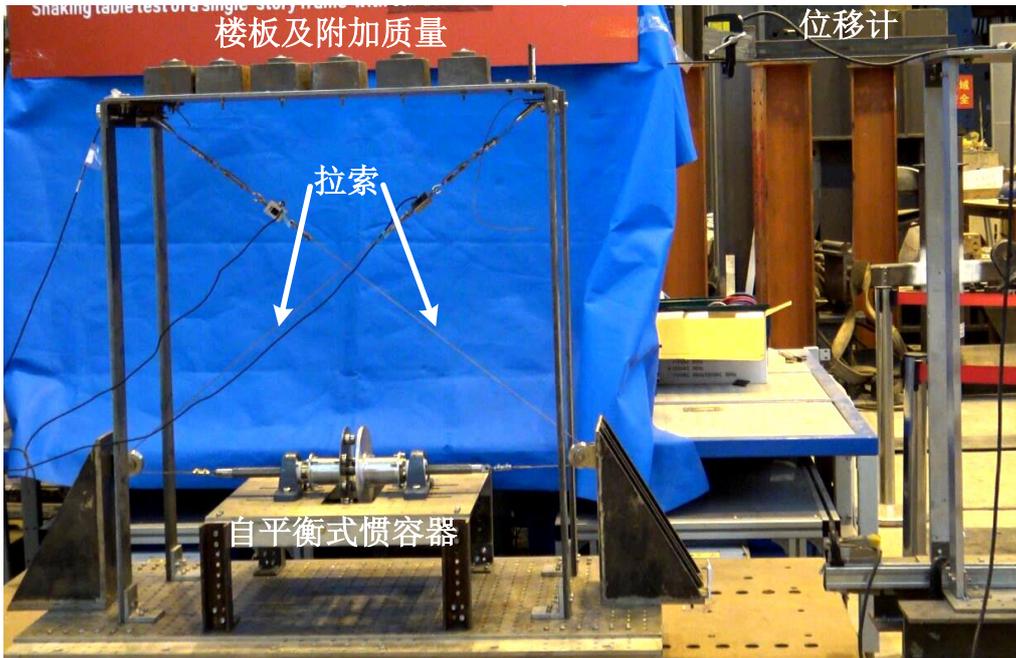
### 4.4.1 振动台试验及其简化模型

为验证自平衡惯容器减振的可行性和理论模型的准确性,设计相应的振动台试验来验证。振动台实验采用的惯容器的设计参数同 4.1 节中的惯容器。试验模型简图和实物如图 4.15 所示。其中,实物图中的自平衡惯容器与上述构件试验相同。整体框架的一阶模态质量为 26.62kg,配重总重为 30kg,总质量为 56.62kg。楼板台面和振动台台面各布置有激光位移传感器一个和加速度传感器一个,拉索上布置力传感器。加速度传感器采用 PCB333B32 型加速度传感器,量程 50g,

频率范围 0.5Hz~3000Hz。楼面安装有一角钢用于激光位移传感器获得位移；同时台面也有不止激光位移传感器，利用两个激光位移传感器测得的位移可以获得结构的相对位移响应，其型号为基恩 IL300 型激光位移传感器，量程为 160mm~450mm。力传感器型号为上海力恒生成的 LH-S09A 微型拉压力传感器，量程 500N，精度 0.05%。所有传感器的采样频率均为 1000Hz。



(a) 模型简图



(b) 实物图

图 4.15 振动台试验简化模型及实物图

实验在上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院“上海交通大学—国际计测器株式会社模拟地震与工业振动共建实验室”进行，选用 DHDAS 动态信号采集分析系统采集数据。实验激励选取的 2 条地震波日本 311 地震波记录（记录于日本

东北大学) 和 El Centro 波记录。PGA 选择 100gal, 300gal, 500gal 三种。

实验总体分为无控结构实验阶段(获取无控时结构振动的响应)和有控结构试验阶段(获取受控结构振动响应, 分析惯容器的减震控制效果)。无控结构实验阶段的工况表如所示, 有控结构试验阶段的工况表如所示。

表 4.5 无控结构试验工况表

工况编号	地震激励	PGA (gal)	工况编号	地震激励	PGA (gal)
EL-100	El Centro	100	311-100	311 地震波	100
EL-300	El Centro	300	311-300	311 地震波	300
EL-500	El Centro	500	311-500	311 地震波	500

表 4.6 有控结构试验工况表

序号	试验工况编号	地震激励	PGA (gal)	备注
2	EL100-FIE10	El Centro	100	
3	EL300-FIE10	El Centro	300	
4	EL500-FIE10	El Centro	500	
6	311-100-FIE10	311 地震波	100	
7	311-300-FIE10	311 地震波	300	
8	311-500-FIE10	311 地震波	500	

由于拉索的拉伸刚度远远大于框架柱的抗侧刚度, 可以视为无穷, 楼板的位移  $u(t)$  “完全”传递给了自平衡惯容器。由于拉索和惯容器相连时有一个角度  $\theta$ , 因此楼板的位移和惯容器的位移不相等, 在小位移条件下位移有一个传递系数  $\cos\theta$ , 索力传递到楼板也有传递系数  $\cos\theta$ 。因此, 可以写出该装置的无量纲化的运动学方程:

$$(1 + \mu \cos^2 \theta) \ddot{u} + 2\omega_f (\zeta + \xi \cos^2 \theta) \dot{u} + \omega_f^2 u = a_g(t) \quad (3.89)$$

不同于之前的分析, 本实验中的惯容器没有经过调谐, 因此只是作为一个附加质量和主结构一起分担外界激励, 也就不适用式(2.40)和式(2.43)的优化结论。此时惯容器主要起到降低结构主频的作用, 结构主频变为:

$$\tilde{\omega}_f = \frac{\omega_f}{\sqrt{1 + \mu \cos^2 \theta}} \quad (3.90)$$

若考虑拉索中是初始张力的影响, 假设惯容器和楼板的高差为  $h$ , 左右拉索

中的初始张力为 $T_0$ ，则在楼板有位移 $u(t)$ 后，楼板受到的拉索张力差为：

$$F_T = T_0 \left[ \frac{\frac{h}{\tan \theta} + u}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{h}{\tan \theta} + u\right)^2}} - \frac{\frac{h}{\tan \theta} - u}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{h}{\tan \theta} - u\right)^2}} \right] \quad (3.91)$$

定义：

$$\varphi(x) = \frac{\frac{h}{\tan \theta} + x}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{h}{\tan \theta} + x\right)^2}} \quad (3.92)$$

则拉索的张力差可以表达为 $F_T = T_0 \cdot \varphi(u) - T_0 \cdot \varphi(-u)$ 。将 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 附近泰勒展开，有：

$$\varphi(x) = \cos \theta + \frac{\sin^3 \theta}{h} u - \frac{3 \sin^4 \theta \cos \theta}{2 h^2} u^2 + O(u^3) \quad (3.93)$$

带入式(3.91)可得：

$$F_T \doteq \left[ T_0 \frac{2 \sin^3 \theta}{h} \left( 1 - \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{h} u \right) \right] \cdot u \quad (3.94)$$

在小位移下，由于框架的位移远小于高差 $h$ ，因此拉索的恢复力与框架位移成正比，具有和弹性力相类似的线性性质。在本实验中，由于夹角 $\theta$ 较小，且拉索的初始张力也不大，因此可以忽略拉索初始张力的影响。对于一般情况下，为了使拉索在惯容器运动过程中始终处于张紧状态，使用的初始张力会较大；同时，如果使用在跨层控制上，夹角 $\theta$ 也会变大，初始张力的回复作用增强。此时拉索中的初始张力的回复作用应当作为结构的部分抗侧刚度来考虑。

#### 4.4.2 空框架参数识别

主体结构的质量为56.62kg。空框架自由振动的部分时程曲线如下图4.16所示。识别方法与构件实验中相同。

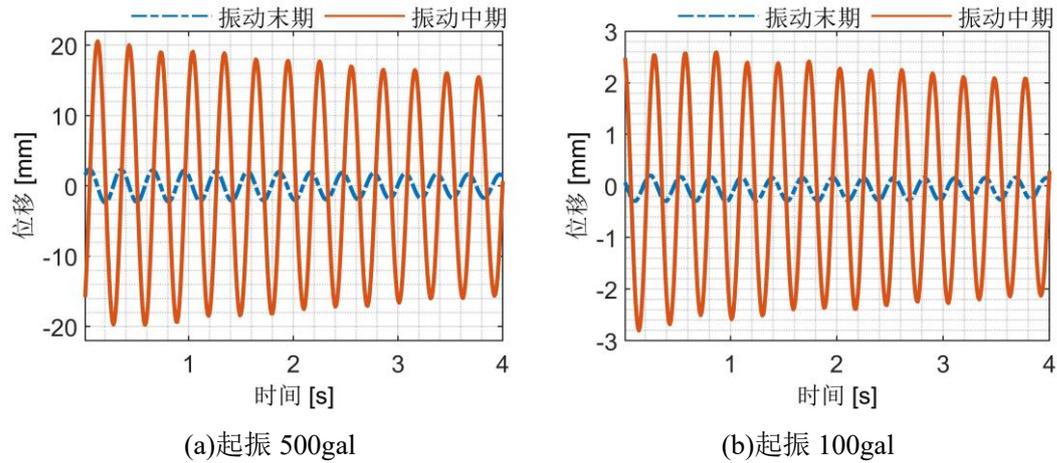


图 4.16 自由振动时程曲线

为了排除偶然因素的影响,选取不同的振幅大小与不同的振动阶段进行参数识别。识别结果如下表 4.7 所示。从表中可以看出,空框架的动力学特性会随着振幅有微弱的变化。振幅越大时,框架的抗侧刚度越弱,阻尼增加。总体上,框架的自由振动圆频率变化量在 5%以内,可以认为参数较为稳定,可以进行试验的下一步。

表 4.7 识别结果

起振幅度	组号	自由振动中期			自由振动末期		
		圆频率 (rad/s)	自振频率 (Hz)	阻尼比	圆频率 (rad/s)	自振频率 (Hz)	阻尼比
100gal	1	21.42	3.41	0.31%	21.75	3.46	0.27%
	2	20.90	3.33	0.29%	21.10	3.36	0.24%
	3	21.14	3.36	0.22%	21.20	3.37	0.22%
300gal	1	21.35	3.40	0.37%	21.62	3.44	0.27%
	2	20.64	3.28	0.38%	21.02	3.35	0.29%
	3	20.77	3.31	0.34%	21.07	3.35	0.26%
500gal	1	20.56	3.27	0.33%	20.67	3.29	0.45%
	2	20.39	3.25	0.35%	21.00	3.34	0.34%
	3	20.20	3.21	0.44%	20.86	3.32	0.37%

#### 4.4.3 振动台试验数据及参数识别

由于考虑常摩擦和载摩擦时对于实验数据的识别存在较大的困难,本小节在识别上将这两种摩擦的影响简单地归到粘滞阻尼中去进行识别。根据构件试验的

结果，惯容器的表观质量为 23.3392kg，夹角的余弦值  $\cos\theta=0.7653$ ，因此实际质量比为：

$$\mu = \frac{23.3392}{30 + 26.62} \times 0.7653^2 = 0.2414 \quad (3.95)$$

表 4.8 识别结果

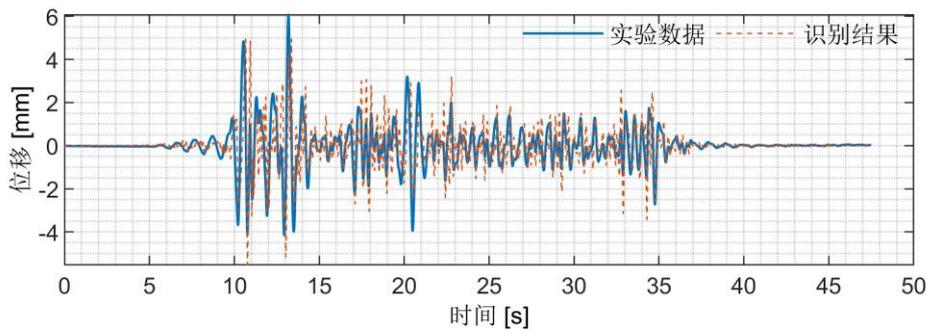
PGA	地震波	自振圆频率 (rad/s)	自振频率 (Hz)	名义阻尼比	本征阻尼比
100gal	311 地震	12.24	1.95	0.47	0.27
	El Centro	15.08	2.40	0.31	0.23
300gal	311 地震	12.21	1.94	0.42	0.24
	El Centro	15.25	2.43	0.24	0.18
500gal	311 地震	12.43	1.98	0.37	0.22
	El Centro	15.32	2.44	0.22	0.16

激励选用日本 311 地震波记录（记录于日本东北大学）和 El Centro 地震波记录，波形详见图 3.25 与图 3.26。幅值选择 100gal，300gal 和 500gal 三种地震输入。识别结果见表 4.8。表中名义阻尼比计算中采用的是相应的识别出来的自振频率，本征阻尼比计算中采用的是表 4.7 的相应起振幅度下的自振频率的均值。这里的自振频率在理论上由式(3.89)可知，应为空框架的自振频率。但是实际上的识别结果显示，自振频率被大大减小，也即自振周期被大大延迟，而事实上通过空框架的试验可知框架的抗侧刚度随振幅的变化不大。同时，名义阻尼比和本征阻尼比也相比空框架有巨幅的增加。针对这一结果，可以推测有以下结论：

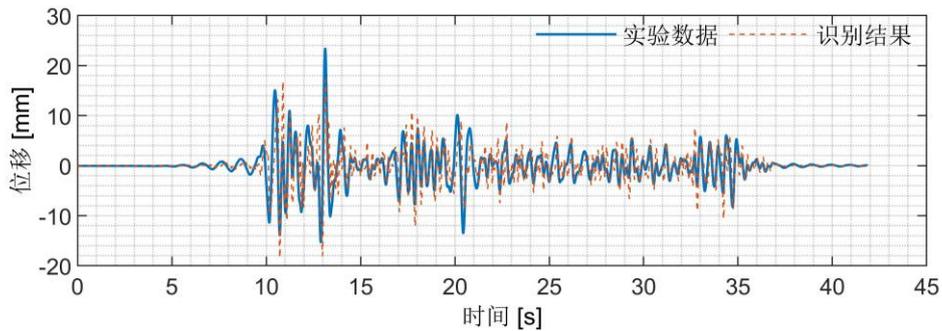
1. 在构件试验的分析中表面，无论是常摩擦还是载摩擦都会造成表观质量的增大，而在这里的识别中认为表观质量为真实的惯容器的表观质量，因此会造成名义阻尼的增大和框架的识别的自振频率的下降。但是，这一因素的影响有限，在构件试验中表观质量即使因惯容器卡顿而增大的幅度约 20%，因此是一个次要因素；
2. 框架的柱子与楼板和地面的连接采用的角钢和螺栓的连接方式。因此框架整体的总抗侧刚度取决于角钢的抗弯刚度和柱子抗侧刚度，两者为串联的关系。角钢连接的方式在初期具有较大的抗弯刚度，但随着位移幅值的增大，抗弯刚度会降低，这在自由振动试验中也有体现；
3. 惯容器的位移在框架产生较大的位移时，会由于拉索的二阶伸长的影响，惯容器的位移会有一定的延迟，这引起识别的自振频率的变化。这个因素影响相对也较小；

4. 识别的自振频率与激励有关，推测与地震波中的频谱相关；
5. 由于摩擦，惯容器在运动过程中可能会产生卡顿，以及拉索在牵引惯容器时也存在一定的相位延迟，这造成惯容器在运动上可能存在相位延迟。由于惯容器中惯性力占主要成分，惯性力因相位的延迟被匀到阻尼力上，同时抵消了部分的框架横向位移的回复力，从而造成识别时阻尼比增大而刚度减小。当激励幅值增加时，这种影响会适当减轻。

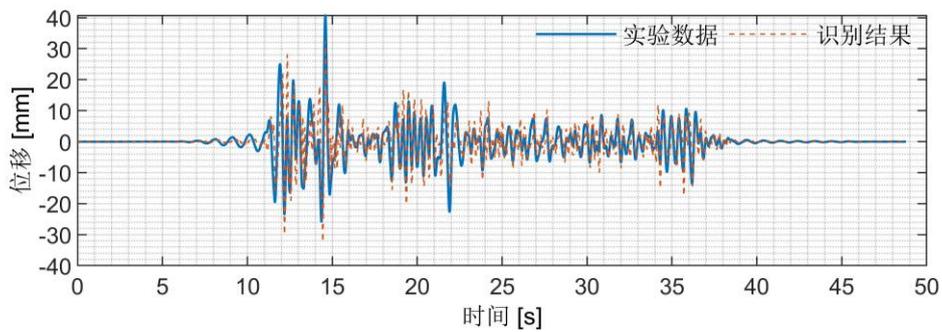
从定性上看，惯容器还是可以起到调节结构主频的作用，并通过阻尼消耗输入的能量，减小结构的位移响应。识别结果与实验数据对比如图 4.17 所示。



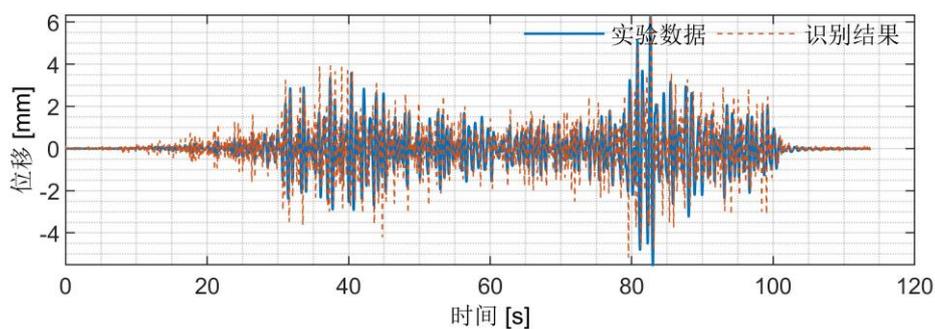
(a) El Centro 地震波记录激励，地面峰值加速度 100gal



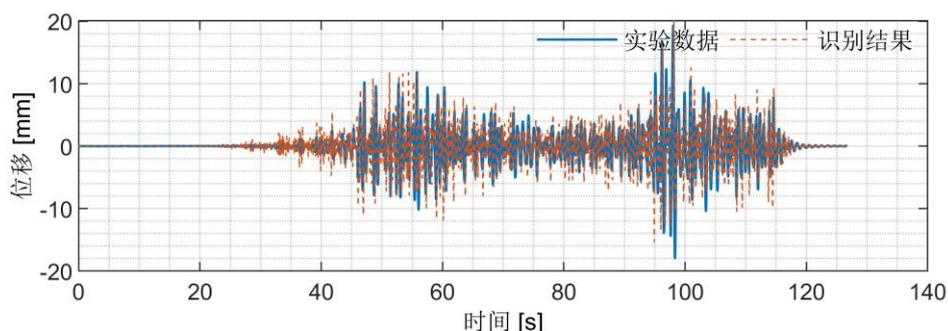
(b) El Centro 地震波记录激励，地面峰值加速度 300gal



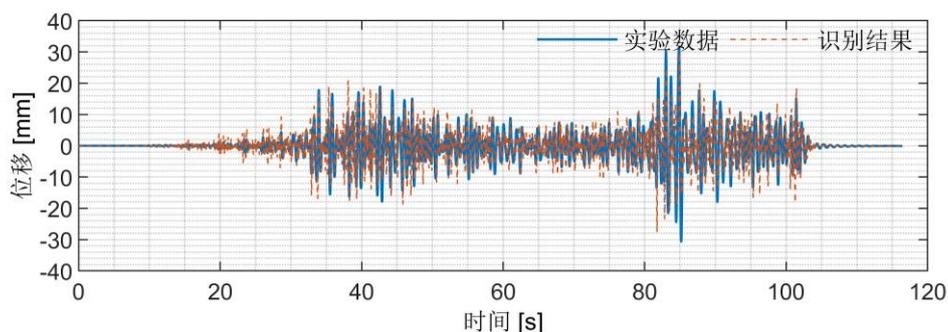
(c) El Centro 地震波记录激励，地面峰值加速度 500gal



(d) 日本 311 地震波记录激励, 地面峰值加速度 100gal



(e) 日本 311 地震波记录激励, 地面峰值加速度 300gal



(f) 日本 311 地震波记录激励, 地面峰值加速度 500gal

图 4.17 结构参数识别结果

#### 4.4.4 惯容器的减震率及其可行性

在不同地面峰值加速度的日本 311 地震波记录（记录于日本东北大学）和 El Centro 地震波记录的激励下，表 4.9 罗列出了惯容器的减震率。这里由于记录上的失误，100gal 的地面峰值加速度的日本 311 地震波记录激励下空框架的数据缺失，不计算分析该工况下的。

由于本实验的模型与 3.6 节大摩擦分析中使用的模型不相同，因此不具备比较的意义。根据前述定义，参考构件实验中测量的常摩擦大小，本实验的名义常摩擦  $f_0 = 19.7852/56.62 = 0.35$ ，属于非线性很强的阶段，因此常摩擦带来的影

响较大。同时，本实验模型认为拉索的刚度近似于无穷，忽略其伸长的变形，因此框架的位移基本会完全传递给惯容器。

表 4.9 减震率结果

地震激励		位移峰值(mm)		位移均方根		加速度峰值 (m/s <sup>2</sup> )		加速度均方根	
		受控/ 无控	减震率	受控/ 无控	减震率	受控/ 无控	减震率	受控/ 无控	减震率
El	100gal	6.07/ 7.70	21.18%	0.92/ 1.65	44.11%	1.40/ 2.13	34.19%	0.18/ 0.67	72.99%
	300gal	23.38/ 25.59	8.61%	3.30/ 6.52	49.43%	4.41/ 8.84	50.05%	0.65/ 2.69	75.67%
	500gal	40.73/ 46.00	11.45%	5.27/ 11.68	54.89%	8.30/ 13.97	40.59%	1.06/ 4.60	76.88%
311	300gal	19.04/ 25.45	25.20%	2.93/ 5.42	46.04%	2.14/ 6.00	64.31%	0.37/ 1.95	81.19%
	500gal	31.45/ 43.39	27.53%	5.18/ 8.33	37.83%	4.20/ 9.94	57.78%	0.70/ 2.86	75.45%

实验中的位移峰值减震率情况较为不佳，通常结构在起振时位移较大，而惯容器不能有效地抑制结构的起振；同时，从静止进入运动状态时惯容器需要克服更大的常摩擦，因此惯容器也不是即时启动的。因此，在振动初期位移的减震效果不佳，这导致峰值减震效果不佳。但是位移的均方根值、加速度的峰值与均方根值都有较大的减震率，特别是加速度的均方根减震率。这说明从外界输入结构的能量很大程度地被惯容器吸收和耗散，这其中惯容器的名义阻尼（包括电涡流阻尼、润滑油的粘滞阻尼、常摩擦和载摩擦）起到了很大的作用。故，利用惯容器进行减振控制是可行、有效的。

## 4.5 本章小结

本章通过构件实验和振动台试验的数据，验证了惯容器的减振效果和理论模型的准确性。通过分析实验数据，可以得出以下结论：

- (1) 建立了构件实验的分析模型。惯容器存在常摩擦，因此当运动的幅值和频率不达到一定的程度时，惯容器会产生卡顿；
- (2) 在低频激励下，观察到惯容器的滞回曲线。惯容器在启动时会受到比

运动过程中更大的常摩擦，这会加大卡顿对于惯容器及其减震效果的影响。同时分析多组数据，认为惯容器的常摩擦在充分润滑的情况下与惯容器的表观质量成正比；

(3) 在高频激励下，观察到惯容器的滞回曲线。在 3Hz 的激励下仍会出现卡顿，而 4Hz 激励下卡顿基本消失。这是由于理论分析采用的是运动状态下的常摩擦，而启动阶段的常摩擦往往相比滑动状态下的常摩擦大得多，因此惯容器需要更强的激励才不会出现卡顿；

(4) 由高频激励下的滞回曲线可以计算出惯容器的名义表观质量，与实际等效表观质量比对可以获得惯容器的载摩擦系数。载摩擦系数的稳定性相对常摩擦较差。一方面是由于载摩擦一般较小，分析时会产生较大的误差；另一方面则是由于惯容器在运动中润滑油的分布情况时好时坏。在均匀运动时润滑油分布较好，表现出的载摩擦较小；而在出现卡顿时，润滑油分布的平衡很容易被打破，造成载摩擦和常摩擦都偏大；

(5) 非自平衡状态下，在扣除常摩擦和载摩擦影响的部分后，等效表观质量与理论公式符合良好，说明本文建立的摩擦力模型在整体上较符合实际情况。但是在拟合滞回曲线时，还存在较大的偏差，因此需要建立更加精细的摩擦力模型来描述运动过程中惯容器的摩擦力变化；

(6) 建立了振动台试验的分析模型，分析数据发现识别出的刚度相较空框架的刚度削弱明显，分析存在的因素为摩擦、角钢变形、拉索的二阶效应和惯性力的相位延迟，这些因素导致识别出的阻尼偏大，刚度在名义上被削弱；

(7) 分析惯容器的减震率，由于摩擦的影响，惯容器在峰值响应控制上可能偏弱，但是总体上能够起到控制结构振动，耗散不利的振动能量的作用，惯容器减振可行、有效。

## 第 5 章 结论与展望

### 5.1 结论

本文针对传统丝杠类惯容器的局限性,提出了自平衡惯容器。自平衡惯容器采用正反牙丝杠,使得丝杠上的双飞轮以相反的方向旋转,抵消丝杠端部的不平衡扭矩,实现了自平衡。自平衡惯容器的连接方式简单,在实现相同的等效表观质量的同时设备内力减半,还可以通过飞轮相对速度获得双倍的阻尼效果。本文首先建立了理论模型,包括新的摩擦力模型;进行数值模拟以研究摩擦力对惯容系统的减振效果的影响;最后设计实验验证理论模型的准确性。

本文的主要工作及结论如下:

(1) 简要介绍了被动减振系列装置,从阻尼的放大机制和附加质量的调谐作用两方面引出惯容器的概念。指出传统丝杠类惯容器存在不能自平衡的局限性,并针对这一点通过采用正反牙丝杠的方式实现自平衡,解决了传统丝杠类惯容器连接构造复杂、对垂直丝杠方向的位移敏感的问题,同时降低设备内力。参考 TMD 的定点理论,解析惯容系统设计参数的最优参数。

(2) 自平衡性会被转动惯量的误差、丝杠的误差破坏,因此对自平衡惯容器进行了敏感性分析。首先获得非自平衡状态下惯容器的表观质量的理论公式。考虑转动惯量和丝杠在相对误差 40%以内时,单个惯容器构件的运动规律,结果表明这些误差会导致丝杠不同程度的旋转,偏差越大丝杠的旋转速度和位移越大。通过定义惯容系统的耗能效率来评价非自平衡性对耗能效果的影响,结果表明非自平衡状态下结构位移响应增大,同时惯容器响应也越大,但是两者的比值减小。说明惯容器的耗能效率降低。这说明,耗能效率不应当认为惯容器工作地越“勤奋”越好;只有惯容器位移较大但结构位移降低才能说明惯容系统工作地有效率。

(3) 根据轴承设计规范,建立了新的摩擦力模型。将自平衡惯容器受到的摩擦力分为不随外荷载变化的部分和随外荷载变化的部分,即常摩擦和载摩擦。建立了考虑常摩擦和载摩擦的带惯容系统的单自由度系统的运动学方程。载摩擦不具有非线性特征。载摩擦会增大惯容系统的等效表观质量和阻尼,因此相对来说刚度比也应适当提高以适应这种变化。若不调整刚度比,会导致惯容系统的调谐作用和耗能效率降低。因此,对载摩擦可以采取修正由定点理论获得的优化。采用修正后的优化参数,惯容系统恢复最优的调谐作用和耗能效率。常摩擦会给结构带来非线性。对于较小的常摩擦,采用等效线性化的处理方法获得结构的位

移响应函数，同时限定了等效线性化的适用范围。仿真结果表明，常摩擦会影响惯容系统的调谐作用和阻尼耗效率。常摩擦在激励较小时（50gal 简谐激励）耗能占比可达 15%，随着激励幅值的增大占比会减小。但是应当注意，较大的摩擦会阻碍惯容系统的正常运动，导致减振效果不佳。常摩擦非但没有起到一定的摩擦耗能的作用，反而阻碍了设备的正常工作。

(4) 对于较大的常摩擦，需要通过在 Simulink 中建立仿真模型来研究其影响。由于摩擦较大，因此需要考虑惯容器的卡顿现象。当惯容器发生卡顿时，惯容器的速度和加速度同时减为零。模拟结果表明，当名义常摩擦达到  $f_0 = 0.3 \sim 0.5$  左右时惯容器会发生卡顿，非线性极强。此时常摩擦严重阻碍了惯容系统的正常工作，减振效果急剧下降。针对常摩擦的参数修正没有一般公式，但本文依据载摩擦的修正方法提出了一种修正参数的方式。利用修正后的设计参数模拟结果表明，能引起相应单自由度体系更大的相应的激励，修正公式能将减震率提升至理想惯容系统的减震率。这表明，当惯容系统用于抑制地震激励时，宜采用修正参数；而用于抑制风致振动时，应当尽可能减小摩擦而不是修正参数。

(5) 综合常摩擦和载摩擦的修正来看，摩擦力带来的本质影响在于削弱了连接刚度传导给惯容系统的位移和力，因此提高连接刚度是克服摩擦影响的总体思路。换言之，质量比是减振最终效果的目标，阻尼是实现减振目标的手段，而刚度比则是实现减振效果的工程保障。

(6) 设计了惯容系统的构件实验。建立了构件的滞回曲线的理论模型。推导了导致惯容器产生卡顿的临界摩擦力。低频激励下的实验数据表明，惯容器从静止状态到运动状态时需要克服的常摩擦更大。连续运动状态下的常摩擦大小与惯容器的等效表观质量相关，近似为成正比关系。惯容器在外界频率和振幅足够大时（4Hz 激励）才能够完全克服摩擦力连续运动，此时惯容器受到的常摩擦较小；而激励不足时，滞回曲线在两端出现下垂，这正说明惯容器发生了卡顿的现象，发生卡顿现象的与预测基本相符，偏差在于静止时刻的常摩擦要大于运动时刻的常摩擦。由于常摩擦和载摩擦的出现，识别的等效表观质量结果偏大。研究了摩擦力是如何影响表观质量之后，将这两部分多余的表观质量扣除后，识别结果与预测公式相吻合，这验证了等效表观质量计算公式的准确性，也验证了摩擦力模型的合理性。

(7) 设计了振动台实验。从实验数据的识别结果上来看，识别框架的抗侧刚度与空框架相比大大削弱。经分析，这种情况是由于常摩擦和载摩擦的削弱作用、连接角钢的变形、拉索的二阶变形、激励的种类、卡顿造成惯容器相位延迟等因素综合导致的。这进一步说明，在实际工程中提高连接刚度是保证惯容系统正常耗能的重要措施。然后计算了惯容系统的减震率。结果表明由于摩擦以及惯

容系统本身抑制初期位移的能力较弱的局限性，位移的峰值减震率较低，约10%~20%；但是位移的均方根减震率依旧较高，达到了50%。同时加速度峰值和均方根也有大幅度的降低，这说明惯容系统仍然起到了很好的吸振减振，验证了自平衡惯容系统的可行性和有效性。

## 5.2 展望

本文针对自平衡惯容器的特点，以摩擦力为核心开展了广泛的研究。在研究过程中，暴露出了一些人就需要进一步研究的问题和拓展性的问题，现陈述如下：

(1) 本文制作的自平衡惯容器采用润滑油进行润滑处理。由于润滑油是导致摩擦力计算的主要原因，因此需要进一步研究其润滑机理，以获得更精确，更具有指导意义的摩擦力计算公式。同时，实验过程中频频出现润滑油的漏油、乏油现象，实验装置有待进一步改善。在查阅润滑油的相关文献资料时，注意到了固体类润滑剂和润滑脂的存在，有必要采用不同的润滑方式进行处理并研究其影响。本文的摩擦力模型还较为浅显，因此有待建立更精细的摩擦力模型以模拟惯容器在运动过程中的真实摩擦力。

(2) 本文中的构件实验和振动台实验中使用的模型还相对较小，因此摩擦力的影响巨大，以至于产生很多处理起来非常困难的数据。实验中也发现当激励的振幅越大，这些非线性因素的影响的统计意义会更明显。因此，制作更大的模型进行实验非常有必要。

(3) 实际工程中，若采用拉索进行连接，拉索中的预拉力会对结构产生很大的影响，但本文没有考虑这一影响。应当注意到拉索伸长的二阶项的影响，特别是当拉索用于跨层连接控制更应考虑这一影响。

(4) 本文对于电涡流阻尼粗浅地处理为粘滞阻尼。事实上，电涡流阻尼在稳态下才会表现出良好的线性特征，而对于地震这种非稳态激励可能不太稳定，这从振动台试验数据的识别出来的阻尼中可以发现。今后的研究应当注意两个方面。一方面是应当建立瞬态响应下电涡流阻尼的理论模型和计算公式，另一方面是如何将电涡流阻尼稳定控制在一定的范围内。

(5) 本文仅针对一个单自由度体系进行了研究，后续还应考虑在多自由度体系中的应用，在跨层控制上的应用以及弯曲型结构中的应用。考虑到惯容器和电学中的电容器具有等价关系，可以类推弯曲形结构与电学中的传输线模型等价，因此是否存在连续分布惯容器。

(6) 考虑惯容器在跨抗震缝上的应用，是否可以减小抗震缝的宽度。以此作为启发，随着社会的发展，城市中的高层建筑往往密集分布，彼此相邻。是否

可以利用惯容器将这些高层建筑连为整体以提高建筑群整体的抗震性能。另一方面，单个 TMD 所能控制的频率范围较小，因此利用多个 TMD 进行结构控制已见有许多报道，以此类推，布置多个惯容系统以实现宽频控制值得研究。

## 致谢

白驹过隙，时光荏苒，接近三年的硕士研究生阶段即将在本文完成后画上一个可能并不完美的句号。在这段旅程中经历过风风雨雨，但一路上有良师益友的支持鼓励才让我能够站在这里。感恩在同济的三年时光，给予我这样一个既有优良治学条件，又能充分锻炼综合能力、完善自我人格的地方。

不巧的是，恰逢疫情，研究室乃至整个校园和平日相比缺少了一份热闹。在这样的环境下迎来我的毕业还是会让我略感些许失落。不过转念一想，毕业对于我来说也许并不需要轰轰烈烈地，能让我静下心来面对这个转折点，冷静地迈入社会，这或许未尝不是一件好事。

离别之际，特别感谢我尊敬的导师薛松涛老师。薛老师无论是学贯中西的非凡国际视野、严谨求实的治学精神，还是豪放洒脱又高风亮节的人格魅力，亦或是对学生的慈爱有加、视若己出，都给我留下了永远难忘的印象，能有幸成为薛老师的弟子是我研究生三年最大的荣幸；同时也非常感谢我的副导师谢丽宇老师，谢老师平易近人、学识渊博、儒雅随和、思路敏捷，对我的学术研究乃至生活都给予过许多帮助，在我的论文的选题、方向到最后的修改都给予了我慷慨的支持和鼓励；同时并感谢同研究室的唐和生老师，唐老师在学术研究上认真严谨、雷厉风行，亦对我的课题研究有颇多指导和帮助。

感谢博士李大伟师兄、杨朋超师兄和宋琛琛师兄，感谢你们在我研究迷茫之际给我灵感和帮助，让我在科研的道路上少走了很多的弯路。感谢张昕宇师兄、凌塑奇师兄、陈杉杉师兄和郑学胜师兄，与你们在同一个教研室奋斗我感到非常荣幸和开心。

感谢郭雪媛师姐、班鑫磊师姐和陈依珂师姐，你们让我感受到了研究室的温暖和快乐，你们的存在让研究室变得欢快充满活力，在生活上也对我和同门、师弟师妹们无微不至，遇见你们是我的幸运。感谢张睿师兄和徐康乾师兄，两位师兄无论是学习还是生活上都给予了我很大的帮助，两位师兄也是我在学术上的榜样，希望两位师兄在美国和日本的攻博之路上能披荆斩棘，崭露头角。

感谢同门管帅、薛智奇、赵涛涛和王云骞，我们一起并肩奋斗，为了同一个目标相互支持和鼓励。这一时刻的喜悦我想只有一起经历过的我们才能有最强烈的共鸣。

感谢康建飞师弟和易卓然师弟，你们是研究室下一阶段扛起学术重任的新人，与你们的交流也让我受益匪浅，也希望你们在接下来的求学之路上不畏艰险，勇往直前。感谢吴雅琴师妹，师妹的羽毛球给我留下了深刻的印象，也希望你能在

这个疫情影响下困难的时候坚持自我，完成自己的目标。同时还感谢濮昱师弟、曾璟琳师妹、陈豪师弟、冉凌霄师妹，希望你们继续努力让这个研究室继续保持活力。感谢仝运佳师姐、陈实师兄、林庄慧师姐，何其有幸与你们同属和泉研究室。感谢张力师兄、李宪之师兄、谢雅娟师姐、龚玲师妹、曹跃辉师弟、姜康师弟、郑志泉师弟、郭泰昆师弟、杨虎师弟、黎思维师妹。与你们的相处我非常愉快，与你们的友谊是我人生中的一笔财富。

感谢我室友潘苏辰的不杀之恩，和你在一个屋檐下的三年是轻松快乐的。感谢赵道同学，我们相识于一堂课，一直相互吐槽和鼓励至今。感谢我的发小徐大力，从小学开始我们就一直在同一座城中学习，接近二十年的友谊让我感到弥足珍贵。

我最想感谢的是我的父母。攻读硕士学位不仅是我个人的价值追求，也是他们一生的夙愿。在我的求学之路上，我的父母经常会提起他们小时候砍柴来缴纳学费、凌晨天刚蒙蒙亮就开始读书的故事，告诉我如今的生活是多么来之不易。他们深知一个良好的学习生活环境的重要性。感谢你们在我求学之路上的默默的支持和鼓励。

此外还要感谢 H.P.洛夫克罗夫特在本文的写作过程中给予我的精神陪伴。

最后还是想告诫自己，保持一颗谦逊的心，小心迈出以后人生的每一步，珍惜现在的每一个机会，谨慎前行。

陈子旸

2020年6月15日于三好坞

## 参考文献

- [1] 吕西林, 蒋欢军. 复杂高层建筑抗震与消能减震研究进展. 建筑结构学报, 2010, Vol.31(06): 52-61
- [2] TONG YUNJIA, XIE LIYU, XUE SONGTAO, TANG HESHENG. Performance of a Passively-controlled Steel Building Before and After the 2011 Great East Japan Earthquake. Structural Health Monitoring 2017, 2017(shm)
- [3] Cao Miao, Tang Hesheng, Funaki Naoki, Xue Songtao. Study on a real 8F steel building with oil damper damaged during the 2011 Great East Japan Earthquake., 2012
- [4] 谢丽宇, 唐和生, 薛松涛. 首例油阻尼器破坏对结构设计的经验教训——日本 3·11 地震的启示. 结构工程师, 2015, Vol.31(2): 2-9
- [5] Yao J. T. Concept of structural control. Journal of the Structural Division, 1972, Vol.98(st 7)
- [6] Soong T. T., Spencer Jr Reviewer B. F. Active structural control: theory and practice. Journal of Engineering Mechanics, 1992, Vol.118(6): 1282-1285
- [7] Soong Tsu T., Dargush Gary F. Passive energy dissipation systems in structural engineering: Wiley, 1997
- [8] 胡聿贤. 地震工程学 (第二版): 北京: 地震出版社, 2006
- [9] 蒋通, 冯德民. 被动减震结构设计·施工手册: 原著第 2 版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008
- [10] 唐家祥, 刘再华. 建筑结构基础隔震. 华中理工大学出版社, 武汉, 1993
- [11] 周福霖. 工程结构减震控制: 北京: 地震出版社, 1997
- [12] Lee David, Taylor Douglas P. Viscous damper development and future trends. The Structural Design of Tall Buildings, 2001, Vol.10(5): 311-320
- [13] Huang Henry C. Efficiency of the motion amplification device with viscous dampers and its application in high-rise buildings. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2009, Vol.8(4): 521-536
- [14] Berton Stefano. Displacement amplification method and apparatus for passive energy dissipation in seismic applications.: Google Patents, 2004
- [15] Huang C. H. Parametric study for motion amplification device with viscous damper.: Vancouver Canada, 2004

- [16] Ormondroyd J. The theory of the dynamic vibration absorber. Trans., ASME, Applied Mechanics, 1928, Vol.50: 9-22
- [17] Hahnkamm Erich. Die dämpfung von fundamentschwingungen bei veränderlicher erregfrequenz. Ingenieur-Archiv, 1933, Vol.4(2): 192-201
- [18] Den Hartog Jacob Pieter. Mechanical vibrations: Courier Corporation, 1985
- [19] Brock John E. A note on the damped vibration absorber. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1946, Vol.13(4): 284
- [20] Yang J. N., Lin S., Kim J. H., Agrawal A. K. Optimal design of passive energy dissipation systems based on  $H^\infty$  and  $H_2$  performances. Earthquake engineering & structural dynamics, 2002, Vol.31(4): 921-936
- [21] Leung Andrew YT, Zhang Haijun, Cheng C. C., Lee Y. Y. Particle swarm optimization of TMD by non - stationary base excitation during earthquake. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2008, Vol.37(9): 1223-1246
- [22] Kaynia Amir M., Biggs John M., Veneziano Daniele. Seismic effectiveness of tuned mass dampers. Journal of the Structural Division, 1981, Vol.107(8): 1465-1484
- [23] Abu-Akeel A. K. The electrodynamic vibration absorber as a passive or active device, 1967
- [24] Chang James CH, Soong Tsu T. Structural control using active tuned mass dampers. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1980, Vol.106(6): 1091-1098
- [25] Snowdon J. C. Dynamic vibration absorbers that have increased effectiveness, 1974
- [26] Cowley A., Boyle A. Active dampers for machine tools. Annals of the CIRP, 1970, Vol.18(1): 213-222
- [27] McNamara Robert J. Tuned mass dampers for buildings. Journal of the Structural Division, 1977, Vol.103(9): 1785-1798
- [28] Nakaminami S., Ikago K., Inoue N., Kida H. Response Characteristics of a Base-Isolated Structure Incorporated with a Force-Restricted Viscous Mass MaMass Damper Damper., 2012
- [29] 背户一登任明章. 动力吸振器及其应用, 2013
- [30] Kawamata S. Development of a vibration control system of structures by means of mass pumps. Institute of Industrial Science, University of Tokyo: Tokyo, Japan, 1973
- [31] Arakaki T., Kuroda H., Arima F., Inoue Y., Baba K. Development of seismic devices applied to ball screw. Part 1: Basic performance test of RD-series. AIJ Journal of Technology and Design, 1999, Vol.5(8): 239-244
- [32] Arakaki T., Kuroda H., Arima F., Inoue Y., Baba K. Development of seismic devices applied

- to ball screw: Part 2 Performance test and evaluation of RD-series. *AIJ Journal of Technology and Design*, 1999, Vol.9: 265-270
- [33] Saito K., Kurita S., Inoue N. Optimum response control of 1-DOF system using linear viscous damper with inertial mass and its Kelvin-type modeling. *Journal of Structural Engineering*, 2007, Vol.53: 53-66
- [34] Ikago K., Sugimura Y., Saito K., Inoue N. Optimum seismic response control of multiple degree of freedom structures using tuned viscous mass dampers., 2010
- [35] SAITO Kenji. Dynamic loading test and application to a high-rise building of viscous damping devices with amplification system., 2002
- [36] Kida H., Watanabe Y., Nakaminami S., Tanaka H., Sugimura Y., Saito K., Ikago K., Inoue N. Full-scale dynamic tests of tuned viscous mass damper with force restriction mechanism and its analytical verification. *Journal of Structural and Construction Engineering Architectural Institute of Japan*, 2011, Vol.76(665): 1271-1280
- [37] Saito Kenji, Inoue Norio. A STUDY ON OPTIMUM RESPONSE CONTROL OF PASSIVE CONTROL SYSTEMS USING VISCOUS DAMPER WITH INERTIAL MASS Substituting equivalent nonlinear viscous elements for linear viscous elements in optimum control systems. *AIJ Journal of Technology and Design*, 2007, Vol.13(26)
- [38] 张瑞甫, 曹嫣如, 潘超. 惯容减震 (振) 系统及其研究进展. *工程力学*, 2019, Vol.36(10): 8-27
- [39] Smith Malcolm C. Synthesis of mechanical networks: the inerter. *IEEE Transactions on automatic control*, 2002, Vol.47(10): 1648-1662
- [40] Smith Malcolm C., Wang Fu-Cheng. Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters. *Vehicle system dynamics*, 2004, Vol.42(4): 235-257
- [41] 杨晓峰, 沈钰杰, 陈龙, 汪若尘, 孙晓强. 基于动力吸振理论的车辆 ISD 悬架设计与性能分析, 2014
- [42] 毛明, 王乐, 陈轶杰, 雷强顺, 杜甫. 惯容器及惯容器-弹簧-阻尼器悬架研究进展. *兵工学报*, 2016(2016 年 03): 525-534
- [43] Li Chuan, Liang Ming, Wang Yixian, Dong Yutao. Vibration suppression using two-terminal flywheel. Part I: Modeling and characterization. *Journal of Vibration and Control*, 2012, Vol.18(8): 1096-1105
- [44] Li Chuan, Liang Ming, Wang Yixian, Dong Yutao. Vibration suppression using two-terminal flywheel. Part II: application to vehicle passive suspension. *Journal of Vibration and Control*,

- 2012, Vol.18(9): 1353-1365
- [45] Wang Fu-Cheng, Su Wei-Jiun. Inerter nonlinearities and the impact on suspension control.: IEEE, 2008, 3245-3250
- [46] Furuhashi T. Mode isolation by inertia mass: study on response control by inertia mass no. 1. J. Struct. Constr. Eng., AIJ, 2004, Vol.576: 55-62
- [47] Saito Kenji, Yogo Kensuke, Sugimura Yoshifumi, Nakaminami Shigeki, Park Kiyeon. Application of rotary inertia to displacement reduction for vibration control system., 2004
- [48] Ikago Kohju, Saito Kenji, Inoue Norio. Seismic control of single - degree - of - freedom structure using tuned viscous mass damper. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2012, Vol.41(3): 453-474
- [49] Ikago Kohju, Sugimura Yoshifumi, Saito Kenji, Inoue Norio. Modal response characteristics of a multiple-degree-of-freedom structure incorporated with tuned viscous mass dampers. Journal of Asian Architecture and Building Engineering, 2012, Vol.11(2): 375-382
- [50] Sugimura Y., Goto W., Tanizawa H., Saito K., Nimomiya T. Response control effect of steel building structure using tuned viscous mass damper., 2012, 24-28
- [51] Ogino M., Sumiyama T. Structural design of a high-rise building using tuned viscous mass dampers installed across three consecutive storeys., 2014
- [52] 赵志鹏, 张瑞甫, 陈清军, 潘超, 王超. 基于减震比设计方法的惯容减震结构分析. 工程力学, 2019, Vol.36(S1): 125-130
- [53] 潘超, 张瑞甫, 王超, 逯静洲. 单自由度混联 II 型惯容减震体系的随机地震响应与参数设计. 工程力学, 2019(1): 14
- [54] Zhang Ruifu, Zhao Zhipeng, Pan Chao, Ikago Kohju, Xue Songtao. Damping enhancement principle of inerter system. Structural Control and Health Monitoring, 2020: e2523
- [55] Zhao Zhipeng, Zhang Ruifu, Jiang Yiyao, De Domenico Dario, Pan Chao. Displacement-Dependent Damping Inerter System for Seismic Response Control. Applied Sciences, 2020, Vol.10(1): 257
- [56] 阎武通, 韩冰, 文永奎. 新型调谐黏滞质量阻尼器对斜拉桥的减震控制分析. 土木工程学报, 2016(s1): 71-76
- [57] Pan Chao, Zhang Ruifu, Luo Hao, Li Chao, Shen Hua. Demand - based optimal design of oscillator with parallel - layout viscous inerter damper. Structural Control and Health Monitoring, 2018, Vol.25(1): e2051
- [58] Hou Xingguo, Tagawa Hiroshi. Displacement-restraint bracing for seismic retrofit of steel

- moment frames. *Journal of Constructional Steel Research*, 2009, Vol.65(5): 1096-1104
- [59] Kurata M., Leon R. T., DesRoches R. Rapid seismic rehabilitation strategy: concept and testing of cable bracing with couples resisting damper. *Journal of structural engineering*, 2012, Vol.138(3): 354-362
- [60] Gao Nan, Jeon Jong-Su, Hodgson Darel E., DesRoches Reginald. An innovative seismic bracing system based on a superelastic shape memory alloy ring. *Smart Materials and Structures*, 2016, Vol.25(5): 55030
- [61] Nakaminami S., Ikago K., Inoue N., Kida H. Response Characteristics of a Base-Isolated Structure Incorporated with a Force-Restricted Viscous Mass MaMass Damper Damper., 2012
- [62] Xie Liyu, Ban Xinlei, Xue Songtao, Ikago Kohju, Kang Jianfei, Tang Hesheng. Theoretical Study on a Cable-Bracing Inerter System for Seismic Mitigation. *Applied Sciences*, 2019, Vol.9(19): 4096
- [63] 李超, 张瑞甫, 赵志鹏, 李俊卫, 罗浩, 翁大根. 调谐黏滞质量阻尼器基于遗传算法的参数优化研究. *结构工程师*, 2016(2016 年 04): 124-131
- [64] Zhang Shiming, Zhang Ruifu, Zhao Zhipeng. Demand-Based Optimal Design of Storage Tank with Inerter System. *Shock and Vibration*, 2017, Vol.2017
- [65] Pan Chao, Zhang Ruifu. Design of structure with inerter system based on stochastic response mitigation ratio. *Structural Control and Health Monitoring*, 2018, Vol.25(6): e2169
- [66] 赵志鹏, 张瑞甫, 陈清军, 潘超, 王超. 基于减震比设计方法的惯容减震结构分析. *工程力学*, 2019, Vol.36(S1): 125-130
- [67] Chen Qingjun, Zhao Zhipeng, Xia Yuying, Pan Chao, Luo Hao, Zhang Ruifu. Comfort based floor design employing tuned inerter mass system. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, Vol.458: 143-157
- [68] Zhao Zhipeng, Zhang Ruifu, Lu Zheng. A particle inerter system for structural seismic response mitigation. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, Vol.356(14): 7669-7688
- [69] Brzeski P., Lazarek M., Perlikowski P. Experimental study of the novel tuned mass damper with inerter which enables changes of inertance. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, Vol.404: 47-57
- [70] ISHIMARU Shinji, HATA Ipppei, MIKAMI Junji, KIMIDUKA Masayuki. A SIMPLE DESIGN METHOD FOR TUNED DYNAMIC MASS SYSTEMS ON A BASIS OF AUXILIARY STIFFNESS FACTOR. *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, 2010, Vol.75(654): 1455-1464

- [71] Wouterse J. H. Critical torque and speed of eddy current brake with widely separated soft iron poles.: IET, 1991, 153-158
- [72] Canova Aldo, Vusini Bruno. Design of axial eddy-current couplers. IEEE Transactions on Industry Applications, 2003, Vol.39(3): 725-733
- [73] Lubin Thierry, Rezzoug Abderrezak. Steady-state and transient performance of axial-field eddy-current coupling. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, Vol.62(4): 2287-2296
- [74] Berardengo Marta, Cigada Alfredo, Guanziroli F., Manzoni Stefano. Modelling and control of an adaptive tuned mass damper based on shape memory alloys and eddy currents. Journal of Sound and Vibration, 2015, Vol.349: 18-38
- [75] Ebrahimi Babak, Khamesee Mir Behrad, Golnaraghi Farid. A novel eddy current damper: theory and experiment. Journal of Physics D: Applied Physics, 2009, Vol.42(7): 75001
- [76] Ebrahimi Babak, Khamesee Mir Behrad, Golnaraghi M. Farid. Design and modeling of a magnetic shock absorber based on eddy current damping effect. Journal of Sound and Vibration, 2008, Vol.315(4-5): 875-889
- [77] Furlani Edward P. Permanent magnet and electromechanical devices: materials, analysis, and applications: Academic press, 2001
- [78] Heald Mark A. Magnetic braking: Improved theory. American journal of physics, 1988, Vol.56(6): 521-522
- [79] Lu Xilin, Zhang Qi, Wu Weichao, Shan Jiazeng. Data - driven two - level performance evaluation of eddy - current tuned mass damper for building structures using shaking table and field testing. Computer - Aided Civil and Infrastructure Engineering, 2019, Vol.34(1): 38-57
- [80] Lu Xilin, Zhang Qi, Weng Dagen, Zhou Zhiguang, Wang Shanshan, Mahin Stephen A., Ding Sunwei, Qian Feng. Improving performance of a super tall building using a new eddy - current tuned mass damper. Structural Control and Health Monitoring, 2017, Vol.24(3): e1882
- [81] Bae Jae-Sung, Hwang Jai-Hyuk, Park Jung-Sam, Kwag Dong-Gi. Modeling and experiments on eddy current damping caused by a permanent magnet in a conductive tube. Journal of Mechanical Science and Technology, 2009, Vol.23(11): 3024-3035
- [82] 班鑫磊, 谢丽宇, 薛松涛, 张瑞甫. 拉索式旋转电涡流阻尼器的理论模型及频域响应分析. 地震工程学报, 2018, Vol.40(5): 941-945
- [83] Wang Fu-Cheng, Su Wei-Jiun. Impact of inerter nonlinearities on vehicle suspension control. Vehicle system dynamics, 2008, Vol.46(7): 575-595

- [84]梁玉鹏, 李梦奇, 邓霜梅, 王斌. 数控机床滚珠丝杠副摩擦力矩研究进展. 湖南农机, 2018(2018 年 04): 225
- [85] Papageorgiou Christos, Houghton Neil E., Smith Malcolm C. Experimental testing and analysis of inerter devices. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 2009, Vol.131(1)
- [86]孙晓强, 陈龙, 汪少华, 杨晓峰. 滚珠丝杠式惯容器非线性建模与参数辨识. 振动. 测试与诊断, 2016, Vol.36(2): 329-334
- [87]孙晓强, 陈龙, 汪若尘, 张孝良, 陈月霞. 滚珠丝杠式惯容器试验及力学性能预测. 振动与冲击, 2014, Vol.33(14): 61-65
- [88] Brzeski P., Perlikowski P. Effects of play and inerter nonlinearities on the performance of tuned mass damper. *Nonlinear Dynamics*, 2017, Vol.88(2): 1027-1041
- [89]美 TA· 哈里斯, 美 MN· 科兹拉斯, 罗继伟, 马伟, 杨咸启, 罗天宇. 滚动轴承分析: 轴承技术的基本概念. 第 1 卷: 机械工业出版社, 2010
- [90]美 TA· 哈里斯, 美 MN· 科兹拉斯, 罗继伟, 马伟, 杨咸启, 罗天宇. 滚动轴承分析: 轴承技术的高等概念. 第 2 卷: 机械工业出版社, 2010
- [91] Karnopp Dean. Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems, 1985
- [92] Lopez I., Busturia J. M., Nijmeijer H. Energy dissipation of a friction damper. *Journal of sound and vibration*, 2004, Vol.278(3): 539-561

## 个人简历、在读期间发表的学术论文与研究成果

### 个人简历:

陈子暘, 男, 1995年7月生。

2017年6月毕业于重庆大学土木工程学院, 获学士学位。

2017年9月免试推荐同济大学土木工程学院结构防灾减灾工程系攻读硕士学位。

### 研究成果:

[1] **Chen, Z.**, Xue, S., & Xie, L. . Time delay estimation via correlation in the non-synchronous sensor network by the internet of things[J]. IOP Conference Series Earth and Environmental ence, 283, 012059.

[2] **陈子暘**,谢丽宇,薛松涛. 摩擦对自平衡惯容阻尼器的影响研究[C]. 第八届全国结构抗振控制与健康监测学术会议论文集(2019)