

横观各向同性层状场地的动力边界条件*

薛松涛^{1, 2, 3} 陈 容^{1, 3} 秦 岭¹ 陈竹昌¹

(同济大学工程力学与技术系和泉研究室 上海 200092)

(²日本近畿大学理工学部) (同济大学固体力学教育部重点实验室 上海 200092)

摘要 采用横观各向同性层状弹性体模拟场地土, 对该场地底部采用了三种不同的边界: 固定边界、阻尼边界及半空边界。推导了这三种边界条件的公式, 并且给出了它们进入离散化后的 Rayleigh 波与 Love 波的代数特征方程方法。然后, 计算了场地在三种边界条件下对垂直及水平简谐集中荷载的位移响应, 并与理论解进行了比较, 指出了它们的适用范围。

关键词 横观各向同性层状弹性场地, 固定、阻尼与半空间边界条件

分类号 TU 435 文献标识码 A 文章编号 1000-6915(2001)01-0065-05

1 前言

对于横观各向同性 (以下简称 TI) 层状场地的动力分析, Wass 等人已提出了一套完整的分析方法^[1]。其后, Liu 与 Novak 将该成果用于单桩的动力分析中^[2]。但在处理场地的下部边界时, Wass 等人采用了固定边界条件。Liu 与 Novak 采用了同样的边界条件, 并认为: 薄层元素法只能用于底部固定的土层。实际上, 这一论点很值得商榷。采用固定边界将使场地的振动能量无法向半空间辐射, 从而使解失真^[3~7]。鉴于此, 本文对 TI 层状场地的动力边界条件进行讨论, 并探讨它们的适用范围。

2 横观各向同性层状场地的力学模型

设一场地由 $m - 1$ 层土层组成, 置于半空间之上, 它们在水平方向延伸至无穷远。这些土层在水平面内为各向同性, 而在垂直方向材料性质随深度不同而变化^[8]。

设其层与层交界面上作用有形如 $P(k) = \bar{p} \cos n\theta \cdot e^{i\omega t}$ 或 $P(k) = \bar{p} \sin n\theta \cdot e^{i\omega t}$ 的环形荷载, 它们可能沿径向、切向及垂直方向作用。k 为圆频率。该场地的

力学模型及一种可能的荷载见图 1

3 固定边界条件

在处理层状场地下部边界时, Wass 等人采用了固定边界。对于这种边界, 在场地作自由振动时, 有如下的边界条件:

$$\begin{cases} [f_z, \epsilon_z, f_\theta]^T = \mathbf{0} & z = 0 \\ [U, W, V]^T = \mathbf{0} & z = h_i \end{cases} \quad (1)$$

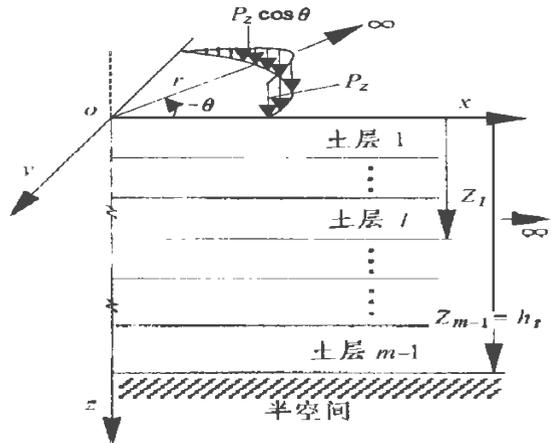


图 1 横观同性层状场地的力学模型

Fig. 1 Mechanical model of transversely isotropic stratified medium

2000 年 1 月 31 日收到初稿, 2000 年 3 月 27 日收到修改稿。

* 国家自然科学基金 (59778033) 资助项目及国家杰出青年基金资助项目。

作者 薛松涛 简介: 男, 1963 年生, 1985 年毕业于同济大学工程力学系, 现任教授, 主要从事地震工程、振动控制和结构健康监测等方面的研究工作。

式中: f_r, f_z 为沿径向、切向的应力; e_z 为 z 方向的正应力; U, W, V 分别为沿 r, z 及 θ 方向位移 u 略去 e^{ikz} 后的幅值, $u = [u, w, v]^T = [U, V, W]^T e^{ikz}$.

对图 1 所示的力学模型及固定边界条件, 利用薄层元素法, 可得到离散化后的广义 Rayleigh 波及 Love 波代数特征方程如下^[1]:

$$\begin{cases} (A_R k_R^2 + B_R k_R^2 + C_R) f_R = 0 \\ (A_L k_L^2 + C_L) f_L = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中: A_R, B_R, C_R 为 $2(m-1) \times 2(m-1)$ 阶矩阵; A_L 及 C_L 为 $(m-1) \times (m-1)$ 阶矩阵, 详细表达式见文 [1]; $f_R^T = [f_r^T, f_z^T]$; $f_L = f_\theta$ 表示场地所有土层界面(包括顶部)沿径向、 z 向及切向的“位移”幅值向量; k_R, k_L 称为波数

4 阻尼边界条件

图 2 给出了在 (r, θ, h_1) 处的阻尼边界, C_D, C_D^r, C_D^θ 分别为沿 r, θ, z 方向的阻尼器的阻尼系数. 对这样的模型当场地作自由振动时可以写出以下的边界条件:

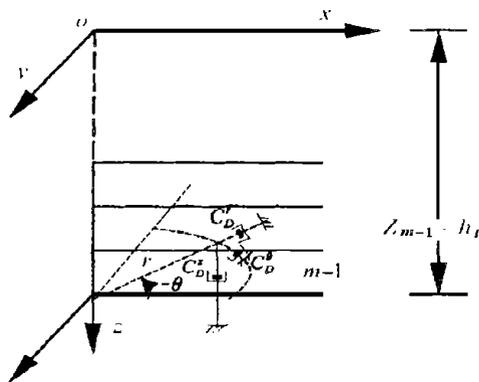


图 2 阻尼边界模型

Fig. 2 Model of damping boundary

$$\begin{cases} [f_r, e_z, f_\theta]^T = 0 & z = 0 \\ [f_r, e_z, f_\theta]^T = \\ [-F_D^r, -F_D^\theta, F_D^z] = -F_D & z = h_1 \end{cases} \quad (3)$$

式中: F_D^r, F_D^θ 及 F_D^z 分别为沿 r, θ 及 z 方向的阻尼力. 它们可写为

$$F_D = \begin{bmatrix} C_D & & \\ & C_D^r & \\ & & C_D^\theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: C_D, C_D^r 及 C_D^θ 分别为沿 r, z 及 θ 方向的阻尼系数.

为了方便, 将坐标原点选在底部边界上, 按上所述, 反射波的幅值 B_1 应当等于零, 才能完全吸收入射波. 按照文 [4], 并将场地下部半空间中划出一

土层作为场地地第 m 层, 可得

$$\begin{cases} C_D^m = C_D^{\theta m} = d_m C_{SV}^m \\ C_D^m = d_m C_{PV}^m \end{cases} \quad (5)$$

式中: C_{SV}^m, C_{PV}^m 分别为半空间中垂直传播的 S, P 波波速, 于是有

$$F_D = C u = ik C u \quad (6)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_D^m & & \\ & C_D^m & \\ & & C_D^{\theta m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_m C_{SV}^m & & \\ & d_m C_{PV}^m & \\ & & d_m C_{SV}^m \end{bmatrix} \quad (7)$$

当底部采用阻尼边界时, A_R, B_R, C_R 均为 $2m \times 2m$ 阶矩阵, A_L, B_L 均为 $m \times m$ 阶矩阵. 且应在 C_R 的 $(m, m), (2m, 2m)$ 项上分别加上 $d_m C_{SV}^m, d_m C_{PV}^m$; 在 C_L 的 (m, m) 项上加上 $d_m C_{SV}^m$, 固定边界与阻尼边界条件在公式中的差别即体现于此

5 横观各向同性弹性半空间边界条件

这里只考虑关于 x 轴对称的情形. TI 弹性半空间表面受到一对称于 x 轴的简谐环荷载的作用. 由于关于 x 轴对称, 故其运动方程及求解的过程与文 [1] 中介绍的相类似

由文 [1] 可知, $f = [f_r, f_z, f_\theta]^T$ 为 z 的函数, 将坐标原点取在半空间表面, 由于在 $z \rightarrow \infty$ 时位移应当趋向零, 故可设它们均具有 e^{-Yz} 的形式. 又因为 f_r 及 f_θ 分别表示径向及切向“位移”, 故它们沿 z 方向的变化规律可假设相同. 而 f_z 表示沿 z 方向的“位移”, 它的变化规律与 f_r, f_θ 不同. 因此可设

$$f = \begin{cases} f_r \\ f_z \\ f_\theta \end{cases} = \begin{cases} A e^{-Yz} \\ B e^{-Yz} \\ C e^{-Yz} \end{cases} = \begin{bmatrix} e^{-Yz} & & \\ & e^{-Yz} & \\ & & e^{-Yz} \end{bmatrix} \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} \quad (8)$$

所以: $u = H f = H \begin{bmatrix} e^{-Yz} & & \\ & e^{-Yz} & \\ & & e^{-Yz} \end{bmatrix} \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} \quad (9)$

$$\sigma = -HLb f = \begin{bmatrix} C_{44}^m \frac{d}{dz} & C_{44}^m k & 0 \\ -k C_{13}^m & C_{33}^m \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}^m \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-Yz} & & \\ & e^{-Yz} & \\ & & e^{-Yz} \end{bmatrix} \begin{cases} A \\ B \\ C \end{cases} = \begin{bmatrix} -C_{44}^m Y & C_{44}^m k & 0 \\ -k C_{13}^m & -C_{33}^m a & 0 \\ 0 & 0 & -C_{44}^m Y \end{bmatrix} f = H C^* f \quad (10)$$

式中: 上标 m 表示半空间的参数; C_{ij}^m 为 TI 土层的弹性常数; H, Lb 的详细表达式见文 [1]; 其表达式见文 [5]. 上面的式子均略去了时间因子 $e^{i\omega t}$. 因此应力边界条件应当为

$$\begin{cases} \sigma = [f_z, e_z, f_z]^T = -HL_b f = HC^* f \\ L_b f = -C^* f \quad z = 0 \end{cases} \quad (11)$$

将所设的 f 代入方程 $(L - dk^2 I_3) f = 0^{11}$, 得

$$Y = \frac{k^2 \frac{C_{66}^m}{C_{44}^m} - \frac{d_m k^2}{C_{44}^m}}{\quad} \quad (12a)$$

$$Y = k \frac{C_{66}^m}{C_{44}^m} \quad k = 0 \quad (12b)$$

$$a = A \frac{k^2 \frac{C_{66}^m}{C_{44}^m} - \frac{d_m k^2}{C_{44}^m}}{\quad} \pm \frac{A^2 \left[k^2 \frac{C_{66}^m}{C_{44}^m} - \frac{d_m k^2}{C_{44}^m} \right] + k^2 \frac{C_{44}^m}{C_{33}^m} - \frac{d_m k^2}{C_{33}^m}}{\quad} \quad (13a)$$

式中: $A = \frac{(C_{13}^m + C_{44}^m)^2}{2C_{33}^m(C_{11}^m - C_{66}^m)}$
 为了保证 e^{-az} 在 $z \rightarrow \infty$ 时为零, 故应取“+”号。当 $k = 0$ 时, 有

$$a = Ak \frac{C_{66}^m}{C_{44}^m} + k \quad A^2 = \frac{C_{66}^m}{C_{44}^m} + \frac{C_{44}^m}{C_{33}^m} \quad (13b)$$

由式 (12), (13) 可知, Y 与 a 均为 k 的函数 k 为波数, $k = k/V^m$, V^m 为半空间中剪切波或 P 波波速。在实际工程中, 它们在 500 m/s 以上。在考虑高层建筑的动力响应 (地震、风振等) 时均以低频为主, 高层建筑的基频一般在 0.5~2 Hz 左右。若考虑土结构相互作用时, 基频还会降低。所以起控制作用的 k 值在 0.01~0.02 左右。因此, 可以将 Y 与 a 在 $k = 0$ 附近展开成泰勒级数, 取其前 2 阶, 令 C_{SV}^m 为垂直上传播的剪切波速, 则有

$$Y \approx i \left[\frac{k}{C_{SV}^m} \right] + \frac{1}{2} \left[-i \frac{C_{SV}^m}{k} \frac{C_{66}^m}{C_{44}^m} \right] k^2 \quad (14)$$

$$a \approx i \left[\frac{k}{C_{SV}^m} \right] U + \frac{1}{2} \left[-i \frac{C_{SV}^m}{k} \right] Z k^2 \quad (15)$$

式中: $U = A + A^2 + \frac{C_{66}^m}{C_{44}^m}$,

$$Z = A \frac{C_{66}^m}{C_{44}^m} + \frac{A^2 \frac{C_{66}^m}{C_{44}^m} + \frac{C_{44}^m}{C_{33}^m}}{A^2 + \frac{C_{44}^m}{C_{33}^m}}$$

故 $L_b f = -C^* f =$

$$\begin{bmatrix} C_{44}^m Y - C_{44}^m k & 0 & 0 \\ C_{13}^m k & C_{33}^m a & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}^m Y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_m \\ f_{2m} \\ f_{0m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[-i \frac{C_{SV}^m}{k} \right] C_{66}^m & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left[-i \frac{C_{SV}^m}{k} \right] Z C_{33}^m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \left[-i \frac{C_{SV}^m}{k} \right] Z C_{66}^m \end{bmatrix} k^2 + \begin{bmatrix} 0 & -C_{44}^m & 0 \\ C_{13}^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} k^4$$

$$\begin{bmatrix} i \frac{k}{C_{SV}^m} C_{44}^m & 0 & 0 \\ 0 & i \frac{k}{C_{SV}^m} U C_{33}^m & 0 \\ 0 & 0 & i \frac{k}{C_{SV}^m} C_{44}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_m \\ f_{2m} \\ f_{0m} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

当 $k = 0$ 时, 可用式 (12b), (13b) 代入式 (10), 得到相应的公式, 这里不再列出。

于是, 若 TI 层状弹性场地的下部边界处理成 TI 弹性半空间时, 只须在 C_L 阵的第 (m, m) 元素上加上 $i \frac{k}{C_{SV}^m} C_{44}^m$; A_L 阵的第 (m, m) 元素上加上 $\frac{1}{2} \left[-i \frac{C_{SV}^m}{k} \right] C_{66}^m$; 在 A_R 的第 (m, m) 元素上加上 $\frac{1}{2} \left[-i \frac{C_{SV}^m}{k} \right] C_{66}^m$, 第 $(2m, 2m)$ 元素上加上 $\frac{1}{2} \left[-i \frac{C_{SV}^m}{k} \right] Z C_{33}^m$; 在 C_R 的第 (m, m) 元素上加上 $i \frac{k}{C_{SV}^m} C_{44}^m$, 第 $(2m, 2m)$ 元素上加上 $i \frac{k}{C_{SV}^m} U C_{33}^m$ 即可。当 $k = 0$ 时, 则应当按相应的公式取值。

注意式 (16) 中 k 的系数矩阵为非对称矩阵。许多学者 (如 Novak, Baranov, Veletsos 及 Verbic 等) 在处理半空间表面的垂直位移与水平、扭转等位移的关系时, 均假设它们互不耦合, 即略去其刚度 (或柔度) 矩阵中的非对角项。这里将式 (16) 中 k 的系数矩阵左上角的子矩阵分解成对称阵与反对称阵之和:

$$\begin{bmatrix} -C_{44}^m \\ C_{13}^m \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} - (C_{13}^m + C_{44}^m) \\ (C_{13}^m + C_{44}^m) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (C_{13}^m - C_{44}^m) \\ (C_{13}^m - C_{44}^m) \end{bmatrix} \quad (17)$$

略去非对称项后将它们并入 B_R 中, 即在特征方程 B_R 的第 $(m, 2m)$ 及 $(2m, m)$ 元素中仅须加上 $1/2(C_{13}^m - C_{44}^m)$ 即可。这样处理比上述研究者进了一步, 仅略去非对角项中的非对称部分。

6 几种边界条件的比较

阻尼边界、半空间边界及固定边界, 这三种边界孰优孰劣, 本应与理论解进行比较才能知道。但迄今为止, 横观各向同性层状场地格林函数理论解尚未得出, 只有利用各向同性弹性半空间理论解^[6]。为了有可比性, 这里将层状场地退化为各向同性层状弹性场地。场地的所有弹性常数与弹性半空间相同, 即 $d = 1 \text{ t/m}^3$, $v_s = 100 \text{ m/s}$, $\nu = 1/3$ 。所有的层厚均取为 1.0 m。这里分别计算了固定边界、阻尼边界及半空间边界的层状场地在表面垂直集中简谐荷载及水平集中简谐荷载作用时场地的位移响应。

图 3 为半空间之上 9 层场地的表面受垂直集中

简谐荷载时 $r = 1.0\text{m}$ 及 $r = 2.0\text{m}$ 处的竖向位移响应与理论解的比较。图中的水平坐标表示频率 (Hz)，
 竖直坐标为竖向位移。其值用 $\frac{1}{2\pi G} \frac{1-\nu}{r}$ 无量纲化 (G 为场地的剪切模量, $G = d\nu_s^2$)。

作者还计算了半空间之上 19层、29层、39层场地响应与理论解的比较, 图 4 为半空间之上 39层场地的情形。图中纵横坐标同图 3

从上述图可以看出, 当下部边界固定时, 其表

面的位移解与理论解的差别最大, 而弹性半空间边界的解较固定边界的结果接近理论解, 阻尼边界的结果最接近理论解。这种差别随着场地的厚度增加而逐渐减少, 至半空间之上 39层的场地时, 这三种边界的场地在表面处的位移响应已基本上一致。从这一现象可以说明, 阻尼边界及半空间边界比较符合实际情形, 固定边界由于它完全不能传递、吸收上部土层的振动能量, 所以与理论解差别较大, 尤

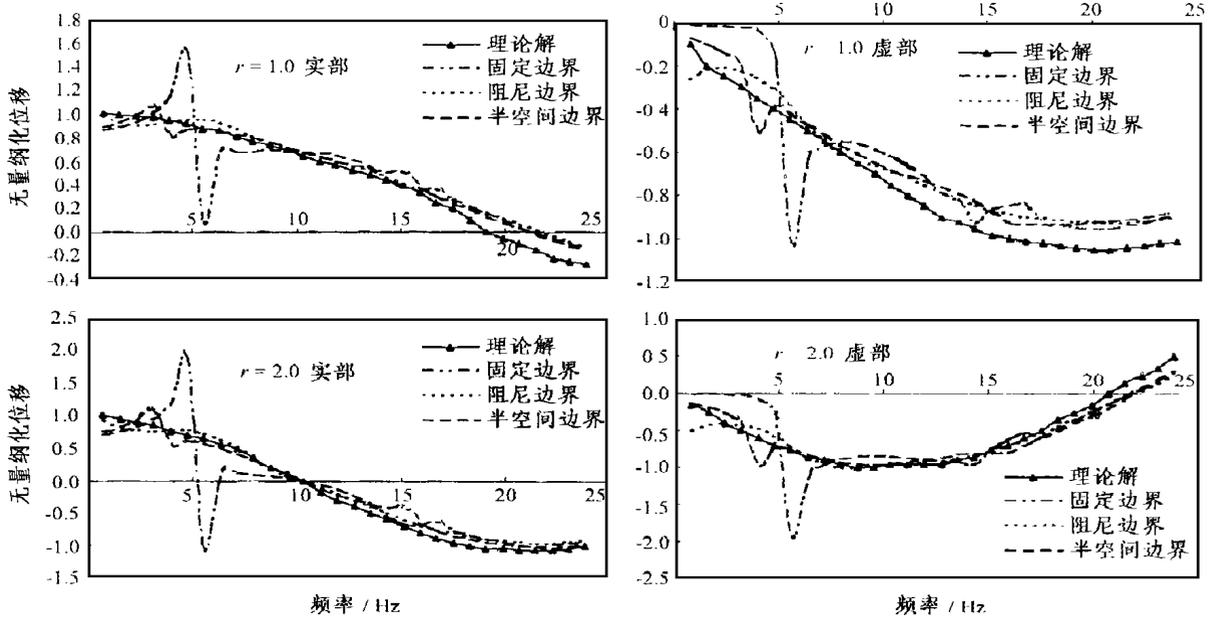


图 3 9层场地表面的垂直位移响应

Fig. 3 Virtual displacement response of 9 layer medium

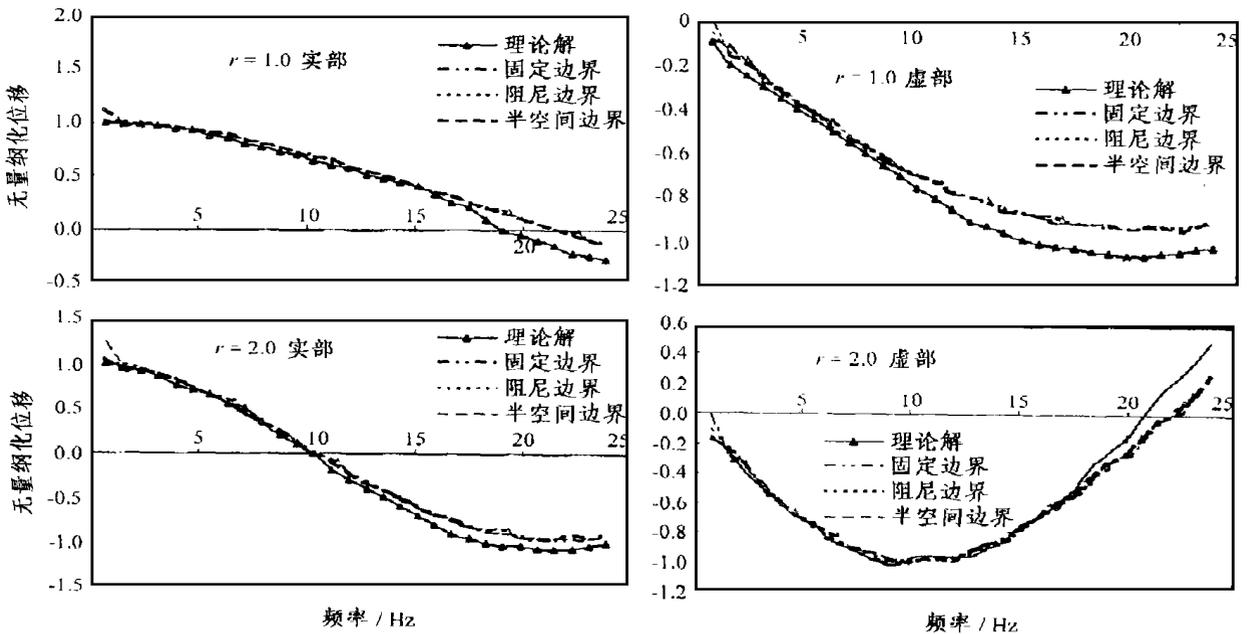


图 4 39层场地表面的垂直位移响应

Fig. 4 Virtual displacement response of 39 layer medium

其在场地土较薄时这种差别更大。

在场地土较厚的情况下,虽然三种边界条件表面的位移几乎相同,但由于边界的反射情况不同,在土层的内部它们的响应还是有区别的。作者计算了 39 层场地三种边界条件时第 30 层 $r = 1.0\text{ m}$ 及 $r = 2.0\text{ m}$ 处的垂直位移。计算表明,阻尼边界及半空间边界的结果几乎完全相同,但固定边界的结果与它们有明显的差异。尤其是实部,无论是在 $r = 1.0\text{ m}$ 及 $r = 2.0\text{ m}$ 处,固定边界最大的响应几乎为其余两种边界的 2 倍,这即表明波的反射产生了作用。

半空间表面处受水平集中简谐荷载时几种场地表面及内部在 $r = 1.0\text{ m}$, $r = 2.0\text{ m}$ 处的水平位移响应与图 3、4 有相似的趋势,限于篇幅,不详述。

从以上算例的比较可以看出,无论场地的厚度如何,阻尼边界及半空间边界算得的结果均比固定边界接近理论解。根据计算对比,可以得出如下一些有用的结论:在场地土较薄时,用阻尼边界较好,当场地土较厚时,用阻尼边界及半空间边界均可,它们的结果几乎完全相同。在场地土较厚且只考虑浅基础时可采用固定边界,因为固定边界处理比较方便,且土层较深时,边界条件对上部土层的影响较小。但深基础不宜采用固定边界。

7 结 论

(1) 对于固定边界、阻尼边界、半空间边界的情形,其边界条件可按本文中的公式及方法代入

Rayleigh 波及 Love 波的代数特征方程

(2) 边界条件不同,对场的响应有明显的影 响,不容忽视。

(3) 对各种场地均可采用阻尼边界条件;对场地土较厚的情形亦可采用半空间边界条件;对较厚的场地,当基础较浅时可采用固定边界条件,但深基础不宜采用固定边界。

参 考 文 献

- 1 Waas G, Riggs H R, Werkle H. Displacement solution for dynamic loads in transversely isotropic media[J]. EESD, 1985, 13(2): 173~ 193
- 2 Liu W, Novak M. Dynamic response of single piles embedded in transversely isotropic layered media[J]. EESD, 1994, 23(6): 1 239~ 1 257
- 3 Wolf J P. Dynamic soil-structure interaction [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1985
- 4 陈 睿, 陈竹昌, 薛松涛等. 横观各向同性层状场地对入射 SH 波的响应分析 [J]. 上海力学, 1998, 19(3): 213~ 220
- 5 长谷川正幸. 弹性波动论に基づいて群抗の動的挙動に関する基礎的研究 [R]. 日本: 清水建设株式会社, 1993
- 6 陈 睿, 陈竹昌, 薛松涛等. 横观各向同性层状场地对环形简谐荷载的位移响应 [J]. 上海力学, 1999, 20(2): 139~ 147
- 7 李肇胤, 周 锋, 陈 睿等. 横观各向同性层状场地受垂直圆盘状简谐荷时的响应分析 [J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(5): 608~ 612
- 8 丁皓江. 横观各向同性弹性力学 [M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1997

THE DYNAMIC BOUNDARY CONDITIONS OF TRANSVERSELY ISOTROPIC STRATIFIED MEDIA

Xue Songtao^{1, 2, 3}, Chen Rong^{1, 3}, Qing Ling¹, Chen Zhuchang¹

(¹ Department of Engineering Mechanics & Technology, Tongji University, Shanghai 200092 China)

(² School of Science and Engineering, Kinki University, Japan)

(³ Key Laboratory of Solid Mechanics of MOE, Tongji University, Shanghai 200092 China)

Abstract The formulas of three dynamic boundary conditions of transversely isotropic stratified media are derived. And the methods how to combine them with the discretized algebraic eigenvalue equation for generalized Rayleigh and Love waves are also given. The dynamic responses of the media with these different boundary conditions to concentrative harmonic loads are evaluated and compared with the theoretical results. Through the comparison, it can be found that the responses of the media with damping and half space boundary conditions when the media are thick, are close to the theoretical ones. But for the fixed boundary condition, only the responses of upper soil layers are close to theoretical ones. The results near the bottom of soil layers are much different from those for damping and half space boundary conditions. According to the evaluation, the applicable ranges for these boundary conditions are suggested.

Key words transversely isotropic stratified media, fixed, damping and half space boundary condition