

用双剪屈服准则对钢筋混凝土板 进行塑性铰线的极限分析*

范存新^{1,2} 陈家瑾¹ 谢小明¹ 薛松涛²

(¹苏州科技学院土木工程系, 苏州 215011) (²同济大学工程结构与防灾研究所, 上海, 200092)

摘 要 利用双剪屈服准则建立了用机动法计算钢筋混凝土薄板极限载荷的新的塑性铰线理论, 并导出了双向布置钢筋的钢筋混凝土板的屈服条件, 实例计算表明其更符合实验结果.

关键词 极限分析, 塑性铰线, 双剪屈服准则

1 引言

对钢筋混凝土板进行极限荷载的计算已有多年的历史, 现有的计算钢筋混凝土板极限荷载的理论是由 Johansen K W 等人按单向应力状态下的刚塑性模型建立起来的^[1,2], 只要板的某处某方向内力达到梁的极限弯矩值, 就认为此处板已经屈服. 在屈服处形成塑性铰线, 板破坏时, 板被塑性铰线分割成几个板块, 形成机构. 此理论认为只要板厚与钢筋数量相同、面积以及混凝土标号不变, 其塑性铰线上极限弯矩为常数. 但由此理论计算的极限载荷与各国所做的实验结果相比多数是偏小^[3,4]. 主要原因是此理论只考虑一个方向的主弯矩, 忽略了另一主方向的弯矩对屈服的影响. 本文中作者利用双剪应力屈服准则, 对钢筋混凝土板进行了新的塑性铰线的极限分析, 建立了新的塑性铰线计算模型.

2 基于双剪应力屈服准则钢筋混凝土板的屈服条件

2.1 双剪应力屈服准则^[1]

若主应力大小按 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 规定的排列顺序, 则该准则为

$$\begin{cases} \tau_{12} + \tau_{13} = \sigma_1 - 1/2(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_s, & \text{当 } \tau_{12} \geq \tau_{23} \\ \tau_{13} + \tau_{23} = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_s, & \text{当 } \tau_{12} < \tau_{23} \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\tau_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, $\tau_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$, $\tau_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

2.2 平面应力状态下的屈服准则

在平面应力状态下, 设 $\sigma_3 = 0$, 屈服准则由(1)可写为(图1)

$$\begin{cases} AB: \sigma_1 - 1/2\sigma_2 = \sigma_s, & BC: 1/2(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_s \\ CD: \sigma_2 - 1/2\sigma_1 = \sigma_s, & DE: 1/2\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_s \\ EF: -1/2(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_s, & FA: 1/2\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_s \end{cases} \quad (2)$$

3 基于双剪应力屈服准则钢筋混凝土板的极限条件^[5]

板的法向应力 σ_z 很小, 可视 $\sigma_z = \sigma_3 = 0$. 当板屈服时, 虽然每一根钢筋是单向受力状态, 但双向钢筋被混凝土包围起来, 与混凝土共同作用, 双向钢筋可视为共同体. 因此钢筋与混

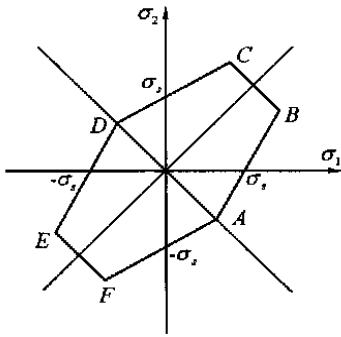


图 1 平面应力状态下屈服准则

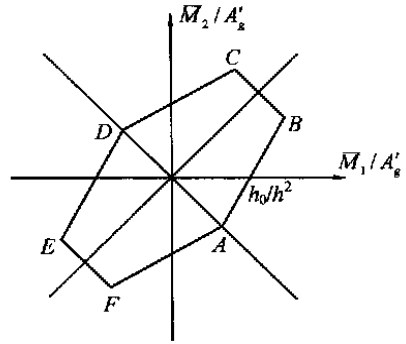


图 2 钢筋混凝土板的屈服准则

混凝土一定服从双剪应力屈服准则. 设此时钢筋第一主应力 $R_g' = \sigma_1$, 另一主应力 $R_g'' = \sigma_2$ (设钢筋布置方向与主方向一致. 若钢筋布置与主方向不一致, 则可折算出主方向的钢筋面积^[2,3]), 与钢筋相应的混凝土弯曲抗压应力 $R_w' = \sigma_1$, 另一主方向的混凝土弯曲抗压应力 $R_w'' = \sigma_2$, 则钢筋混凝土达到极限状态时钢筋与混凝土的屈服条件(2)式可写为(图 2)

$$\left\{ \begin{array}{ll} AB: R_g' - 1/2 R_g'' = R_{gs}, & R_w' - 1/2 R_w'' = R_{ws} \\ BC: 1/2 (R_g' + R_g'') = R_{gs}, & 1/2 (R_w' + R_w'') = R_{ws} \\ CD: R_g'' - 1/2 R_g' = R_{gs}, & R_w'' - 1/2 R_w' = R_{ws} \\ DE: 1/2 R_g'' - R_g' = R_{gs}, & 1/2 R_w'' - R_w' = R_{ws} \\ EF: -1/2 (R_g' + R_g'') = R_{gs}, & -1/2 (R_w' + R_w'') = R_{ws} \\ FA: 1/2 R_g' - R_g'' = R_{gs}, & 1/2 R_w' - R_w'' = R_{ws} \end{array} \right. \quad (3)$$

其中 R_{gs} 和 R_{ws} 为钢筋和混凝土单向受力时钢筋抗拉强度与混凝土的弯曲抗压强度.

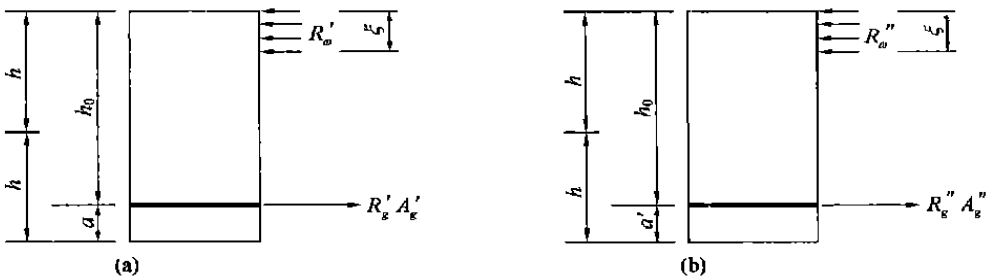


图 3 板的截面应力

设板的厚度为 $2h$, 钢筋保护层为 a 和 a' , 因 a 与 a' 相差不大, 则设 $a = a'$. A_g' 和 A_g'' 为板之两主向上每米的钢筋面积, 从板中取出单位长度的单元体(见图 3). 从图 3(a)得

$$R_g' A_g' = \xi R_w' \quad (4)$$

$$M_1 = R_g' A_g' (h - a) + \xi R_w' (h - 1/2 \xi) \quad (5)$$

式(4)代入(5)可得

$$M_1 = \xi R_w' (h - a) + \xi R_w' (h - 1/2 \xi) \quad (6)$$

同理,从图 3(b)可得

$$M_2 = \xi R_{\omega}''(h - a) + \xi R_{\omega}''(h - 1/2\xi) \tag{7}$$

从式(6)、(7)可解得

$$R_{\omega}' = \frac{M_1}{\xi(h - a) + \xi\left[h - \frac{1}{2}\xi\right]} \tag{8}$$

$$R_{\omega}'' = \frac{M_2}{\xi(h - a) + \xi\left[h - \frac{1}{2}\xi\right]} \tag{9}$$

则式(8)代入式(1),可得

$$R_g' = \frac{M_1}{\left[(h - a) + \left[h - \frac{1}{2}\xi\right]\right] A_g'} \tag{10}$$

同理可得

$$R_g'' = \frac{M_2}{\left[(h - a) + \left[h - \frac{1}{2}\xi\right]\right] A_g''} \tag{11}$$

但板中的主弯矩 M_1 和 M_2 在相差不大情况下,当板屈服时,其屈服条件一定服从式(2)的 BC 段方程.例如在对称荷载下板中心部分,若将式(8)、(9)、(10)、(11)代入式(2)中的 BC 段屈服方程,则

$$\left[\frac{M_1}{2h - a - \frac{1}{2}\xi} A_g'\right] + \left[\frac{M_2}{2h - a - \frac{1}{2}\xi} A_g''\right] = R_{gs} \tag{12}$$

$$\xi \left[\frac{M_1}{2h - a - \frac{1}{2}\xi}\right] + \xi \left[\frac{M_2}{2h - a - \frac{1}{2}\xi}\right] = R_{gs} \tag{13}$$

从式(12)可解得

$$\xi = - \left[\frac{M_1}{A_g'} + \frac{M_2}{A_g''} \right] \left(R_{gs} + 2(2h - a) \right) \tag{14}$$

将式(14)式代入式(13),可得

$$(M_1 + M_2) R_{gs}^2 + R_{os} \left[\frac{M_1}{A_g'} + \frac{M_2}{A_g''} \right] \left[\frac{M_1}{A_g'} + \frac{M_2}{A_g''} - 2R_{gs}(2h - a) \right] = 0 \tag{15}$$

将式(15)无量纲化,设 $M_1 = M_1 / R_{gs} h^2$, $M_2 = M_2 / R_{gs} h^2$, $R_{\alpha} = \frac{R_{os}}{R_{gs}}$, 则可得

$$(M_1 + M_2) / h^2 + R_{\alpha} \left[\frac{M_1}{A_g'} + \frac{M_2}{A_g''} \right] \left[\frac{M_1}{A_g'} + \frac{M_2}{A_g''} - \frac{2(2h - a)}{h^2} \right] = 0 \tag{16}$$

由于 $h^2 \gg A_g' / R_{\alpha}$, $h^2 \gg A_g'' / R_{\alpha}$, 则 BC 段中

$$(M_1 + M_2) / h^2 < R_{\alpha} \left[\frac{M_1}{A_g'} + \frac{M_2}{A_g''} \right]$$

于是

$$(M_1 + M_2) / h^2 \ll R_{\alpha} \left[\frac{M_1}{A_g'} + \frac{M_2}{A_g''} \right]^2$$

因此 BC 段的屈服条件简化为下面的式(18). 式中 $h_0 = 2h - a$.

因此各段的屈服条件经过相似处理可简化为(见图 3(b))

$$AB: \frac{M_1}{A_g} - \frac{M_2}{2A_g} - \frac{h_0}{h^2} = 0 \quad (17)$$

$$BC: \frac{M_1}{A_g} + \frac{M_2}{A_g} - \frac{2h_0}{h^2} = 0 \quad (18)$$

$$CD: \frac{M_1}{A_g} - \frac{M_2}{A_g} - \frac{h_0}{h^2} = 0 \quad (19)$$

$$DE: \frac{M_1}{A_g} - \frac{M_2}{2A_g} + \frac{h_0}{h^2} = 0 \quad (20)$$

$$EF: \frac{M_1}{A_g} + \frac{M_2}{A_g} + \frac{2h_0}{h^2} = 0 \quad (21)$$

$$FA: \frac{M_2}{A_g} - \frac{M_1}{2A_g} + \frac{h_0}{h^2} = 0 \quad (22)$$

式(4)即为各向异性钢筋混凝土板屈服条件, 板的不同区域在屈服时其屈服条件随内力情况不同而不同. 不同区域所用屈服方程也不同. 例如四边简支矩形板在均布荷载下, 板的中心区域 M_1 与 M_2 同量级, 相差不大, 则板达到极限状态时, 屈服条件一定服从 BC 段的屈服方程, 即满足式(18). 又如在简支边的边界区, 一主弯矩等于零或接近于零, 但另一主弯矩大于零, 则屈服时其内力一定处于 AB 段或 DC 段. 又如四边固定矩形板在均布荷载下, 其固定边附近内力一定均为负值, 且一定处在 EF 段或 FA 段, 即式(21)或(22).

4 基于双剪应力屈服准则的塑性铰线理论

基于上述的推导, 从式(17)~(22)可看出, 板达到极限状态时, 板的不同区域其两主弯矩之极限值不全相同, 其单位宽度理论极限弯矩并不一定等于单向应力状态下的单位宽度理论极限弯矩(即单向板情况). 因此不同区域塑性铰线的极限弯矩是不同的, 这取决于此塑性铰线在何位置. 另外板的屈服区域不是全板同时开始, 而是有先有后, 比如四边简支或固定矩形板, 板中点的两向正弯矩最大, 因此先从板中点开裂屈服, 两主弯矩 M_1 、 M_2 数量上接近, 且均为正值, 则屈服时一定服从 BC 段的屈服条件, 即式(18), 然后塑性铰线发展, 即屈服区从 BC 段发展到 AB 段或 CD 段, 然后再发展到 FA 段或 DE 段, 再进一步发展到 EF 段. 例如四边固定矩形板, 固定区附近其主弯矩均为负值, 且为等量值, 因此其屈服条件服从 EF 段的式(21). 就上所述, 作如下假设:

(1) 钢筋混凝土板中某区域之两主弯矩满足式(17)~(22)中的某一式时, 则此处板处于极限状态, 板沿最大主弯矩而形成塑性铰线.

(2) 钢筋混凝土板达到极限状态, 其屈服条件在不同区域采用不同的极限方程, 其塑性铰线上的单宽理论极限弯矩根据屈服方程采用不同的值.

(3) 板的屈服区域连续发展, 而且是连续的. 由于屈服有先后, 板一定从内力最大处首先开始屈服, 进而按图 3(b)的屈服线连续发展.

5 算例

例1 周边固定受均布载作用的圆板的极限载荷(图4)

(1) 板的中心区: 径向弯矩 $M_r > 0$, 环向弯矩 $M_\theta > 0$, 且 M_r 与 M_θ 同一量, 板屈服时先从

中心区开始. 设在 $r = \rho$ 处出现塑性铰线, 在 $r \leq \rho$ 之区域其屈服条件服从图 3(b) 的 BC 段屈服方程即 (18) 式. 设 $M_r = M_1, M_\theta = M_2$, 则 $\frac{M_r}{A_g} + \frac{M_\theta}{A_g} = \frac{2h_0}{h^2}$, 图 3(b) 中 BC 段的 C 点是 BC 与 CD 段的交点, 联立求解式 (18) 与 (19), 解得

$$M_r = \frac{2A_g' h_0}{3h^2}, \quad M_\theta = \frac{4A_g'' h_0}{3h^2}$$

图 3(b) 中 BC 段的 B 点是 BC 段与 AB 段交点. 联立求解式 (16) 与 (17), 得

$$M_r = \frac{4A_g' h_0}{3h^2}, \quad M_\theta = \frac{2A_g'' h_0}{3h^2}$$

取其平均

$$M_r = \frac{A_g' h_0}{h^2}, \quad M_r = R_{gs} A_g' h_0 = M_u'$$

这里, M_u' 为在单向径向应力状态下单位宽度的理论极限弯矩.

(2) 板的中间区域: 出现纵向塑性铰线 (见图 4), 由计算可得此处纵向塑性铰线的理论极限弯矩为 $M_\theta = \frac{2}{3} M_u''$.

(3) 固定端处: 在 $r = a$ 处, $M_r < 0$, 即 $M_1 < 0; M_\theta < 0$, 即 $M_2 < 0. M_1 = -\frac{4R_g A_g'}{3} h_0 = -\frac{4}{3} M_u'$, 设固定端处的钢筋和

板内纵向钢筋面积相等, 经计算不难求得中心区与边界区的相对转角 $\theta_1 = 1/(a - \rho)$, 纵向塑性铰线之间的转角 $\theta_2 = 2\pi/(a - \rho)$, 固定端处相对转角 $\theta_3 = 1/(a - \rho)$, 则内力功为

$$D = D_1 + D_2 + D_3 = M_u' \frac{2\pi\rho}{a - \rho} + \frac{4}{3} M_u'' \cdot 2\pi + \frac{4}{3} M_u' \frac{2\pi a}{a - \rho}$$

外力功为

$$W = \frac{\pi}{3} (a^2 + a\rho + \rho^2) q$$

因 $W = D$, 故 $q = \frac{6M_u'}{a^2(1-\rho^3)} \left[\rho + \frac{4}{3\alpha}(1-\rho) + \frac{4}{3} a \right]$. 由 $\frac{dq}{d\rho} = 0$, 可求得极限荷载 q (见表 1).

式中 $\alpha = \frac{M_u'}{M_u''}, \rho = \frac{\rho}{a}$.

本文解与文献[3]解的比较见表 1.

表 1 周边固定受均布荷载作用的圆板极限荷载比较

α	0.666	0.6	0.5	0.4	0.2
ρ_0	0	0.125	0.205	0.28	0.406
本文解	14.0	14.6	15.7	17.3	32.6
文献[3]解	15.0	16.0	18.0	21.0	36.0
误差	6%	9.5%	13%	18%	9%

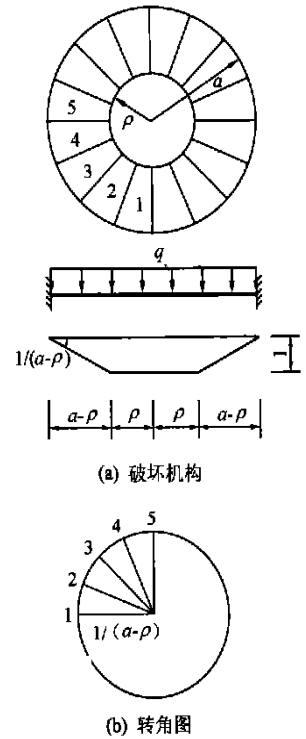


图 4 周边固定圆板

例 2 四边固定矩形板受均布载荷作用的极限载荷(图 5)

设固定矩形板长边长为 $2a$, 短边长为 $2b$, 设沿短边方向布置每米钢筋面积为 A_g' , 沿长边方向布置每米钢筋面积为 A_g'' , 则在单向应力状态下单位宽度的理论极限弯矩为 M_u' 和 M_u'' , 且 $M_u' = R_{gs}A_g'(2h - a)$, $M_u'' = R_{gs}A_g''(2h - a)$.

设固定端处的钢筋和板内同方向钢筋面积相等, 设四边简支矩形板的破坏机构如图 5(a), 设板中点虚位移为 1, 计算可知

(1) 中心区: 塑性铰线极限弯矩 $M_1 = \frac{4}{3} M_u'$, 其塑性内力功为

$$D_1 = \frac{16a(1 - \xi)}{3b} M_u'$$

(2) ②、③、④、⑤四根对角线的塑性铰线:

$$M_1 = \begin{cases} R_{gs}A_g' h \left(2 - \frac{a}{h} \right) = M_u', & \text{沿短边方向} \\ R_{gs}A_g'' h \left(2 - \frac{a}{h} \right) = M_u'', & \text{沿长边方向} \end{cases}$$

则塑性内力功为

$$D_2 = \frac{4\xi a}{b} M_u' + \frac{4b}{\xi a} M_u''$$

(3) ⑥、⑦、⑧、⑨四条边:

$$M_1 = -\frac{4}{3} R_{gs}A_g'' \frac{h_0}{h^2} = \frac{4}{3} M_u', \quad M_2 = -\frac{4}{3} R_{gs}A_g' \frac{h_0}{h^2} = \frac{4}{3} M_u'', \quad D_3 = \frac{8a}{3b} M_u' + \frac{8b}{3\xi a} M_u''$$

(4) 板屈服时其塑性外力功为

$$W = \left[2ab(1 - \xi) + \frac{4}{3} ab\xi \right] q = \frac{2}{3} ab(3 - \xi) q$$

根据 $W = D = D_1 + D_2 + D_3$, 有

$$q = \frac{M_u'}{b^2(1 - \xi/3)} \left[\left(\frac{16}{3} - \frac{2\xi}{3} \right) + \frac{14k}{3\xi\lambda^2} \right]$$

式中 $a/b = \lambda$, $\frac{M_u''}{M_u'} = k$.

由 $\frac{dq}{d\xi} = 0$, 可求得极限荷载 q (见表 2).

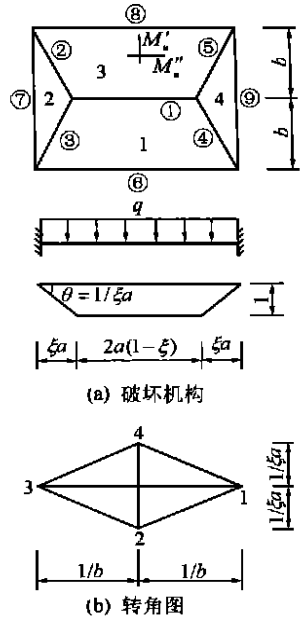


图 5 四边简支矩形板

表 2 四边固支矩形板受均布载荷作用的极限载荷比较

λ	1	1.2	1.4	1.6	1.8
k	1	0.8	0.6	0.4	0.2
ξ_0	1	0.567	0.784	0.443	0.43
本文解	14.0	11.75	10.0	7.68	6.036
文献[3]解	12.0	19.23	7.5	6.29	5.32
误差	14%	21%	25%	18%	12%

6 结论

(1) 利用本文公式计算, 其极限载荷比文献[3]的原理论计算极限载荷偏大, 大约偏大10%~20%, 这与多数实验结果更为吻合.

(2) 利用本文理论所确定的塑性铰线中的极限弯矩不是常数, 屈服条件不同, 其单位宽度的极限弯矩也不相同.

(3) 塑性铰线先从主弯矩最大的区域开始并发展, 这种假设更符合实际, 因此首先要判断板中内力的大致分布情况, 塑性铰线沿最大弯矩面发展.

(4) 若钢筋的布置方向不与主弯矩方向重合, 则可采用两方向钢筋在塑性铰线方向的投影面计算.

参 考 文 献

- 1 俞茂宏. 强度理论新体系. 西安: 西安交通大学出版社, 1992, 10~30
- 2 沈聚敏等. 钢筋混凝土有限元与板壳极限分析. 北京: 清华大学出版社, 1993
- 3 派克 R 根勃文 W L 著, 黄国祯, 成源华译. 钢筋混凝土板. 上海: 同济大学出版社, 1992
- 4 徐秉生, 刘信声. 结构塑性极限分析. 北京: 中国建筑工业出版社, 1985
- 5 陈家瑾, 范存新, 谢小明. 钢筋砼板极限分析的塑性铰线理论的改进. 苏州城建环保学院学报, 2001, (3): 29~35

LIMIT ANALYSIS OF THE PLASTIC HINGED LINES FOR THE REINFORCED CONCRETE PLATES USING THE TWIN SHEAR STRESS YIELD CRITERION

Fan Cunxin^{1,2} Chen Jiabin¹ Xie Xiaoming¹ Xue Songtao²

(¹ Department of Civil Engineering, Suzhou Institute of Science and Technology, Suzhou, 215011)

(² Research Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Tongji University, Shanghai, 200092)

Abstract A new theory of the plastic hinged lines for the limit load calculation of the reinforced concrete plates is established. Then the yield conditions of the reinforced concrete plates with bilateral layout are derived employing the twin shear stress yield criterion. The calculation result using this method are more accordant to the experiment result comparing with the previous theory.

Key words limit analysis, plastic hinged lines, twin shear stress yield criterion