

P_1 波入射准饱和土的波型转换问题

薛松涛^{1,2}, 陈诗慧¹, 陈榕¹, 孙晓亮³, 王远功¹

(1. 同济大学结构工程与防灾研究所, 上海 200092; 2. 日本近畿大学理工学部建筑学科, 日本大阪 577 8802;
3. 上海机电工业工程监理有限公司, 上海 200002)

摘要: 针对各向同性准饱和土中体波的传播问题, 本文深入研究了 P_1 波(第一纵波)入射土体时所出现的波型转换现象。在准饱和土波动方程的基础上, 通过数值算例, 找出标准参数土体模型的临界饱和度及波型转换角, 并分析土体孔隙率、渗流系数、水压力和入射波频率等参数对该现象的影响。

关键词: 准饱和土; P_1 波; 波型转换

中图分类号: TU435; O313 文献标识码: A 文章编号: 0254-0053(2005)01-128-6

Analysis on Wave Mode Conversion of Incident P_1 Wave in Nearly Saturated Soil

XUE Song tao^{1,2}, CHEN Shi hui¹, CHEN Rong¹, SUN Xiao liang³, WANG Yuan gong¹

(1. Research Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Tongji University, Shanghai 200092, China;
2. Department of Architecture School of Science and Engineering, Kinki University, Osaka 577 8802 Japan;
3. Shanghai Mechanical & Electrical Engineering Supervision Co. Ltd, Shanghai 200002, China)

Abstract: Based on the equation of wave propagation in nearly saturated soil, the study on phenomena of wave mode conversion of incident P_1 wave was carried out. With numerical simulation, the critical saturation degree was found and the parameters, such as porosity, coefficient of permeability, water pressure and frequency of incident wave were proved to have evident effects on the appearance of this conversion.

Key words: nearly saturated soil; P_1 wave (first longitudinal wave); wave mode conversion

自 Biot^[2] 创建饱和多孔介质波的传播理论至今, 国内外对多孔弹性介质波动问题的研究已经取得了很大的进步。而与饱和多孔介质不同, 准饱和土中饱和度等含水、含气量等变化会影响体波在准饱和土中的传播特性, 它的波动特性因此也受到了一定的关注。Bishop 也曾从本构关系方面提出了非饱和土的有效应力公式; 其后 Thigpen、Vardoulakis、陈军等也先后就非、准饱和土波动问题进行了分析研究。对于各向同性准饱和土而言, 由于存在三种体波, 因此在反射、折射过程中, P_1 、 P_2 、 SV 波间的耦合问题将变得更加复杂。陈军^[5] 在其研究发现, 当 P_1 波以一定角度入射某一饱和度土体时会发生特殊的波型转换, 即只生成反射 P_2 波和 SV 波, 而无反射 P_1 波的现象。本文将就此现象进行讨论分析, 并试图结合算例找出产生波型转换的临界饱和度以及土体各种参数对此现象的影响。

1 波动弥散方程

对于各向同性的准饱和土, 如果不计土颗粒的压缩性, 即 $\beta_s = \beta_p = \alpha = 0$, 准饱和土波动方程可以用

收稿日期: 2004 03 22

基金项目: 国家杰出青年科学基金(59925820)。

作者简介: 薛松涛(1963), 男, 上海市人, 博士, 博导, 教授。研究方向: 土动力学、结构健康监测等。

向量形式表示为:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda_c + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\alpha_2^*} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho_m \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mu}}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \quad (1a)$$

$$\frac{\alpha_1^* + n}{\alpha_2^*} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{\alpha_2^*} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) = \frac{\rho_f}{n} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{\rho_f \mathbf{g}}{k_f} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \quad (1b)$$

其中, \mathbf{u} —— 土骨架的位移矢量; $\mathbf{w} = n(\mathbf{u}^f - \mathbf{u}^s)$ —— 孔隙流体相对土骨架的位移; $\lambda_c = \lambda + \frac{\alpha_1^* + n}{\alpha_2^*}$;

$\rho_m = (1 - n)\rho_s + n\rho_f$; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为 Laplace 算子; $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ 为哈密顿算子;

$$\alpha_1^* = 1 - n; \quad \alpha_2^* = n\beta_f \left[1 + \frac{1 - S}{P\beta_f} \right]$$

式中 n 为孔隙率, S 为饱和度. 对 \mathbf{u}, \mathbf{w} 进行矢量分解, 需要引入标量势 φ_s, φ_f 和矢量势 ψ_s, ψ_f , 其中 s, f 分别表示固体部分和流体部分, 且假定矢量势满足 Lorentz 条件:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi_s + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_s; \quad \mathbf{w} = \nabla\varphi_f + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_f \quad (2)$$

因此, 将方程(1)进一步简化归纳可得:

$$[M] \{ \dot{\varphi} \} + [C] \{ \varphi \} - [K_P] [L] \{ \varphi \} = 0; \quad [M] \{ \dot{\boldsymbol{\psi}} \} + [C] \{ \boldsymbol{\psi} \} - [K_S] [L] \{ \boldsymbol{\psi} \} = 0 \quad (3)$$

其中: $[M] = \begin{bmatrix} \rho_m & \rho_f \\ \rho_f & n \end{bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_f \mathbf{g}}{k_f} \end{bmatrix}; [K_P] = \begin{bmatrix} \lambda_c + 2\mu & \frac{1}{\alpha_2^*} \\ \frac{\alpha_1^* + n}{\alpha_2^*} & \frac{1}{\alpha_2^*} \end{bmatrix}; [K_S] = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$

$$[L] = \begin{bmatrix} \nabla^2 & \\ & \nabla^2 \end{bmatrix}; \{ \varphi \} = [\varphi_s \quad \varphi_f]^T; \{ \boldsymbol{\psi} \} = [\boldsymbol{\psi}_s \quad \boldsymbol{\psi}_f]^T$$

2 反射系数

对于平面应变的平面简谐波有一般解:

$$\varphi = \begin{Bmatrix} \varphi_s \\ \varphi_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_s \exp[i(\omega t - \mathbf{l}_p \cdot \mathbf{r})] \\ A_f \exp[i(\omega t - \mathbf{l}_p \cdot \mathbf{r})] \end{Bmatrix} \quad (4a)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\psi}_s \\ \boldsymbol{\psi}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_s \exp[i(\omega t - \mathbf{l}_s \cdot \mathbf{r})] \\ B_f \exp[i(\omega t - \mathbf{l}_s \cdot \mathbf{r})] \end{Bmatrix} \quad (4b)$$

其中 $\mathbf{l}_p, \mathbf{l}_s$ 是平面 P 波和平面 SV 波的波矢量, \mathbf{r} 为位置矢量. 将其代入(3)式, 得到:

$$\begin{bmatrix} -\rho_m \omega^2 + (\lambda_c + 2\mu) l_p^2 & -\rho_f \omega^2 + \frac{1}{\alpha_2^*} l_p^2 \\ -\rho_f \omega^2 + \frac{\alpha_1^* + n}{\alpha_2^*} l_p^2 & -\frac{\rho_f}{n} \omega^2 + i \frac{\rho_f \mathbf{g}}{k_f} \omega + \frac{1}{\alpha_2^*} l_p^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_s \\ A_f \end{Bmatrix} = 0 \quad (5a)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho_m \omega^2 + \mu l_s^2 & -\rho_f \omega^2 \\ -\rho_f \omega^2 & -\frac{\rho_f}{n} \omega^2 + i \frac{\rho_f \mathbf{g}}{k_f} \omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_s \\ B_f \end{Bmatrix} = 0 \quad (5b)$$

要使其有非零解, 行列式值必须为 0, 则可得平面 P 波和 S 波各自的弥散方程:

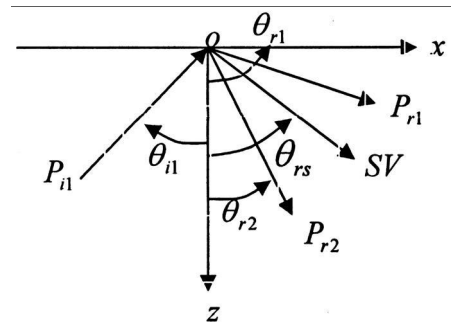


Fig. 1 Reflection of P_1 wave at the surface of nearly saturated soil

$$A \left(\frac{l_p}{\omega} \right)^4 + B \left(\frac{l_p}{\omega} \right)^2 + C = 0; \quad D \left(\frac{l_s}{\omega} \right)^2 + C = 0 \quad (6)$$

式中: l_1, l_2, l_s 分别代表 P_1 波、 P_2 波和 SV 波的波矢量的值, 即波数。

$$A = (\lambda_c + 2\mu) \frac{1}{\alpha_2^*}; \quad B = (\lambda_c + 2\mu) \left[-\frac{\rho_f}{n} + i \frac{\rho_f g}{k_f \omega} \right] - \rho_m \frac{1}{\alpha_2^*} + \rho_f \frac{\alpha_1^* + n + 1}{\alpha_2^*};$$

$$C = \rho_m \left[\frac{\rho_f}{n} - i \frac{\rho_f g}{k_f \omega} \right] - \rho_f^2; \quad D = -\mu \left[\frac{\rho_f}{n} - i \frac{\rho_f g}{k_f \omega} \right];$$

这样求出 l_p, l_s 后, 进一步利用式(5)可得流、固体标量、矢量各自的势函数幅值之比为:

$$m_{P_1} = \frac{A_{f1}}{A_{s1}} = \frac{\rho_m \omega^2 - (\lambda_c + 2\mu) l_1^2}{\frac{1}{\alpha_2^*} l_1^2 - \rho_f \omega^2}; \quad m_{P_2} = \frac{A_{f2}}{A_{s2}} = \frac{\rho_m \omega^2 - (\lambda_c + 2\mu) l_2^2}{\frac{1}{\alpha_2^*} l_2^2 - \rho_f \omega^2}; \quad m_s = \frac{B_f}{B_s} = \frac{\mu l_s^2 - \rho_m \omega^2}{\rho_f \omega^2}$$

当一频率为 ω 的平面 P_1 波以某一任意角度入射到一准饱和土弹性半空间表面时, 将形成三种反射波: P_1 波、 P_2 波和 SV 波。各形态波的势函数如下:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{is} &= A_{i1} \exp[i(\omega t - l_{ix} \cdot x + l_{iz} \cdot z)] \\ \varphi_{if} &= m_1 A_{i1} \exp[i(\omega t - l_{ix} \cdot x + l_{iz} \cdot z)] \\ \varphi_{ns} &= A_{r1} \exp[i(\omega t - l_{ix} \cdot x - l_{iz} \cdot z)] \\ \varphi_{r1f} &= m_1 A_{r1} \exp[i(\omega t - l_{ix} \cdot x - l_{iz} \cdot z)] \\ \varphi_{r2s} &= A_{r2} \exp[i(\omega t - l_{r2x} \cdot x - l_{r2z} \cdot z)] \\ \varphi_{r2f} &= m_2 A_{r2} \exp[i(\omega t - l_{r2x} \cdot x - l_{r2z} \cdot z)] \\ \psi_{ns} &= B_{rs} \exp[i(\omega t - l_{rsx} \cdot x - l_{rsz} \cdot z)] \\ \psi_{if} &= m_s B_{rs} \exp[i(\omega t - l_{rsx} \cdot x - l_{rsz} \cdot z)] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这里的下标 i, r 分别代表入射与反射波。各波矢量间有如下关系:

$$l_{ix}^2 + l_{iz}^2 = l_{i1}^2, \quad l_{rx}^2 + l_{rz}^2 = l_{r1}^2, \quad l_{r2x}^2 + l_{r2z}^2 = l_{r2}^2, \quad l_{rsx}^2 + l_{rsz}^2 = l_{rs}^2$$

由 Snell 定理可得: 界面处各模式波 x 方向的波矢量值相等, 记为: $l_{ix} = l_{rx} = l_{r2x} = l_{rsx} = l$,

$$R_1 = \frac{A_{r1}}{A_{i1}}, \quad R_2 = \frac{A_{r2}}{A_{i1}}, \quad R_s = \frac{A_{rs}}{A_{i1}} \text{ 分别为 } P_1, P_2, SV \text{ 波土骨架部分势函数的反射系数。}$$

3 边界条件的引入

对于该问题, 在 $z=0$ 的半空间表面有边界条件:

$$\sigma_z(x, z)|_{z=0} = 0; \quad \tau_{xz}(x, z)|_{z=0} = 0 \quad (8)$$

$$\text{若假设界面透水, 还可判断准饱和土界面处孔隙流体压力为 } 0, \text{ 即: } P^f|_{z=0} = 0 \quad (9)$$

$$\text{对各向同性准饱和土, 由 Bishop 的有效应力公式: } \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - P \delta_{ij} \quad (10)$$

和土体波动方程可将应力-位移关系表示为

$$\sigma_z = 2\mu u_{z,z} + \lambda(u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z}) - P \quad (11a)$$

$$\tau_{xz} = 2\mu u_{x,z} \quad (11b)$$

$$\alpha_1^* u_{i,i} + n u_{i,i}^f + \alpha_2^* P = 0 \quad (11c)$$

同时, 土骨架位移与流体相对土骨架位移与各个势函数间有如下关系:

$$u_x = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} - \frac{\partial \psi_s}{\partial z}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} + \frac{\partial \psi_s}{\partial x}; \quad w_x = \frac{\partial \varphi_f}{\partial x} - \frac{\partial \psi_f}{\partial z}; \quad w_z = \frac{\partial \varphi_f}{\partial z} + \frac{\partial \psi_f}{\partial x} \quad (12)$$

将它们都代入 (11) 式可得到与总正应力 σ_z 、总剪应力 τ_{xz} 、和流体压力 P 的关系式:

$$\sigma_z = \left[\lambda + \frac{\alpha_1^* + n}{\alpha_2^*} \right] \nabla^2 \varphi_s + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x \partial z} \right] + \frac{1}{\alpha_2^*} \nabla^2 \varphi_f \tag{13a}$$

$$\tau_{xz} = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial z^2} \right] \tag{13b}$$

$$P = -\frac{1}{\alpha_2^*} [(\alpha_1^* + n) \nabla^2 \varphi_s + \nabla^2 \varphi_f] \tag{13c}$$

再结合边界条件(8)、(9)式, 便可得到方程组:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ P \end{Bmatrix} = [B]_{3 \times 4} \begin{Bmatrix} A_{i1} \\ A_{r1} \\ A_{r2} \\ B_{rs} \end{Bmatrix} = 0 \tag{14}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 2\mu^2 - \left[\lambda_c + 2\mu + \frac{m_1}{\alpha_2^*} \right] l_{il}^2 & 2\mu^2 - \left[\lambda_c + 2\mu + \frac{m_1}{\alpha_2^*} \right] l_{il}^2 & 2\mu^2 - \left[\lambda_c + 2\mu + \frac{m_2}{\alpha_2^*} \right] l_{r2}^2 & -2\mu \cdot l_{rsz} \\ 2\mu \cdot l_{ilz} & -2\mu \cdot l_{ilz} & -2\mu \cdot l_{r2z} & \mu(l_{rsz}^2 - l^2) \\ \frac{\alpha_1^* + n + m_1}{\alpha_2^*} l_{i1}^2 & \frac{\alpha_1^* + n + m_1}{\alpha_2^*} l_{i1}^2 & \frac{\alpha_1^* + n + m_2}{\alpha_2^*} l_{r2}^2 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $A_{i1} = 1$, 则得到: $[B]_{3 \times 4} \begin{Bmatrix} 1 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_s \end{Bmatrix} = 0$ (15)

解线性方程组(15), 即可得 R_1, R_2, R_s 。

4 算例分析

如前所述, 前人的研究表明, 当 P_1 波以某角度在准饱和土界面处传播时, P_1 波的反射系数会出现零值, 即反射 P_1 波消失, 只存在反射 P_2 波和反射 SV 波。我们称之为波型转换现象。但随着土体饱和度的增大, 这种现象会逐渐消失。因此作者认为对于该准饱和土体存在一个临界饱和度, 即当土体饱和度 S 小于或等于临界饱和度时, 在一定参数影响下会出现波型转换现象; 而当 S 大于临界饱和度时便不存在该现象, P_1 波反射系数曲线无零值点。而在临界状态下, 出现该现象的入射角就称为波型转换角。为了证实这一点, 找出产生该特殊现象的临界饱和度及波型转换角, 作者将结合具体的准饱和土体数值模型, 通过算例来对 P_1 波的反射系数 R_{r1} 进行深入的讨论, 这里定义 R_{r1} 为土体在临界饱和度时的反射系数。其中土体模型的各种标准参数见表 1。

表 1 算例参数
Tab. 1 parameters

土体密度 ρ	水密度 ρ_f	土颗粒密度 ρ_s	水的压缩参数 $1/\beta_f$	土颗粒压缩参数 $1/\beta_s$	泊松比 ν
2155(kg/m ³)	1000(kg/m ³)	2925(kg/m ³)	2.134(GPa)	0.1556(GPa)	0.25
孔隙率 n	静水压 P	入射频率 ω	渗透系数 k_f		
0.4	0.1(MPa)	100(Hz)	0.01(m/s)		

图 2 是有关标准准饱和土模型中 P_1 波反射系数 R_{r1} 的一组曲线(入射 P_1 波频率为 100Hz, 土体孔隙率为 0.4, 渗透系数为 0.01m/s, 静水压力为 0.1MPa)。首先, 研究了两个具有代表性的情况(饱和度 $S =$

0.99 和 0.90)。图中可以看出,当 $S = 0.99$ 时,对于任何入射角度,反射 P_1 波始终存在;而对于 $S = 0.90$ 的标准准饱和土模型, P_1 反射系数在入射角 $= 62^\circ$ 和 80° 时为零,曲线出现跳跃。然后在此区间 $(0.90, 0.99)$ 内调整并缩短步长,经过多次计算最终得出:当土体饱和度等于 0.955 时,在入射角 67° 处开始出现波型转换现象,并证实随着 S 的增大, R_{r1} 逐渐增大,该现象逐渐消失。因此可得出结论:0.955 就是标准准饱和土模型的临界饱和度,波型转换角为 67° 。

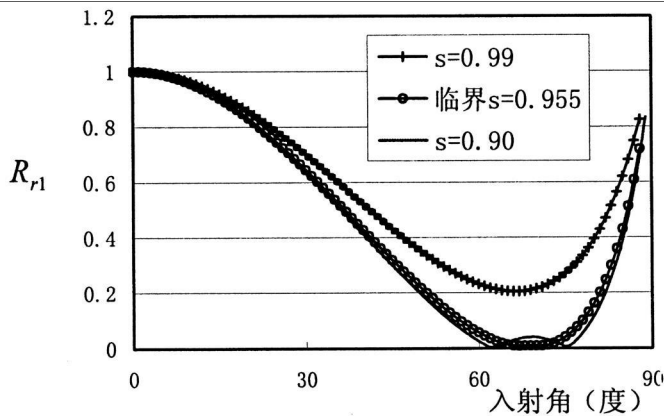


图 2 标准参数情况下波型转换现象

ig 2 Curves of reflection coefficients in standard condition

为进一步研究其他土体参数对波型转换现象可能产生的影响。本文先后调整了算例中入射 P_1 波频率、孔隙率、静水压力以及渗透系数进行分析,算例结果列表如下:

表 2 算例结果

Tab. 2 Numerical outcome

	$\omega = 100\text{Hz}$	$\omega = 200\text{Hz}$	$\omega = 300\text{Hz}$	$n = 0.2$	$n = 0.4$	$n = 0.6$
临界饱和度	0.955	0.957	0.961	0.915	0.955	0.970
波型转换角(度)	67	66	65	67	67	67
	$k_f = 0.001\text{m/s}$	$k_f = 0.005\text{m/s}$	$k_f = 0.01\text{m/s}$	$P = 0.1\text{MPa}$	$P = 0.15\text{MPa}$	$P = 0.2\text{MPa}$
临界饱和度	0.956	0.955	0.955	0.955	0.932	0.910
波型转换角(度)	69	68	67	67	67	67

通过对比,我们可以发现:孔隙率和静水压力对出现波型转换现象的临界饱和度影响较大,临界饱和度和度值将随着孔隙率的增大而增大,随着静水压力的增大而减小;而波型转换角的值则对入射波频率以及渗流系数的变化比较敏感,频率的增大或渗透系数的减小都会使波型转换角相应减小。

5 结语

本章在各向同性准饱和土的波动方程的基础上,通过具体的数值算例详细研究 P_1 波入射准饱和土时出现的波型转换现象。并得出以下结论:

1. 当 P_1 波入射准饱和土体时,都能找到一个临界饱和度值。当土体饱和度小于或等于该值时,以波型转换角入射的 P_1 波会在反射过程中出现波型转换现象,无 P_1 波反射;而当土体饱和度大于该值时, P_1 波以任何角度入射都不会出现波型转换现象。标准参数准饱和土体的临界饱和度为 0.955。

2. 土体孔隙率、渗流系数、静水压力和入射波频率等参数也会对临界饱和度和波型转换角产生一定的影响:孔隙率和静水压力的增大会使土体临界饱和度增大;而入射波频率与渗流系数的增大会使波型转换角变小。

参考文献:

[1] Achenbach J D. Wave Propagation in Elastic Solid M. North Holland Publishing Company, Amsterdam, The Netherlands, 1973.

- [2] Biot M A. Theory of propagation of elastic wave in a fluid saturated porous solid. I. Low frequency range [J] . J. Acoust. Soc. Amer. 1956, 28, 168 ~ 178. .
- [3] Thigpen L, Berryman J G. Mechanics of porous materials containing multiphase fluid [J] . Int. J. Engng. Sci., 1985, 23(1): 1203 ~ 1242.
- [4] Vardoulakis I, Beskos D E. Dynamic behavior of nearly saturated porous media [J] . Mechanics of Materials, 1986 5, 87 ~ 108.
- [5] 陈军. 波在非饱和土及准饱和土中的传播 [D] . 同济大学硕士学位论文, 2000.
- [6] 吴世明. 土介质中的波 [M] . 北京: 科学出版社, 1997.