

## 利用线性模型估计的传感器优化布置算法\*

谢 强<sup>1</sup> 薛松涛<sup>1,2</sup> 王远功<sup>1</sup>( <sup>1</sup> 同济大学土木工程学院, 上海, 200092) ( <sup>2</sup> 日本近畿大学工学部建筑学科, 日本大板 )

**摘 要** 提出了一种基于线性模型估计的传感器布置算法. 首先根据线性模型估计理论, 将待监测的目标模态振型视为线性模型的设计矩阵; 然后利用奇异值分解的算法, 将设计矩阵分解, 根据分解的前几个左奇异向量来计算各个自由度对于目标模态振型的贡献; 用迭代算法来求出最优的传感器布置方案; 最后, 用两个算例表明该方法的有效性.

**关键词** 结构健康监测, 最优传感器布置, 线性模型估计, 奇异值分解

## 0 引言

较早研究传感器最优布置问题是在航天器的动态控制及系统识别领域<sup>[1,2]</sup>. 一种经验的传感器布置方法是模态动能法<sup>[3]</sup>, 它是将传感器布置在模态动能较大的位置. Kanmer在对大型空间结构传感器布置研究中提出了一种有效独立法<sup>[4]</sup>. 该法首先根据对目标模态分量线性独立性的贡献进行传感器位置排序, 贡献小的传感器布点首先被剔除, 依次迭代, 从而在实验数据中采集到最大的模态反应信息. Udwardia<sup>[1]</sup>基于 Fisher信息阵, 提出了一种适合线性和非线性系统的传感器最优布置的算法. Guyan减缩法也是一种常用的测点选择方法<sup>[5]</sup>, 它利用逐次迭代, 把那些对模态反应起主要作用的主坐标保留下来作为测点的布置.

本文首先根据线性模型估计理论, 将待监测的目标模态振型视为线性模型的设计矩阵, 利用奇异值分解的算法, 将设计矩阵分解, 然后根据各个自由度对于目标模态振型的贡献, 进行传感器优化布置方案的设计.

## 1 线性模型参数估计理论

一般地, 称模型

$$\begin{cases} Y = X\beta + e \\ E[e] = 0, \text{Var}[e] = E[ee^T] = \sigma^2 I_n \end{cases} \quad (1)$$

为线性统计模型, 简称为线性模型.

其中  $n$  维向量  $Y$  称为观测向量, 称已知矩阵  $X_{n \times p}$  为模型的设计矩阵.  $\beta$  为  $p$  维未知参数向量,  $e$  为  $n$  维随机误差向量, 其均值为  $E[e] = 0$  协方差阵为  $\sigma^2 I_n$ .

## 1.1 线性高斯量测模型与 Fisher信息阵

设未知量  $\beta$  与数据  $Y$  之间的关系, 用线性高斯量测模型

$$Y = X\beta + e \quad (2)$$

式中  $\beta \sim N(E\beta, P_\beta)$ ,  $e \sim N(0, R)$  为零均值量测噪声, 设计矩阵  $X$  已知,  $R$  为协方差矩阵.

$\beta$  的最佳估计为<sup>[6]</sup>

$$\hat{\beta} = (X^T R^{-1} X)^{-1} X^T R^{-1} Y \quad (3)$$

估计误差为

$$\beta - \hat{\beta} = - (X^T R^{-1} X)^{-1} X^T R^{-1} e$$

取估计误差的期望

$$E(\beta - \hat{\beta}) = - (X^T R^{-1} X)^{-1} X^T R^{-1} E(e) = 0 \quad (4)$$

因此, 对于线性高斯情况来说, 极大似然估计是无偏的. 即有  $\beta$  估计的误差协方差

$$P_\beta = (X^T R^{-1} X)^{-1} \quad (5)$$

可以看出误差协方差  $P_\beta$  与量测量  $Y$  是无关的, 因此可以在未取到任何量测量时检验模型精度是否满足要求.

为了检查极大似然估计的性能, 可以利用任意无偏估计方差的下界.

如果  $\hat{\beta}$  是基于量测量  $Y$  的确定性变量  $\beta$  的任意无偏估计, 则估计误差  $\beta - \hat{\beta}$  的协方差是有下界的, 即

\* 国家自然科学基金 (50508026) 资助.

2005-01-20 收到第 1 稿, 2005-11-04 收到修改稿.

$$P_{\beta} \geq M_{\theta}^{-1} \quad (6)$$

式 (6) 即为 Cramer Rao 界式, 其中  $M_{\theta}$  即为 Fisher 信息阵。

如果  $\hat{\beta}$  满足 Cramer Rao 界式中的等号关系, 则估计  $\hat{\beta}$  是有效的。

对于线性高斯量测模型, 可以证明<sup>[6]</sup>

$$M_{\theta} = X^T R^{-1} X = P_{\beta}^{-1} \quad (7)$$

这表明, Fisher 信息阵是误差协方差矩阵的逆矩阵。

由以上分析可以得出: 如果  $\hat{\beta}$  是  $\beta$  的有效无偏估计, 则误差协方差达到最小, 从而是  $\beta$  的最佳估计。

### 1.2 平方和分解<sup>[7]</sup>

考虑到线性模型,  $\hat{e} = Y - X\hat{\beta}$ , 有  $Y = X\hat{\beta} + \hat{e}$

$$YY^T = (X\hat{\beta} + \hat{e})^T (X\hat{\beta} + \hat{e}) = \hat{\beta}^T X^T X \hat{\beta} + \hat{\beta}^T X^T \hat{e} + \hat{e}^T X \hat{\beta} + \hat{e}^T \hat{e}$$

故

$$Y^T Y = (X\hat{\beta})^T (X\hat{\beta}) + \hat{e}^T \hat{e} \quad (8)$$

$$Y^T Y = \|X\hat{\beta}\|^2 + \|\hat{e}\|^2 \quad (9)$$

记此式  $SST = Y^T Y$  为整个平方和;

$SSR = \|X\hat{\beta}\|^2$  为基于回归的平方和;

$SSE = \|\hat{e}\|^2$  为基于残差的平方和。

记  $R^2 = \|X\hat{\beta}\|^2 / (Y^T Y) = SSR / SST = 1 - SSE / SST = 1 - \hat{e}^T \hat{e} / Y^T Y$ , 其中  $R^2$  为复相关系数, 它表示了各个  $x_i \hat{\beta}_i$  对总的平方和的贡献大小。

### 1.3 关于设计矩阵 $X$ 的讨论<sup>[8]</sup>

设计矩阵  $X$  为正交矩阵, 是  $X$  的“最优选择”。如果  $X$  不是列满秩, 即是说  $\text{rank}(X) = r < p$  此时, 通常的  $\beta$  的最小二乘估计不存在, 但是存在  $\beta$  的线性函数  $L\beta$ ,  $L$  为  $r \times p$  矩阵, 可以使  $L\beta$  的最小二乘估计是存在的。这就需对原线性模型重新进行参数化, 重新参数化可以通过对矩阵  $X$  的奇异值分解来实现。

## 2 奇异值分解的算法

### 2.1 设计矩阵的奇异值分解

将设计矩阵  $X$  进行奇异值分解

$$X = H\Lambda^{1/2}G^T \quad (10)$$

在进行  $X$  的奇异值分解之后,  $\beta$  的估计可改写为

$$\hat{\beta}_{LS} = (X^T X)^{-1} X^T Y = G\Lambda^{-1} H^T Y \quad (11)$$

而  $\text{Var}[\hat{\beta}_{LS}] = \sigma^2 (X^T X)^{-1} = \sigma^2 G\Lambda^{-1} G^T$

$$\text{Var}[\hat{\beta}_{LS}] = \sigma^2 \sum_{i=1}^p \frac{g_i g_i^T}{\lambda_i^2} \quad (12)$$

$g_i$  表示正交阵  $G$  的第  $i$  列向量。

将原设计矩阵  $X$  的奇异值分解代入原线性模型  $Y = X\beta + e$

$$Y = H\Lambda^{1/2}G^T\beta + e \quad (13)$$

令  $\Lambda^{1/2}G^T\beta = \alpha$ , 则有新的线性模型

$$Y = H\alpha + e \quad (14)$$

其中新的设计矩阵  $H$  为列满秩。由于  $H^T H = I$ , 其各列  $(h_1, \dots, h_p)$  是正交的, 以  $h_1, \dots, h_p$  作为  $X$  的主坐标, 则  $Y$  与  $X$  的第  $i$  个主坐标之间的相关系数为

$$R_{YQ_i} = \frac{h_i Y}{(Y^T Y)^{1/2}} \quad (15)$$

其中  $(Y^T Y)^{1/2} = \|Y\|$  为  $Y$  的欧氏长度, 此时

$$SSR = Y^T X (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (16)$$

由于  $X = H\Lambda^{1/2}G^T$ ,  $G^T G = I$ ,  $H^T H = I$

$$SSR = Y^T X \hat{\beta}_{LS} = Y^T H H^T Y \quad (17)$$

其中  $H H^T$  为  $n \times n$  阵, 它并非单位阵, 故有

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{Y^T H H^T Y}{Y^T Y} = \sum_{i=1}^n Y^T h_i h_i^T Y / \|Y\|^2 \quad (18)$$

此处  $h_i$  为  $H$  的第  $i$  行向量。

由此可知:  $X$  的奇异值分解导致了  $R^2$  分解为几个分量之和, 每个分量代表  $H$  矩阵的行对于总体  $R$  的贡献。根据  $H H^T$  的对角元素的大小, 可以衡量每个行向量对复相关系数  $R^2$  的贡献。如果某一值很小, 表示对应的行贡献很小, 可以首先删除。

### 2.2 利用线性模型估计的传感器优化布置算法步骤<sup>[7]</sup>

利用线性模型估计进行传感器布置方案的设计的具体计算步骤如下:

(1) 首先确定需要监测的  $p$  个振型所组成的目标模态矩阵  $\phi_{r \times p}$ ;

(2) 用奇异值分解对目标模态  $\phi_{r \times p}$  进行处理, 提取非零奇异值所对应的  $n$  个左奇异向量加以分析, 这  $n$  个向量组成的矩阵  $H$  的每一行代表每一个候选自由度对于总体  $R$  的贡献;

(3) 计算左奇异向量的  $H H^T$ , 根据对角线元素的大小, 将最小对角元素所在的行删除;

(4) 重复以上计算过程, 每次删除一个自由度, 直到保留需要的传感器数目。

## 3 传感器优化布置的算例分析

### 3.1 等刚度分布钢框架

15 层 2 跨钢结构框架, 柱刚度沿楼层高度均匀无变化, 层高均为 3.9 m, 跨度 6.10 m, 梁上荷载为 3.120 kg/m, 梁设计为近似刚性, 柱参数同表 1。

表 1 15层 2跨等刚度分布钢框架的柱参数

构件	型号	截面面积 $m^2$	惯性矩 $m^4$	密度 $kg \cdot m^{-3}$	弹性模量 $Pa$
柱	W 24×192	0.036 445	0.002 477 41	7 800	$2.1 \times 10^{11}$

应用本文给出的基于线性模型估计的传感器优化布置算法,选取前六阶模态为目标模态,计算所得的传感器优化布置结果如表 2 传感器布置分布如图 1(a)所示.

表 2 选取前六阶模态的传感器优化布置计算结果

测点优化布置的选择方向(自左向右)											
14	32	44	62	74	92	26	80	50	93	15	61

续表 2

测点优化布置的选择方向(自左向右)											
45	31	81	91	13	63	75	43				

表 3 15层 2跨变刚度钢框架结构的柱参数

构件	型号	截面面积 $m^2$	惯性矩 $m^4$	密度 $kg \cdot m^{-3}$	弹性模量 $Pa$
柱(1~5)	W 24×192	0.036 445	0.002 477 41	7 800	$2.1 \times 10^{11}$
柱(6~10)	W 24×117	0.022 213	0.001 473 46	7 800	$2.1 \times 10^{11}$
柱(11~15)	W 24×62	0.011 742	0.000 645 16	7 800	$2.1 \times 10^{11}$

应用本文给出的基于线性模型估计的传感器优化布置算法,选取前六阶模态为目标模态,计算所得的传感器优化布置结果如表 4 传感器布置分布如图 1(b)所示.

表 4 选取前六阶模态时的传感器布置计算结果

测点优化布置的选择方向(自左向右)											
92	80	68	56	38	20	91	55	81	69	21	39

续表 4

测点优化布置的选择方向(自左向右)											
93	57	79	67	19	37	74	44				

表 4 中所示的传感器的选择顺序的说明同表 2

在图 1 中,小黑点表示结构分析时的节点.实黑三角形表示首先要选择的 12 个传感器的布置位置.小圆圈表示从第 13 到第 20 个传感器的布置位置,

表 2 给出了等刚度钢框架传感器布置的计算结果.从左向右依次给出了传感器位置的选择顺序.如果只有 6 个传感器,则应该布置在第 14 32 44 62 74 92 位置处.如果有更多的传感器可用,则根据选定的顺序进行位置的选择.比如,如果已经有了 12 个传感器,对于后续的位置选择顺序,依照计算结果,分别为 45 31 81 等等.

### 3.2 变刚度分布钢框架

选取 15 层 2 跨钢结构框架为分析对象.柱刚度沿楼层高度变化,层高均为 3.90m,跨度 6.10m.梁上荷载为 3.120 kg/m,梁设计为近似刚性.柱参数如表 3 所示.

圆圈内的数字表示后续的 8 个传感器依次布置的选择顺序.

如果将结构根据刚度的分布划分为三个层次,即:1~5 层为第一层次,6~10 层为第二层次,11~15 层为第三层次,两种结构在选用 20 个传感器时的整体分布对比见表 5

表 5 选择前六阶模态时不同结构系统传感器数量分布情况

楼层层次	等刚度结构系统	变刚度结构系统
第一层次(1~5层)	6个	3个
第二层次(6~10层)	7个	7个
第三层次(11~15层)	7个	10个

对比表 5 可以看出:两者在相同传感器数量的情况下,一个重要的差别是:等刚度结构的传感器布置沿高度分布比较均匀;对于刚度沿楼层高度变化

的结构, 其传感器布置偏向于刚度较小的区域, 即传感器布置的密集度有趋向于刚度较小区域的特点. 常规模态测试时的传感器经验布置方法的趋势与本

文的计算结果是相同的. 但是, 本文的方法给出了传感器布置的具体位置和选择的顺序.

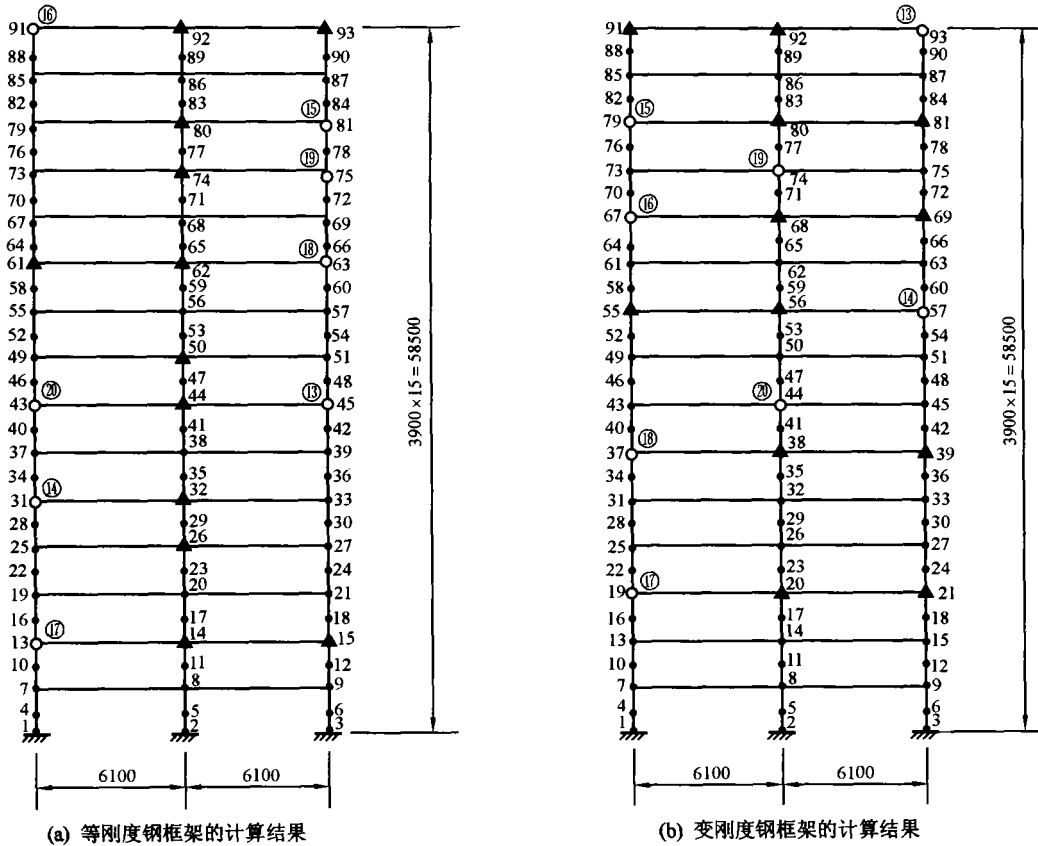


图 1 不同刚度分布时传感器布置的分布

#### 4 结论

本文提出的基于线性模型估计的传感器布置算法主要有以下优点:

- (1) 基于线性模型估计理论, 采用奇异值分解算法, 矩阵运算时, 稳定性非常好, 避免了在振型接近线性相关情况下有效独立算法的奇异性问题;
- (2) 用本文提出的基于线性模型估计的方法与有效独立法相比较, 数学和物理概念明确, 计算更加简洁.
- (3) 对于质量和刚度分布比较均匀的结构系统, 对于目标模态中不可测自由度的删除更加容易造成目标模态矩阵近似的线性相关, 本文提出的算法就显示出更大的优越性.

#### 参 考 文 献

- 1 Udawadia F E. Methodology for optimum sensor locations for parameter identification in dynamic systems. *Journal of Engineering Mechanics*. ASCE, 1994, 120(2): 368~390
- 2 Lim K B. Method for optimal actuator and sensor placement for large flexible structures. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. January/February 1992, 15(1): 49~57
- 3 Chung Y, Moore D. On orbit sensor placement and system identification of space station with limited instrumentations. *Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference*. Union College press, Schenectady, NY, 1993: 41~46
- 4 Kanmer D C. Sensor placement for on orbit modal identification and correlation of large space structures. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1991, 14(2): 251~259
- 5 Guyan R J. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 1965, 3(2): 23~29
- 6 卢伯英, 陈宗基. 线性估计与随机控制. 北京: 国防工业出版社, 1990

- 7 谢强. 建筑结构健康监测若干基础问题的试验研究及分析. 同济大学博士学位论文, 2001
- 8 张金槐. 线性模型参数估计及其改进. 长沙: 国防科技大学出版社, 1992

## OPTIMAL SENSOR LOCATION ALGORITHM USING LINEAR MODEL ESTIMATE

Xie Qiang<sup>1</sup>    Xue Songtao<sup>1,2</sup>    Wang Yuangong<sup>1</sup>  
(<sup>1</sup>*School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092*)  
(<sup>2</sup>*Department of Architecture, Kinki University, Osaka, Japan*)

**Abstract** Problems of how to determine the necessary number and the optimal locations of the sensors become imperative for structural health monitoring. This paper is to present a method for searching optimal number and locations of sensors for building damage detection. Based on linear model estimate theory, target modes are considered as design matrix of linear model in the method. Then, singular value decomposition is used to decompose the target modes. The first several left singular vectors are used to calculate the contribution of each sensor candidate. At last, an iterative method is used to choose the last set of optimal sensor locations. Two illustrations clearly show that the method is applicable to building structures.

**Key words** structural health monitoring, optimal sensor location, linear model estimate, singular value decomposition