

受损混凝土梁段中非均匀刚度的损伤反演

张伟¹, 罗松南², 陈 镨¹, 薛松涛^{1,3}

(1 同济大学结构工程与防灾研究所, 上海 200092 2 湖南大学力学与航空航天学院, 湖南 长沙 410082

3 近畿大学理工学部建筑学科, 日本 大阪 577-8502)

[摘要] 利用波传播理论, 建立损伤介质的一维波动方程及反问题分析理论. 采用脉冲谱技术并结合正则化思想, 针对几种典型损伤模型, 在瞬态波场中对损伤进行了反演的数值模拟计算, 比较了是否考虑损伤度不为负值的先验信息的反演结果, 得出考虑先验信息会使反演结果得到显著改进. 数值模拟得到了与真值较为吻合的损伤度及其分布的反演结果.

[关键词] 损伤; 瞬态波场; 反演

[中图分类号] O 347.4 TU 112.7 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1008-3804(2007)01-0016-05

0 引言

在长期的负荷作用下, 工程结构中均不可避免地存在各种各样的损伤, 这些损伤将严重影响结构的安全性. 为了防止结构在工作状态下突然失效而发生灾难, 早期利用无损检测发现结构中的缺陷, 可对结构进行安全和使用寿命评估, 这在工程中越来越引起重视^[1].

由于超声波在传播过程中具有较强的指向性, 并携带其传播过程中介质变化的各种信息, 因此本文根据介质中的波传播理论^[2], 结合具代表性的 PST (脉冲谱技术)^[3-4]反演混凝土介质中的损伤, 模拟超声波局部无损检测, 同时利用以 Tikhonov 正则化思想为基础的 TSVD (截断的奇异值分解) 方法^[5-9]处理反问题的不适定^[7], 考虑了损伤度不为负值的先验信息, 针对损伤度呈二次曲线变化, 突变等典型的损伤模型, 进行了数值反演, 得出了与真实值较为吻合的损伤分布, 为工程应用提供依据.

1 数学模型

文献 [8] 由于受反演方程中边界条件所限采用了对测模型, 利用瞬态波场反演了混凝土梁沿横向方向 (图 1 中的 y 方向) 的弹性模量损伤分布, 然而在工程实际中大多数需要采用同侧检测, 检测的是弹性模量损伤沿梁纵向的分布状态. 本文所考虑的模型如图 1 所示: MN 为一混凝土介质梁, 假设在平均波速法测试后初步确定 MN 段为损伤段, 进而通过本文方法确定 MN 段内部沿纵向 (即图 1 中 x 方

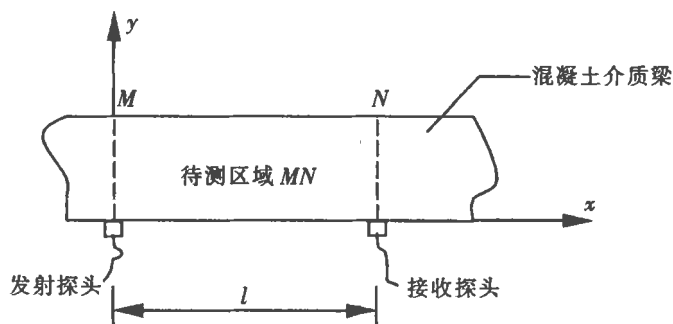


图 1 工程实例模型

Fig.1 Model of engineering sample

[收稿日期] 2007-01-05

修回日期: 2007-02-25

[基金项目] 教育部科学技术研究重点项目 (104137); 湖南省自然科学基金项目 (03JJY3008)

[作者简介] 张伟 (1976-), 男, 福建福清人, 助教, 博士研究生, 从事结构工程研究.

向) 上的非均匀损伤分布.

设 MN 区间为待测区域, 长度为 l 图 1 中所示的待测区域两侧的材料常数经平均波速法测试为已知未受损且均匀, 超声波检测探头如图 1 放置, 根据探头的放置情况和波的发射特征, 可以认为接收探头只接收横波信息, 因此本问题可简化为一维波动问题的反演.

设 y 方向的位移为 u 则问题描述的波动方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E(x)}{2(1+\mu)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

混凝土损伤使混凝土材料弱化, 但其质量仍保持不变, 可认为 $\rho(x) = \rho_0 = \text{常数}$; 设损伤后的材料弹性参数为 $E(x)$, 由于损伤的非均匀性, 使介质弹性参数 $E(x)$ 也表现为非均匀性, 为了便于数值计算, 将非均匀损伤介质进行分段处理, 在每一段中设 E 为常数, 故第 i 段中的波速 $c_i = \sqrt{E_i / [2(1+\mu)\rho_0]}$ 为常数. 经过以上假设后, 式 (1) 可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, +\infty) \quad (2)$$

初始条件

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

入射端边界条件

$$u|_{x=0} = f(t) \quad (4)$$

对接收端给出一个单向传播的边界条件——假设接收端右边很长且均匀无损, 于是接收端右边没有反射波返回, 在考虑前期波时, 这样假设是合理的. 因此接收端边界条件可用 ABC (人工边界条件) 表示为^[2,9]

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u|_{x=l} = 0 \quad (5)$$

接收探头接收信号

$$u|_{x=l} = g(t) \quad (6)$$

式 (2) ~ 式 (6) 即构成了混凝土损伤参数识别反问题的数学模型. 根据 Lemaitre 应变等效原理所推导的损伤度定义^[10], 有 $D(x) = 1 - E(x) / E_0$.

其中, E_0 为材料未损伤时的弹性常数, 设表面 MN 处为未损伤或损伤度为已知, 反演任务是确定 MN 内部区域中的损伤度 $D(x)$ 及其分布.

2 反演方法

2.1 脉冲谱技术 (PST) 迭代格式

采用 PST 方法, 将式 (2) ~ 式 (6) 关于时间 t 作 Laplace 变换, 将问题转化到频域中, 得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - a(x)s^2 U = 0 & 0 \leq x \leq l \quad s > 0 \\ U|_{x=0} = F(s), (s + c \frac{\partial}{\partial x}) U|_{x=l} = 0 & s > 0 \\ U|_{x=l} = G(s) & s > 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中 $U(x, s)$, $F(s)$, $G(s)$ 分别为 $u(x, t)$, $f(t)$, $g(t)$ 的 Laplace 变换的映象函数, $a(x) = 1 / c^2(x)$.

假设 $D_0(x)$ 为初始猜测值, 则 $a_0 = 2(1+\mu)\rho_0 / [1 - D_0(x)]E_0$, 迭代的基本过程为:

$$\begin{aligned} a_{n+1}(x) &= a_n(x) + \hat{a}_n(x) \\ U_{n+1}(x, s) &= U_n(x, s) + \hat{U}_n(x, s) \end{aligned} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

其中

$$| \hat{a}_n(x) | \ll | a_n(x) |$$

$$| \hat{U}_n(x, s) | \ll | U_n(x, s) |$$

因待测区域两侧材料常数已知, 故 M 、 N 两端点的损伤变量已知, 则有

$$\mathcal{D}_n(0) = \mathcal{D}_n(l) = 0$$

即

$$\hat{a}_n(0) = \hat{a}_n(l) = 0$$

设 $[(a_n(x), U_n(x, s))]$ 为满足式 (7) 的一组解, 将式 (8) 代入式 (7) 的前两式中, 可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 (U_n + \hat{U}_n)}{\partial x^2} - (a_n + \hat{a}_n) s^2 (U_n + \hat{U}_n) = 0 & x \in [0, l] \\ U_n + \hat{U}_n |_{x=0} = F(s), \quad (s + c \frac{\partial}{\partial x}) (U_n + \hat{U}_n) |_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

其中边界条件的第二式中的 c 为确定值, 故不做迭代. 将方程组式 (9) 展开, 忽略 $o(\delta)$ 项, 并按 δ 的阶数 (δ 阶与 δ^2 阶) 将式 (9) 分裂成两个方程, 边界条件也作相应的分裂, 则可得到两个定解问题.

一个是关于 U_n 的定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} - a_n s^2 U_n = 0 & x \in [0, l] \\ U_n |_{x=0} = F(s), \quad (s + c \frac{\partial}{\partial x}) U_n |_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

另一个是关于 \hat{U}_n 的定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{U}_n}{\partial x^2} - a_n s^2 \hat{U}_n = s^2 U_n \hat{a}_n & x \in [0, l] \\ \hat{U}_n |_{x=0} = 0, \quad (s + c \frac{\partial}{\partial x}) \hat{U}_n |_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

选择一组频率值 $s = s_j, j = 1, 2, \dots, J$. 对于每一个频率值 s_j , 将式 (10)、式 (11) 同时进行差分离散, 并采用相同的差分格式, 这样可将式 (10)、式 (11) 表示成网格结点上关于函数 $U_n(x, s)$, $\hat{U}_n(x, s)$, $\hat{a}_n(x)$ 的近似值的矩阵向量形式:

$$L_n^j U_n^j = d_n^j \quad (12)$$

$$L_n^j \hat{U}_n^j = K_n^j \hat{a}_n^j \quad (13)$$

其中 L_n, K_n 为差分算子, L_n 为非奇异矩阵, $U_n, \hat{U}_n, d_n, \hat{a}_n$ 均为向量.

再考虑附加条件式 (7) 中第三式, 同样对其差分处理, 与式 (12)、式 (13) 作相同的网格划分, 有:

$$A U^j = e^j \quad (14)$$

其中 A 可为矩阵, 亦可为向量, U^j 为表示真实位移的向量, e^j 则是与 $G(s_j)$ 相关的向量或数值. 这里 A 为一行向量, e^j 为一数值.

用 $U^j - U_n^j$ 代替式 (13) 中的 \hat{U}_n^j , 并在该式两端乘以 $A(L_n^j)^{-1}$, 同时记 $g_n^j = e^j - A U_n^j$, 利用式 (14), 则式 (13) 变成

$$A(L_n^j)^{-1} K_n^j \hat{a}_n^j = g_n^j \quad (15)$$

令 $B_n^j = A(L_n^j)^{-1} K_n^j, B_n = (B_n^1, B_n^2, \dots, B_n^J)^T, g_n = (g_n^1, g_n^2, \dots, g_n^J)^T$, 由此可得:

$$B_n \hat{a}_n = g_n \quad (16)$$

2.2 TSVD正则化

式 (16) 是关于 \hat{a}_n 的线性代数方程组, 由于该方程组一般呈严重病态, 使用 TSVD 方法对该系统作正则化求解, 即将病态矩阵:

$$B_n = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^T \quad (\Sigma, U, V \text{ 为 } B_n \text{ 的奇异系统}^{[11]})$$

用一个良态的矩阵:

$$B_{n,k} = \sum_{i=1}^k u_i \sigma_i v_i^T \quad (k \leq r)$$

来近似取代, 其中 k 为截断水平, 其本质起着正则参数的作用, 问题转化为在满足约束条件:

$$\min \| B_{n,k} \hat{u}_n - g_n \|_2$$

限制下, 寻求

$$\min \| \hat{u}_n \|_2$$

则, 该问题的解为^[6]:

$$\hat{u}_n = \sum_{i=1}^k \frac{(g_n^T v_i)}{\sigma_i} u_i \quad (17)$$

2.3 先验信息

在求得 $\hat{u}_n(x)$ 之后, $\mathcal{D}_n(x)$, $D_{n+1}(x) = D_n(x) + \mathcal{D}_n(x)$ 自然可得, 注意到 $D(x) \geq 0$, 且每一次迭代值 $D_{n+1}(x)$ 均视为某一水平的近似值, 因此在处理过程中可将 $D_{n+1}(x) \geq 0$ 作为反演的先验信息, 在反演中加入检验开关, 亦即在迭代后若出现某一点 $D_{n+1}(x_0) < 0$, 则将该点置零, 即 $D_{n+1}(x_0) = 0$.

3 数值模拟

假设图 1 所示工程实测模型, 材料的密度 $\rho_0 = 2500 \text{ kg/m}^3$, 未损伤时材料的弹性模量 $E_0 = 30 \text{ GPa}$ 待测区域 MN 长 $l = 0.3 \text{ m}$. 为了使检测信号包含足够宽的频谱信息, M 端的发射信号使用脉冲信号

$$f(t) = \begin{cases} 2.5 \times 10^{-4} \text{ m} & 0 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & t < 0 \text{ 或 } t > 0.5 \end{cases}$$

针对 3 种典型损伤模型 (分别为较大范围分层突变, 较小范围分层突变, 二阶连续变化) 给出的反演结果如图 2~图 4 所示. 本文中所有的数值离散均采用二阶有限差分格式, 当每一个离散点的损伤度前后两次迭代的结果相对误差小于 $\epsilon = 0.000001$ 时停止迭代.

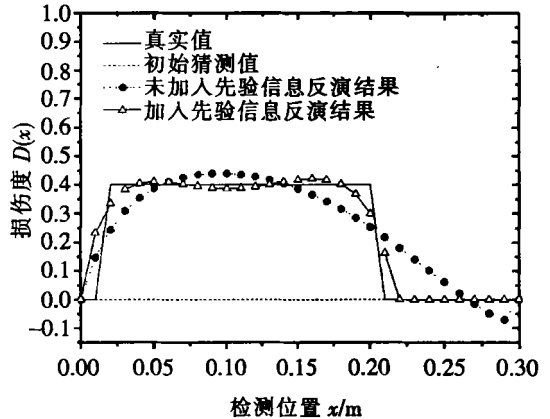


图 2 具有较大范围突变损伤模型反演结果
Fig.2 Inversed results of large-scale salient damage

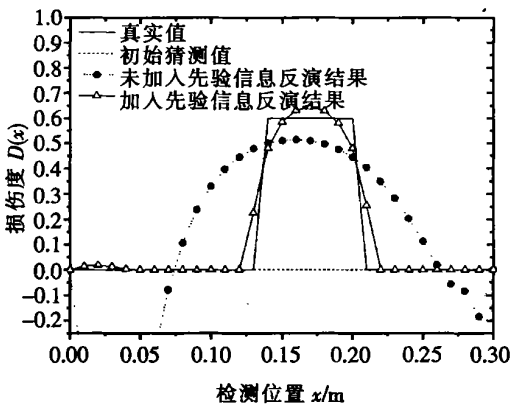


图 3 具有较小范围突变损伤模型反演结果
Fig.3 Inversed result of small-scale salient damage

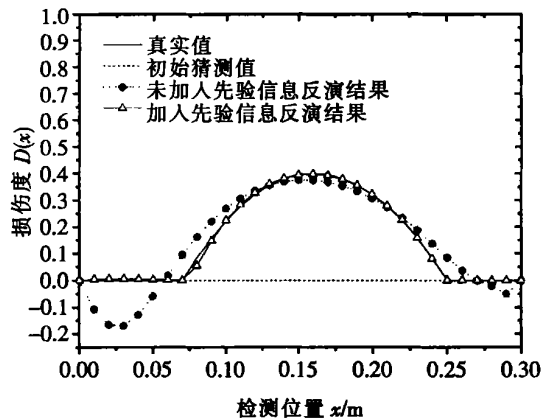


图 4 二次曲线型损伤模型的反演结果
Fig.4 Inversed result of quadratic damage

4 结论与讨论

1) 采用 ABC 可以对受损混凝土梁段进行有效的同侧检测反演。

2) 考虑先验信息, 在反演过程中加入检验开关, 对反演结果明显改进。尤其是分层突变模型, 若未加入检验开关, 甚至可能导致反演失败 (如图 3), 而加入后则显著改善。

3) 对于具有连续变化的损伤模型, 考虑先验信息后所得的反演结果与真实值基本一致。

4) 对于分层突变模型, 其反演结果在突变处存在一定误差, 这是由于正则化对近似解的平滑作用而产生的。而实际工程中混凝土材料的损伤又往往是连续变化的, 突变仅属于一种理想的简化模型。

因此, 利用本文提出的反演方法对混凝土的损伤度的反演实际上是可行的。

[参考文献]

- [1] 马宏伟, 杨桂通. 结构损伤探测的基本方法和研究进展 [J]. 力学进展, 1999, 29 (4): 513-527.
- [2] 廖振鹏. 工程波动理论导论 (第 2 版) [M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [3] Chen Y M, Liu J Q. A Numerical Algorithm for Solving Inverse Problem of Two Dimensional Wave Equations [J]. J Comput Phys, 1983, 50: 193-208.
- [4] 马兴瑞, 陶良, 黄文虎. 弹性波反演方法及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [5] 肖庭延, 于慎根, 王彦飞. 反问题的数值解法 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [6] Hansen P C. Regularization Tools: A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems [J]. Numerical Algorithms, 1994, 6: 1-35.
- [7] 魏培君, 章梓茂. 弹性动力学反问题的不适定性及其广义解 [J]. 力学与实践, 2001, 23 (3): 43-45.
- [8] 罗松南, 张伟. 混凝土介质中瞬态波场的损伤反演 [J]. 暨南大学学报: 自然科学与医学版, 2005, 26 (1): 20-22.
- [9] 廖振鹏. 近场波动的数值模拟 [J]. 力学进展, 1997, 27 (2): 193-212.
- [10] 余天庆, 钱济成. 损伤理论及其应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [11] 程云鹏, 张凯院, 徐仲. 矩阵论 (第 2 版) [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.

Damage Inversion of Non-Homogeneous Stiffness in Damaged Concrete Beam Segment

ZHANG Wei¹, LUO Song-nan², CHEN Rong¹, XUE Song-tao^{1,3}

(1 Research Institute of Structure Engineering and Disaster Reduction, Tongji University, Shanghai 200092, China

2 College of Mechanics and Aerospace, Hunan University, Changsha 410082, China;

3 Department of Architecture, School of Science and Engineering, Kansai University, Osaka 577-8502, Japan)

Abstract Using the theory of wave propagation, one-dimensional wave equation and inverse problem of damaged medium was established and analyzed. In the numerical simulations, aiming at several typical damage models, the PST (pulse-spectrum technique) combined with regularization was adopted to inverse the damage in transient wave field. It was considered as priori information that damage degree could not be negative. The result is obviously improved when such priori information was applied. The inversed results of numerical simulation accord with the real distribution of damage degree well.

Key words: damage; transient wave field; inverse