

摘要

微分演化算法 (DE) 是一种能有效求解复杂优化问题的启发式算法, 和其他进化算法相比, 它具有算法简单、使用方便、收敛性好和不易陷入局部最优解等优点, 适合求解各种复杂条件下的优化问题。

本文提出了一种基于微分演化算法的桁架结构优化设计新方法。数值分析表明, 该方法在求解各种复杂的桁架优化问题中均有非凡的表现。文本的主要研究工作如下:

(1) 概述了结构优化问题的基本概念以及国内外研究现状; 针对传统结构优化算法通用性差、效率不高、对某些问题无从下手, 以及一些现代智能优化算法稳定性差、求解复杂优化问题收敛性不佳等问题, 提出了一种基于微分演化算法的桁架结构优化设计方法。通过对典型桁架在多工况、多约束条件下的优化问题进行数值模拟, 验证本文所提方法用的可行性、有效性, 能够克服以往桁架优化方法的不足。

(2) 针对传统优化方法难于处理复杂的桁架离散优化, 以及其他智能算法求解也存在收敛困难、结果离散性大等问题, 提出一种基于微分演化算法的桁架离散优化方法, 通过对几个典型桁架离散优化算例的求解, 并将结果与其他算法对比, 验证了该方法用于复杂桁架离散优化问题的有效性、优越性。

(3) 针对传统方法求解桁架形状优化问题时依赖初始解的选取、分级求解收敛困难等问题, 提出一种利用微分演化算法将截面尺寸、节点位置两类不同变量耦合处理的方法, 该方法也可同时考虑连续和离散变量, 通过对典型桁架结构的优化设计分析, 验证了该方法用于桁架形状优化问题的有效性、优越性。

(4) 提出一种基于多目标微分演化算法—DEMO 的桁架多目标优化设计新方法。对 DEMO 的多目标寻优机制进行了分析, 通过标准测试函数验证其求解多目标优化问题的有效性。然后建立了基于性能的多目标桁架优化数学模型, 通过对典型桁架多目标优化设计结果的对比分析, 验证了该方法求解桁架多目标优化问题的有效性。

(5) 针对工程优化问题中存在的各种不确定性因素, 本文将其视为随机变数, 提出一种基于可靠度的求解不确定性优化问题的微分演化分析方法。建立了基于可靠度约束的桁架优化数学模型, 对典型桁架在连续、离散以及混合设计变量情况下分别进行了尺寸优化和形状优化。通过大量数值模拟分析了不同可靠度指标和变异系数对优化结果的影响。

关键词: 优化设计, 桁架, 微分演化, 混合变量, 尺寸优化, 形状优化, 离散优化, 多目标优化, 可靠度, 随机有限元

ABSTRACT

Differential Evolution (DE) is a heuristic technique that has yielded promising results for solving complex optimization problems. Compared to other evolutionary algorithms, DE has the potentialities of simple structure, easy use, convergence property and quality of solution.

In this thesis, a new truss structural optimization method based on Differential Evolution is proposed. Numerical analysis demonstrates that this method yield promising results in various types of truss optimization problems, where traditional methods as well as other evolutionary algorithms may have not proved to be effective. The main research work is shown as follows:

1) The fundamental conceptions and the state-of-art of structural optimization are reviewed. Traditional methods often have traits in common that tend to limit their applicability, efficiency; and some modern intelligent optimization methods may suffer poor stability, easy trap into local optimum for complex optimizations as well. To overcome these problems, a method based on Differential Evolution is proposed for truss structure optimizations. According to the numerical results of typical truss optimizations under multiple load cases and constraints, the proposed method outperforms other methods in effectivity and efficiency for complex structural optimizations.

2) Complex discrete optimizations are challenging problems for both traditional methods and most modern intelligent optimization methods. The difficulties include convergence property and high variance of the results. To avoid these problems, a method based on DE is developed for discrete optimization of trusses. According to the results of numerical simulations of typical truss optimizations and performance comparison with other existing methods, the efficiency and superiority of the proposed method is validated.

3) Unlike the traditional methods for shape optimization, which depend on initial solutions and are difficult to converge in multi-level optimization, this thesis considers the coupling relations between cross-sectional areas and nodal locations, and a new shape optimization method based on DE is proposed for both continuous variables and mixed variables. Numerical analysis and performance comparison demonstrate the efficiency and superiority of this method

4) A multi-objective Differential Evolution method—DEMO is applied to truss optimization. The searching mechanism of DEMO is first analyzed, the efficiency of DEMO is validated by standard test functions. A mathematical model of performance-based multi-objective optimization is then constructed for typical truss structures with both continuous and discrete design variables. The computational results are satisfactory, and validate the efficiency of DEMO for multi-objective truss optimizations.

5) Various uncertainties prevail in engineering optimizations. In this thesis, they are considered as random variables, and a reliability-based DE method is proposed for uncertain optimization. Mathematical models for truss optimization under reliability-based constraints are constructed. Several typical trusses are solved for both size optimization and shape optimization with continuous, discrete and mixed variables. The results of numerical analysis show the influence imposed by different reliability index and variance factors for truss optimization.

Key Words: Optimal design, truss, differential evolution, mixed variables, size optimization, shape optimization, discrete optimization, multi-objective optimization, reliability, stochastic finite element

目录

| | |
|-------------------------------|----|
| 第 1 章 绪论..... | 1 |
| 1.1 引言 | 1 |
| 1.2 结构优化设计的基本概念..... | 1 |
| 1.2.1 连续变量与离散变量..... | 3 |
| 1.2.2 单目标与多目标..... | 3 |
| 1.2.3 确定性与不确定性..... | 3 |
| 1.3 结构优化方法与研究进展 | 4 |
| 1.3.1 数学规划法..... | 4 |
| 1.3.2 准则法..... | 5 |
| 1.3.3 现代启发式算法..... | 6 |
| 1.3.4 离散变量优化的方法..... | 8 |
| 1.3.5 多目标优化的方法..... | 9 |
| 1.3.6 不确定性问题的处理方法 | 12 |
| 1.4 本文的主要研究工作..... | 12 |
| 第 2 章 微分演化算法..... | 14 |
| 2.1 引言..... | 14 |
| 2.2 基本微分演化算法 | 14 |
| 2.2.1 变异过程..... | 15 |
| 2.2.2 交叉过程..... | 15 |
| 2.2.3 选择过程..... | 16 |
| 2.3 算法参数的选取..... | 16 |
| 2.4 本章小结..... | 17 |
| 第 3 章 基于微分演化算法的桁架尺寸优化设计 | 18 |
| 3.1 引言..... | 18 |
| 3.2 桁架单目标尺寸优化的数学描述..... | 19 |
| 3.2.1 设计变量..... | 19 |
| 3.2.2 目标函数..... | 19 |
| 3.2.3 约束条件..... | 19 |
| 3.2.4 变量连接..... | 20 |
| 3.3 基于 DE 的桁架尺寸优化设计程序 | 20 |
| 3.4 连续变量桁架尺寸单目标优化设计..... | 22 |
| 3.4.1 数学模型..... | 22 |
| 3.4.2 桁架优化算例..... | 22 |
| 3.5 离散变量结构尺寸单目标优化设计..... | 28 |
| 3.5.1 数学模型..... | 29 |

| | |
|--------------------------------|----|
| 3.5.2 桁架优化算例..... | 30 |
| 3.6 本章小结..... | 35 |
| 第 4 章 基于微分演化算法的桁架形状优化设计 | 36 |
| 4.1 引言..... | 36 |
| 4.2 桁架结构形状优化的数学描述..... | 36 |
| 4.2.1 设计变量..... | 37 |
| 4.2.2 目标函数..... | 37 |
| 4.2.3 约束条件..... | 37 |
| 4.3 基于 DE 的桁架形状优化程序 | 38 |
| 4.4 连续截面变量的形状优化设计..... | 40 |
| 4.5 离散截面变量形状优化设计..... | 50 |
| 4.6 本章小结..... | 56 |
| 第 5 章 基于微分演化算法的桁架多目标优化设计 | 57 |
| 5.1 引言..... | 57 |
| 5.2 多目标优化的基本概念..... | 57 |
| 5.3 多目标优化方法..... | 59 |
| 5.3.1 传统的多目标优化方法..... | 59 |
| 5.3.2 现代进化多目标优化算法..... | 60 |
| 5.4 多目标微分演化优化算法-DEMO | 60 |
| 5.4.1 约束处理方法..... | 60 |
| 5.4.2 快速非支配排序..... | 61 |
| 5.4.3 多样性保持..... | 61 |
| 5.4.4 突变与交叉操作..... | 61 |
| 5.4.5 选择操作..... | 61 |
| 5.4.6 种群裁减..... | 62 |
| 5.5 多目标微分演化算法基本流程..... | 62 |
| 5.6 数值测试..... | 62 |
| 5.6.1 测试函数..... | 62 |
| 5.6.2 结果分析..... | 64 |
| 5.7 桁架结构多目标优化设计..... | 66 |
| 5.7.1 桁架结构优化的数学模型..... | 66 |
| 5.7.2 桁架结构多目标优化设计算例..... | 67 |
| 5.8 本章小结..... | 71 |
| 第 6 章 考虑不确定性的桁架优化设计 | 73 |
| 6.1 引言..... | 73 |
| 6.2 结构可靠性优化的基本概念..... | 73 |
| 6.2.1 结构可靠性分析中的随机因素..... | 74 |
| 6.2.2 结构可靠性优化的研究概况与现状..... | 74 |
| 6.3 随机桁架结构有限元分析 | 75 |

| | |
|---|----|
| 6.3.1 弹性模量 E 为随机变量 | 75 |
| 6.3.2 几何尺寸 L 为随机变量 | 77 |
| 6.3.3 外荷载 $\{P\}$ 为随机变量 | 78 |
| 6.3.4 物理参数 E 、几何参数 l 和外加载荷 $\{P\}$ 均为随机变量 | 79 |
| 6.4 结构响应量的可靠性指标 | 80 |
| 6.5 基于可靠度的桁架结构不确定优化设计 | 81 |
| 6.5.1 优化模型 | 82 |
| 6.5.2 可靠性约束的显式化处理 | 82 |
| 6.5.3 程序设计流程 | 83 |
| 6.5.4 基于可靠度约束的桁架尺寸优化设计 | 84 |
| 6.5.5 基于可靠度约束的桁架形状优化设计 | 89 |
| 6.6 本章小结 | 95 |
| 第 7 章 结论与展望 | 96 |
| 7.1 结论 | 96 |
| 7.2 未来的工作 | 97 |
| 参考文献 | 96 |

第1章 绪论

1.1 引言

结构优化设计是相对于传统的结构设计而言。

传统的结构设计是设计者按设计要求,据个人的实践经验并参考有关类似工程进行设计,拟出结构的初始方案;然后运用力学理论对该方案进行强度、刚度、稳定性等方面的计算和校核。它追求的是寻找满足结构设计要求的一个“可行解”。当然,重要工程往往还要研究几个方案来进行比较,从而对结构布局、材料选择、构件尺寸等进行修改,以求更为合理的方案。但是,由于时间上的限制、工作量过大等原因,方案比选这一环节受到很大的限制。显然,传统的这个设计过程周期长、费用高、效率低,且得到的设计只是个“可行的”未必是“最优的”。不同设计者做出的设计在性能上往往具有很大的离散性。

结构优化设计是设计者根据设计要求,在全部可能的结构方案中,利用数学手段,计算出若干个设计方案,按预定要求从中选择一个最好的方案。它突破了传统的结构设计格局,克服了经验、类比、简化计算等局限,追求的是结构设计问题的“最优解”或“近似最优解”。这里所说的“最优”,是相对设计者预定的要求而言,随着优化手段的发展及设计条件变动,最优的标准也将发生变动。

结构优化设计是一种现代的、科学的设计方法,相比传统的结构设计,它有如下的特点^[1]: (1)设计思想是最优设计,需要建立一个反应设计问题的数学模型;(2)设计方法是优化方法,一个方案参数的调整是由计算机沿着使方案更好的方向自动进行的。(3)设计的手段是计算机,由于计算机的运算速度快,因而可以从大量的方案中选出“最优方案”。

结构优化设计的目的在于寻求既满足使用要求又保证安全的最为经济的结构,显然传统的设计方法难以保证经济性,而优化是一种很有价值的工具,对提高工程结构的经济效益和功能方面具有重大的实际意义和广阔的应用前景。然而结构优化设计是一门新兴的学科,尚不完善和成熟,有待进一步开展研究并强化实践应用^[1]。

1.2 结构优化设计的基本概念

在优化设计中,对于设计者评价涉及“优”的标准称为目标函数。结构设计

中的量，以变量形式参与结构优化设计者称为设计变量。设计时遵守的几何、强度及刚度等条件称为约束条件。结构优化设计中，选择设计变量，确定目标函数，列出约束条件，称为制定优化设计的数学模型。有了优化设计模型后，还要选择合适的优化方法，进行结构优化设计。

结构优化的数学模型包括目标函数和约束函数两部分，表示如下：

$$\text{minimize } F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)) \quad (1-1)$$

$$\text{subject to } g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (1-2)$$

其中， k 为目标函数的个数； m 为约束函数个数。

对于结构优化问题，目标函数一般取结构的总重量、体积、造价、变形、承载能力、自振频率和振幅等，其中最常用的是结构的重量和造价。不同的目标函数将会导致不同的优化结果，因此，目标函数是确定优化设计合理性的一个关键环节。约束函数则包括了诸如结构（或构件）的强度、刚度、稳定性的性能约束和诸如截面尺寸、一些构造要求的几何约束。由于约束函数限定了优化问题的解空间，所以正确描述约束函数是保证优化结果可靠性的前提。

由于优化理论（或算法）多数是由数学工作者在脱离实际工程背景的前提下发展起来的，很多算法仅当模型性能良好时，才能获得稳定的收敛解，因此大量的文章都限于讨论连续型设计变量、单目标和确定性的优化问题，而客观世界中的现实问题常包含有离散变量（特别是对于结构优化问题），目标函数不是一个而是多个，模型和有关参数亦不是完全确定的而是随机和模糊的。可见模型与现实之间存在着较大的差距，有些甚至是根本性的，如果忽略这些实际因素，过分简化，即便得到了最优解亦很难被实际工程所采用。这应该是制约优化设计在实际结构设计中推广的一个主要因素。因此，对于工程优化设计人员，其首要任务就是如何将实际问题转化为合适的优化数学模型^[2]。

数学模型的建立必然以最优化问题的分类为基础。最优化问题根据其中的变量、约束、目标、问题性质、时间因素和函数关系等不同情况，可分成多种类型（见表1.1）。

表1.1 最优化问题分类表

| 分类标志 | 变量性质 | 约束情况 | 目标个数 | 函数关系 | 问题性质 | 时间 |
|------|------|------|------|------|------|----|
| 类型 | 连续 | 无约束 | 单目标 | 线性 | 确定性 | 静态 |
| | 离散 | 有约束 | 多目标 | 非线性 | 不确定性 | 动态 |

进行结构优化设计除需必要的数学理论知识，同时也要求熟练掌握结构优化方法。开发简单易行的结构优化设计程序和软件，才能使结构优化设计在工程实际中普及。

1.2.1 连续变量与离散变量

在优化问题中，设计变量的取值可能是连续的也可能是离散的。当变量是在可行域内连续取值时，相应的优化问题就称作连续变量优化问题。在很多结构优化设计问题中，可行域通常是连续的，如桁架尺寸优化问题中截面的尺寸在一定的面积区间内选取，桁架形状优化问题中的节点坐标在一定的坐标范围内取值，这类问题称作连续变量结构优化设计问题。

在结构尺寸优化问题中，由于某些结构自身性能、制造方面的规格要求等现实原因，设计人员往往不能随意确定单元的尺寸，而是需从一个预先给定的离散集合中选择单元尺寸。当设计变量的取值被限定在离散点组成的离散集合中时，相应的优化问题就成为离散变量优化问题。

1.2.2 单目标与多目标

在优化设计问题中，如果目标函数唯一，则此类优化问题被称作单目标优化问题。如在结构优化设计中取结构的总重量最轻、控制节点的位移最小或使用周期内总造价最低等目标之一作为优化目标，则相应的优化问题就是单目标结构优化设计问题。在单目标优化设计问题中，目标函数和约束函数常常表示为设计变量的非线性隐函数形式，而且这些函数的估计通常需要使用包括有限元方法在内的数值模拟。

在结构设计中，经常会遇到需要使多个目标在给定区域上均尽可能最佳的多目标优化问题（Multiobjective Optimization Problem, MOP）。例如在设计一个新的结构时，既要考虑结构性能较好，又要考虑造价较低。这些设计目标可能相互抵触，譬如好的结构性能可能会引起总体造价的增加，而造价经济常以性能降低为代价，因此必须在这些设计目标之间取一折衷结果。多目标有时也称多准则、多属性或多指标，多目标优化是指对多个子目标同时实施最优化。由于各个目标往往具有矛盾性，因此多目标优化问题通常不存在或者不能求得问题的“绝对最优解”，而只能求得各个目标间的“满意折衷解”，即 Pareto 解。意大利经济学家 Pareto（1848-1923）最早在经济学领域提出了 Pareto 最优的概念。该概念十分符合多目标优化问题的特点，在多目标优化方法研究中具有里程碑式的意义。

1.2.3 确定性与不确定性

工程结构设计问题中各项参数，如材料属性，结构尺寸，外荷载等常取为

定值，此种设计即为确定性设计问题。对于传统的确定性优化模型问题，其最优点往往处于可行域的边界上。设计变量或设计参数的微小扰动，就有可能造成某些约束违反，导致结构的质量波动甚至结构功能失效，这些因素必须在设计阶段予以充分考虑。然而工程实际中呈现大量的不确定性信息，如结构本身参数的离散性和作用荷载的随机性，若继续采用传统的确定性优化模型进行优化，很容易导致出现重大的工程事故。如何合理地定量处理各种不确定信息一直是工程优化设计领域的一个重要的、十分活跃的前沿课题。

1.3 结构优化方法与研究进展^[1,2]

结构优化设计的方法主要有传统的数学规划法、准则法和现代启发式算法，对于具体的某种类型的问题还有一些特殊的处理方法，如在离散变量优化问题中离散变量的连续化的处理方法、多目标优化问题中对于多个目标函数的处理方法和处理工程不确定性因素的各种方法等。

1.3.1 数学规划法

数学规划问题可分为线性和非线性两种，结构优化设计中主要是非线性规划问题。对于非线性问题，由于非线性的形式多样且非线性程度不一，因此发展起来的求解方法也是多种多样。本文简要介绍以下几种方法：

(1) 直接搜索法

直接搜索法是直接比较按一定规则选择的若干个点的目标函数值和约束函数值来搜索最优点的方法，适合于求解目标或约束函数求导存在困难的优化问题。求解非线性规划问题的网格法、随机试验法、复合形法都是直接搜索法。齿行法实际上也是一种利用力学准则和优化理论确定搜索方向和步长的直接搜索法。

(2) 解析规划法

解析规划法是利用目标函数和约束函数的导数来指导搜索方向和决定步长的数学规划法，如各种可行方向法、梯度投影法等。利用函数的导数指导搜索这一做法可以有效地减少迭代次数，但算法程序比较复杂，所以通常用来求解设计变量较多的优化设计问题。

(3) 序列逼近法

序列逼近法是在每次迭代中把复杂的非线性约束规划问题用较简单的规划逼近的一类方法。如用线性规划逐次逼近非线性规划的序列线性化规划法

(SLP)，用无约束规划逼近约束规划的序列无约束规划法(SUMT)和序列二次规划法(SQP)等。序列逼近法比较简单、适用范围广、且便于编制程序，在工程上应用较多。

(4) 特种规划法

特种规划法是指利用某些特殊规划的方法。如几何规划法可用于目标函数和约束函数都是正定多项式(指数为任意实数、系数全为正数的由变量幂的乘积函数组成的多项式)的优化问题。动态规划法适用于某些弱连接的可分段处理的问题。

1.3.2 准则法

准则法的基本原则是充分发挥材料的强度潜力和贮能(应变能)能力,实现等强度或等应变能密度状态,以达到用料最省和结构最轻的目标。这符合传统的设计思路,而且迭代程序比较简单,收敛较快,是一种比较方便的方法。结构优化的准则法有满应力准则法、能量准则法、演化结构优化算法等。

(1) 满应力准则法

满应力准则法的设计思想是对一个既定的结构布局,通过调整构件的断面尺寸,使各构件承受荷载的能力得以充分发挥。按满应力设计时事先确定优化的准则,认为满足这一准则的结构就是最优的,而不是事后判断是否达到最优。实际上经常会出现满应力解并不是最优解的情况。如结构作用多种荷载时,一般不会出现每种荷载下每个构件都达到满应力状态,满应力解只能是使结构的每个构件至少在一种情况下达到满应力的解。如果结构是超静定结构,则各构件的内力与构件截面尺寸有关,每次调整截面将使得内力重分布。虽经多次迭代,一般也难以使全部杆件达到满应力,得到的仍然是近似满应力解。只有静定结构在单一荷载作用下,满应力设计才可能是最轻设计。

(2) 满应变能准则法

结构在荷载作用下产生应变能,因而结构的各部分都贮藏了应变能。满应变能准则法的设计思想是当结构中单位体积的应变能达到材料强度允许的最大应变能时结构重量最轻,即使材料在结构中的分布与各处的应变能成正比。对于桁架结构而言,当各杆的应变能等于各自的能量库容时,得到的桁架结构最轻。能量准则法不仅适用于杆件结构,也适用于弯曲单元和其它单元。

(3) 演化结构优化算法

演化结构优化算法(Evolutionary Structural Optimization, ESO)通过将无效或低效的材料一步步去除,使结构逐渐趋于优化。此方法不仅可解决各类结

构的尺寸优化，还可以同时实现形状和拓扑优化，无论应力、位移（刚度）优化，或是振动频率、响应、临界压力优化，都可以按 ESO 的统一原则和简单步骤进行。ESO 方法不仅可应用于杆单元也能应用于平面单元甚至体单元。

准则法的缺点是有时会得不到严格的最优解，而且难以用于具有多个不同性质目标函数的优化问题。

1.3.3 现代启发式算法

在传统优化方法之外，近些年一些基于物理学和生物学思想的算法被广泛地引入到结构优化问题中，例如模拟退火算法、遗传算法、粒子群算法、蚁群算法、大爆炸算法等。这些启发式算法不依赖梯度计算，而且能够比较好的找到全局最优解。与传统的算法相比，启发式算法的主要优势有：①对函数的解析性质要求很低或不做要求。②在一般情况下，算法能否收敛到全局最优解与初始解无关；③算法的全局搜索能力强；④算法的使用范围广，能有效地求解不同类型的优化问题。然而，启发式算法也存在一定的不足之处，主要表现为：①算法中的参数，如群体规模、进化代数、重组概率、变异概率等，往往需要根据经验设定，在一定程度上还与具体问题有关；②算法的收敛性问题尽管在理论上已取得一定的成果，但在实际问题的求解时对于收敛性的判定还缺乏理论依据。③另外，启发式算法也存在计算时间较长的缺点，如何在保证精度的前提下，提高运算速度是启发式算法在优化设计中最重要的问题。

（1）模拟退火算法^[3]（Simulated Annealing Algorithm, SA）

模拟退火算法是近年来特别引人注目的一种适用于解大型组合优化问题的技术，算法的核心在于模仿热力学中液体的冻结与结晶或金属熔液的冷却与退火过程。它模拟固体的退火过程，采用 Metropolis 接受准则，采用一组称为冷却进度表的参数控制算法过程，从而得到近似最优解。它不使用梯度和二阶导数矩阵，因而不要求函数的连续性和可微性，它能处理连续-离散-整数设计变量的非线性规划问题。这一算法用于结构优化设计，虽不能保证获得全局最优解，但能提供较好的解。

（2）遗传算法^[2]（Genetic Algorithm, GA）

遗传算法是基于 Darwin 进化论和 Mendal 的遗传学说的一种启发式全局优化算法。它借用了仿真生物遗传学和自然选择机理，通过自然选择、遗传、变异等作用机制，实现各个个体的适应性的提高，末代适应度最高的个体作为近似最优解。GA 对设计变量特殊编码，其寻优搜索由适应度值引导，不需要其他辅助信息或导数信息，便于处理各类优化问题。另外，遗传算法是基于种群

的概念,可以并行搜索寻优,具有高效的全局优化能力。因此,在过去 20 年中已广泛应用于计算机科学、优化调度、运输问题、组合优化、复杂函数系统优化、机器学习、系统识别、神经网络设计等领域。1993 年后遗传算法被应用到结构优化设计领域,这方面的其他文献不胜枚举。

(3) 粒子群优化算法^[4] (Particle Swarm Optimization Algorithm, PSO)

粒子群优化算法是 1995 年由 Eberhart 和 Kennedy 在鸟群和鱼群的社会行为的启发下提出的一种基于随机优化技术的群智能算法。PSO 采用随机分布的一个初始化群体,并通过演化代的更新来寻找最优解。每个演化代中,称为粒子的可能解追随当前的最优粒子在解空间中飞行,每个粒子有一个适应值和一个根据群体的最佳经验而得到的速度来调整自身在多维解空间中的飞行方向以寻找全局最优解。相比其他的演化算法,PSO 具有一些独特的优点:①PSO 具有记忆功能,每个粒子都保存着其经历过的最优解;②粒子间存在建设性算子,亦即粒子间的信息在群体中可以共享;③PSO 算法上易于实现。然而,在进行结构优化设计时,粒子群优化算法最大的缺点则是收敛速度慢、耗时长。

(4) 蚁群算法^[5, 6] (Ant Colony Algorithm, ACO)

蚁群算法是意大利学者 M.Dorigo 模拟真实蚁群的行为于 1991 年提出的一种求解组合最优化问题的新型通用启发式算法,该方法具有正反馈、分布式计算和富于建设性的贪婪启发式搜索的特点。蚂蚁是一种社会性很强的昆虫,整个蚂蚁系统能表现出高度的复杂性。通过实验发现蚂蚁能在较短的时间内找到食物与蚁穴之间的最短途径,蚂蚁信息系统的发达促成蚂蚁完成觅食的自然优化过程。蚂蚁觅食时会在其走过的食物源与蚁穴之间的路上遗留下一种信息素,蚂蚁间就是利用信息素来进行自身路线的调整和相互交流以期找到最短的路线。蚁群算法创立以来,无论在算法理论还是在应用方面都取得了很大进展,显示出强大的生命力。但蚁群算法用于复杂系统优化问题的缺点是寻优时间长、有时会早熟收敛。

(5) 大爆炸算法^[7] (Big Bang-Big Crunch, BB-BC)

BB-BC 优化算法是 Osman K.Erol 博士受宇宙进化理论的启发于 2006 年提出的一种优化算法。在宇宙进化理论中, Big Bang 是宇宙刚产生的最初状态,宇宙学家们认为宇宙最初产生于一个高密度热点的爆炸。Big Crunch 是宇宙的最终宿命,认为膨胀的宇宙在不断扩张的同时受到质点系的质心引力的牵引,而且这种扩张最终将停止,引力将使得宇宙再次成为一个黑洞。BB-BC 算法就是模拟宇宙的形成和消亡过程,采用了两个阶段进行寻优,在质点不断的扩张和吸引下,分散于搜索空间的质点最终将收敛于优化问题的最优解。BB-BC 算法的关键就是如何平衡探索 and 开发来保证质点收敛在最优解处而不降落在其它

局部次优解处。很多测试函数表明 BB-BC 算法在性能上要优于基本 GA 及其一些改进版本。

(6) 微分演化 (Differential Evolution, DE) 算法^[8]

微分演化是在 1995 年由 Storn 和 Price 共同提出的一种求解连续空间域全局最优解的一种优化技术。它是一种基于群体差异的演化算法, 包含变异、交叉和选择三项基本操作, 通过若干代种群演化操作不断舍弃劣质解, 保留优质解, 最终获取满足问题的近似全局最优解。DE 具有算法简单, 控制参数少, 易于实现等优点。同时, 特有的记忆能力使其可以动态跟踪当前的搜索情况, 以调整其搜索策略。1997 年 Storn 和 Price 又对微分演化进行了更全面的论述, 提出了更多微分演化模式, 探讨了各参数的取值方法, 并通过对一组测试函数的数值计算表明, 微分演化算法在绝大多数情况下比模拟退火以及遗传算法等其它演化算法具有更强的寻优能力, 在求解非凸、多峰、非线性数值优化问题中表现出较强的稳健性, 已经被应用于很多领域的优化问题。

1.3.4 离散变量优化的方法

离散变量优化设计中, 设计变量的离散性导致了优化问题的数学模型中目标函数与约束函数的不连续性, 从而将连续变量优化的数学模型转化为不可微的、非凸规划模型, 可行域转化为可行集, 连续变量中的许多有效的解析数学算法便无法应用。离散变量优化问题在数学上属于组合优化问题, 即从所有可能的组合中寻找最优解。随着设计变量的增加, 组合个数迅速增加, 问题的难度也随之大大增加, 对于稍大规模的组合优化问题, 根本无法保证求得全局最优解, 即所谓的 NP 困难问题。如果设计变量中同时包含连续变量、离散变量, 则问题的难度进一步增加^[2]。

结构优化问题多数属于约束非线性离散变量优化问题, 所以有关结构优化设计方面的理论主要是约束非线性离散变量优化理论。约束非线性离散变量的优化方法, 主要有这样几类: (1) 基于连续变量优化思路而发展出的离散或拟离散优化方法, 如圆整法、拟离散法和离散惩罚函数法; (2) 随机型和半随机型的离散变量优化方法, 如离散变量随机实验法、随机离散搜索法; (3) 离散变量搜索优化方法, 如整数梯度法、MDOD 法和离散复合形法; (4) 其他离散变量优化方法, 如分支定界法、隐枚举法等。此外, 1995 年孙焕纯, 柴山提出处理离散变量结构形状、拓扑优化的分级优化法^[9]。孙焕纯, 王跃方提出了离散截面变量空间桁架形状优化的一个两极算法^[10]。1997 年石连栓, 孙焕纯提出一种将混合变量综合处理的形状优化方法^[11]。这些传统优化方法在结构优化设

计中都有过成功应用的经验，但是这些方法的解题能力与问题的函数性态与变量的多少关系甚大，通用性较差。因而需要进一步研究通用高效的处理离散变量优化的方法。

近年来发展起来的模拟自然演化的启发式方法，如模拟退火法与遗传算法等都属于能在离散空间搜索优化的方法，有很强的适应能力。由于变量的离散性，用启发式算法求解离散变量优化问题时，变量的编码方式将有别于连续变量问题，进而对原本在连续域实施的算法操作产生影响，但多数只需稍加处理便能有效解决。启发式算法虽然不一定能保证找到全局最优解，但能够在可接受的计算时间内寻找到近似最优解，而这正是工程优化问题所需要的。早在1992年，Rajeev 和 Krishnamoorthy^[12]就将 GA 应用于桁架结构的离散优化问题。此后 GA 进一步得到应用^[13]，更有 ACO(2004)，PSO(2009)，BB-BC(2007)等算法^[14~16]成功应用于桁架的离散优化。当然，对于特殊复杂的离散优化问题，这些启发式算法也不一定都能获得令人满意的全局最优解。

1.3.5 多目标优化的方法

在多目标优化的概念刚被提出时，人们的思想还局限于单目标优化的范畴。因而，对于多目标优化问题，人们首先对优化的目标函数进行处理，将多个目标转化为单个目标，然后再用单目标优化的方法进行求解。根据这种思想所提出的最典型的方法主要有：（1）加权法。在加权法中，目标函数可采用某种适当的方式变成分等级排列，然后将每个目标函数按照等级分配一个权重系数，将所有的目标函数加权求和得到一个综合的目标函数，从而将多目标问题转化成了单目标问题。（2） ε -约束法。 ε -约束法是在 n 个目标函数中，认定一个主要目标，而对其余分目标给出期望值，并按此作为约束条件，将问题转化为单目标优化问题。然后求解不同约束条件下的单目标优化问题，最终得到一组单目标优化的最优解。

多目标优化问题求解，一方面要求算法具有较好的收敛速度，另一方面要求所得解在 Pareto 边界上具有一定的分散性。而上述方法只能得到多目标优化问题的有限个数的解。如果要得到能够反映真实的 Pareto 前沿形状的近似 Pareto 解集，就不免要设定不同的参数重复若干次计算，运算量将十分巨大。同时对于某些多目标优化问题，上述方法也未必能得到足够能反映真实 Pareto 前沿形状的解。

然而启发式算法则可以有效地求解多目标优化问题。近些年发展起来的多目标优化方法，绝大部分都是基于 Pareto 概念的多目标启发式算法。文献[17]

综述了近年来进化多目标优化算法研究的现状，现总结如下：

进化算法作为一类启发式搜索算法，已被成功应用于多目标优化领域，发展成为一个相对较热的研究方向——进化多目标优化（Evolutionary Multi-objective Optimization, 简称 EMO）。

进化算法通过在代与代之间维持由潜在解组成的种群来实现全局搜索，这种从种群到种群的方法对搜索多目标优化问题的 Pareto 最优解集是很有用的。Schaffer 在 1985 年最早提出了矢量评价遗传算法（VEGA），此为 EMO 问题的开山之作。自 1993 年起相继出现的基于非支配排序思想和基于共享函数的多样性保持为特征的 EMO 算法，习惯上被称为第一代进化多目标算法。包括 1993 年 Fonseca 和 Fleming 提出的 Multiobjective Genetic Algorithm (MOGA)、Srinivas 和 Deb 提出的 Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA)、Horn 和 Nafpliotis 提出的 Niche Pareto Genetic Algorithm (NPGA) 等。从 1999 年到 2002 年，以精英保留机制的引入为特征的第二代多目标优化算法相继被提出：1999 年和 2002 年，Zitzler 和 Thiele 提出了 Strength Pareto Evolutionary Algorithm (SPEA) 和 SPEA2，2000 年 Knowles 和 Corne 提出了 Pareto Archived Evolution Strategy (PAES) 及其改进版本 Pareto Envelop-based Selection Algorithm (PESA) 和 PESA-II。2001 年 Erichson 等提出了 NPGA 的改进版本 NPGA2；2002 年，Deb 等学者通过对 NSGA 的改进，提出了非常经典的 NSGA-II。同时发展了一些更好的保持种群多样性的策略，如基于聚类的方法、基于拥挤距离的方法等。

近些年来，进化多目标优化前沿领域的研究呈现出以下新的特点：①一些新的智能算法被引进多目标优化领域，如粒子群优化、蚁群算法、人工免疫系统、微分演化算法等算法被用于求解多目标优化问题。②一些新的占优机制被提出，如 ε -占优，部分占优等。③高维多目标优化问题仍是当今该领域所面临的难题之一。

本文则对微分演化算法在桁架多目标优化中的应用进行研究。相对于传统多目标优化方法，DE 在求解多目标问题上具有很大优势。首先，DE 的高效搜索能力有利于得到多目标意义下的最优解；其次 DE 通过代表整个解集的种群以并行方式进行搜索，容易同时搜索到多个 Pareto 最优解；再者，DE 的通用性使其适合于处理所有类型的目标函数和约束。对于 DE 而言，求解多目标问题的关键在于选择操作，要求算法以较小的计算复杂度来达到多个非劣解的更新。

近年来，基于 Pareto 竞争与排序、改变操作算子等思想的多目标微分演化算法相继出现，如 PDE(2002)、PDEA(2002)、MODE(2003)、DEMO(2005)、

MDEA(2009)等^[18]。

(1) Abbass^[19]于 2002 年最先将微分演化应用于多目标优化问题, 提出 Pareto Differential Evolution (PDE)。该方法用变异、交叉操作来生成新的个体, 然后仅仅选择非支配的个体进入下一代。PDE 就两个测试问题与 SPEA 进行了比较^[20], 发现 PDE 的性能要比 SPEA 更好。

(2) Madavan^[21]于 2002 年提出 Pareto Differential Evolution Approach (PDEA)。PDEA 也是通过变异、交叉生成新个体。然后将父子两代种群合并, 计算各个个体的非支配秩和多样性秩。选择操作中介绍了如下两个版本: 版本一中, 每个子代与其父代进行比较, 若子代的非支配秩高于其父代, 或者非支配秩相等但多样性秩高于其父代, 则代替父代; 否则, 丢弃子代。版本二中, 与 NSGA-II 的思想一样, 根据非支配秩和多样性秩选择最优的个体。理论分析实验结果表明, 二者多样性均较好, 但版本一比版本二计算复杂度更高, 因而收敛速度不如版本二快。

(3) XUE^[22]于 2003 年提出了多目标微分演化算法, Multi-objective Differential Evolution (MODE)。该算法也使用基于 Pareto 的秩分配和拥挤距离准则。但是, 它的使用方式与 PDEA 不同。在 MODE 算法中, 个体的适应度先用基于 Pareto 的秩进行计算, 再根据个体的拥挤距离值将其适应度减小。然后再根据这样得到的单个适应度值, 选择适应度最优的个体作为新的种群。实验结果表明, MODE 的性能要优于 SPEA。

(4) Robic^[23]等人于 2005 年又提出了一种多目标微分演化算法, Differential Evolution for Multi-objective Optimization (DEMO)。虽然该算法的基本思想和上述三个算法比较类似, 特别是与 PDEA 非常相近, 但 DEMO 的实现方法与它们完全不同。DEMO 包含三个变种 (Variants), 即 DEMO/parent, DEMO/closet/dec 和 DEMO/closest/obj。五个测试问题的实验结果表明, DEMO 能够高效的达到多目标优化的两个目的, 即能够收敛到真实的 Pareto 最优前沿, 并且解集合沿 Pareto 最优前沿均匀分布。

(5) Adeyemo^[24]等人与 2009 年提出了最新的 Multi-objective Differential Evolution Algorithm (MDEA), 该算法保持了基本 DE 算法简单易行的优点, 在选择算子中应用支配的概念进行选择, 而仅在最后一代将支配解除掉。本人在实验研究中发现尽管此算法简单, 运行速度快, 但因其未包含保证解集多样性的机制, 致使 Pareto 解集不可避免地产生“聚拢”现象, 难以达到多目标优化的目的。

1.3.6 不确定性问题的处理方法

对于工程结构设计中呈现的大量不确定性信息至少有三种表现形式：概率（统计）信息、模糊信息和未知但有界信息，而概率模型、模糊模型和凸集合模型分别是处理这三种信息的合理手段，形成了所谓的“不确定性三角”^[25]。

(1) 概率模型是研究最多，最为成熟的一种不确定性模型，用以描述具有随机性的不确定信息，随机性是由于因果关系不明确而形成的一种不确定性，概率模型将随机性信息描述为具有一定分布特征的随机变量或随机过程，采用概率分析的相关理论确定结构功能的波动情况和失效概率。概率模型以及基于概率的可靠性理论是进行不确定性分析的一种有效手段。在结构设计领域，我国已颁布了统一标准，要求结构设计规范按概率可靠度理论设计。但在没有获得关于结构信息大量统计数据的基础上，该模型的相关理论便无法应用。

(2) 基于模糊集合论和模糊逻辑学的模糊模型是另一种常用的不确定性模型，用以处理工程设计中的模糊性信息。所谓“模糊性”是指存在于现实中的不分明现象，它是由排中律遭到破坏所造成的不确定性，即事物的内涵是明确的，而外延是不确定的。该模型常用来处理设计要求的模糊性和描述系统输入参数的不确定性。在经验数据缺乏或对模糊性理解有限的情况下，模型造成的误差较大。

(3) 非概率凸集合模型是由 Ben-Haim 和 Elishakoff 提出并倡导使用^[26]，它用一定形式的凸集合来界定不确定参量的波动范围，而对其分布不做任何人为假定。经过分析可以得到输出响应量的变差范围，并依此进行结构的质量控制，凸集合模型特别适用于描述“未知但有界变量”和可靠性要求比较高的场合，尤其对于大型、复杂精密工程系统的质量控制更具吸引力，因而近年来受到工程分析和设计领域的广泛关注。

本文针对外荷载和结构参数存在的不确定性，将它们视为随机变数，运用基于可靠度的概率模型处理桁架优化设计中的不确定性问题。

1.4 本文的主要研究工作

本文的主要研究工作可概述如下：

(1) 针对传统结构优化算法通用性差、效率不高、对复杂问题无法有效求解等问题，提出一基于微分演化算法的桁架结构优化设计方法，通过对典型桁架在多工况、多约束条件下的优化问题进行数值模拟和对结果的对比分析，验证了本文所提方法能够克服以往算法求解桁架优化问题的不足，用于桁架优化

是可行的、有效的。

(2) 针对传统优化方法难于处理复杂的桁架离散优化问题, 以及其他智能算法求解也存在收敛性不佳等问题, 本文提出一种基于微分演化算法的桁架离散优化方法, 通过对几个典型桁架离散优化算例的求解和对比分析, 验证了该方法的有效性、优越性。

(3) 针对传统算法求解桁架形状优化问题时依赖初始解选取、分级求解收敛困难等问题, 本文提出一种利用微分演化算法将截面尺寸、节点位置两类不同变量耦合处理的新方法, 它也能同时考虑连续和离散变量, 通过对典型桁架的形状优化问题进行求解和分析对比, 验证了该方法的有效性、优越性。

(4) 提出将一种多目标微分演化算法—DEMO 作为桁架多目标优化设计的新方法。首先对 DEMO 的寻优机制进行了分析, 通过标准测试函数验证了 DEMO 求解多目标优化问题的有效性。然后建立了基于性能的桁架多目标优化数学模型, 通过对典型桁架多目标优化设计结果的对比分析, 验证了将 DEMO 应用于桁架多目标优化问题的有效性、优越性。

(5) 针对工程优化问题中存在的各种不确定性因素, 提出一种基于可靠度的不确定性优化的微分演化分析方法。建立了基于可靠度约束的桁架结构优化设计模型, 对典型桁架在不同设计变量情况下分别进行了尺寸优化和形状优化, 通过大量的数值模拟分析了不同可靠度指标和变异系数对优化结果产生的影响。

第 2 章 微分演化算法

2.1 引言

微分演化算法(Differential Evolution ,DE) ^[8, 27, 28] 是一种新兴的进化计算技术。它是由 Storn R 和 Price K 于 1995 年提出,最初的设想是用于解决切比雪夫多项式问题,后来发现 DE 也是解决复杂优化问题的有效技术。DE 与人工生命,特别是进化算法有着极为特殊的联系。DE 采用基于种群的全局优化搜索策略,采用实数编码、基于差分的简单变异操作和一对一的竞争生存策略,降低了遗传操作的复杂性。同时, DE 特有的记忆能力使其可以动态跟踪当前的搜索情况,以调整其搜索策略,具有较强的全局寻优能力和稳定性,且不需要借助问题的特征信息,适于求解一些利用常规的数学规划方法所无法求解的复杂情况下的优化问题。因此, DE 作为一种高效的并行搜索算法,对其进行理论和应用研究具有重要的学术意义和工程价值。

目前, DE 已经在许多领域得到了应用,譬如人工神经网络、化工、电力、机械设计、机器人、信号处理、生物信息、经济学、现代农业、食品安全、环境保护和运筹学等。然而,尽管 DE 获得了广泛研究,但相对其他进化算法而言,其研究成果相当分散,缺乏系统性,尤其在理论方面还没有重大突破^[21]。本章只对 DE 的基本原理进行介绍,给出算法参数选取的建议。对于离散、多目标等复杂情况下的 DE 算法研究将在以后章节陆续给出。

2.2 基本微分演化算法^[8, 27, 29]

微分演化算法的结构类似于遗传算法,是一种基于种群的优化算法,包括种群初始化、变异、交叉和选择操作。它通过种群内个体间的合作与竞争来实现对优化问题的求解。算法首先在问题的可行解空间随机初始化种群

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in S, i = 1, 2, \dots, NP \quad (2.1)$$

其中, NP 为种群规模。个体 $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T$ 用于表征问题解, n 为优化问题的维数。算法的基本思想是:对当前种群进行变异和交叉操作,产生另一个新种群;然后利用基于贪婪思想的选择操作对这两个种群进行一对一的选择,从而产生最终的新一代种群。具体过程如下:

2.2.1 变异过程

变异操作是 DE 算法最重要的思想之一，其目的是用种群中个体向量间的矢量差来指导已有的目标向量进行搜索，使种群个体不断探索周围新的领域。

在第 G 代，对于每个目标向量 $x_{i,G}$, $i=1, \dots, NP$ ，对应有一个突变向量 $v_i^{(G+1)} = (v_{i1}^{(G+1)}, v_{i2}^{(G+1)}, \dots, v_{in}^{(G+1)})^T$ 由以下的等式来决定^[29]：

$$v_i^{(G+1)} = x_{r_1}^{(G)} + F(x_{r_2}^{(G)} - x_{r_3}^{(G)}) \quad (2.2)$$

$$v_i^{(G+1)} = x_{best}^{(G)} + F(x_{r_1}^{(G)} - x_{r_2}^{(G)}) \quad (2.3)$$

$$v_i^{(G+1)} = x_i^{(G)} + F_1(x_{best}^{(G)} - x_i^{(G)}) + F(x_{r_1}^{(G)} - x_{r_2}^{(G)}) \quad (2.4)$$

$$v_i^{(G+1)} = x_{best}^{(G)} + F_1(x_{r_1}^{(G)} - x_{r_2}^{(G)}) + F(x_{r_3}^{(G)} - x_{r_4}^{(G)}) \quad (2.5)$$

$$v_i^{(G+1)} = x_{r_1}^{(G)} + F_1(x_{r_2}^{(G)} - x_{r_3}^{(G)}) + F(x_{r_4}^{(G)} - x_{r_5}^{(G)}) \quad (2.6)$$

其中， $x_{best}^{(G)}$ 是第 G 代最优个体； F 和 $F_1 > 0$ 为实参数，称为变异因子，它控制两个个体间差异 $(x_{r_2,G} - x_{r_3,G})$ 的放大以避免搜索停滞； r_1, r_2, r_3, r_4 和 r_5 是互不相同的整数，随机取自于集合 $\{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, NP\}$ 。

方程 (2.2) ~ (2.6) 构成 DE 不同的变异策略，分别称为 DE/rand/1/bin, DE/best/1/bin, DE/current-to-best/1/bin, DE/best/2/bin, DE/current-to-best/bin 策略。图 2-1 示例了方程 (2.4) 所定义向量 v 的产生过程。

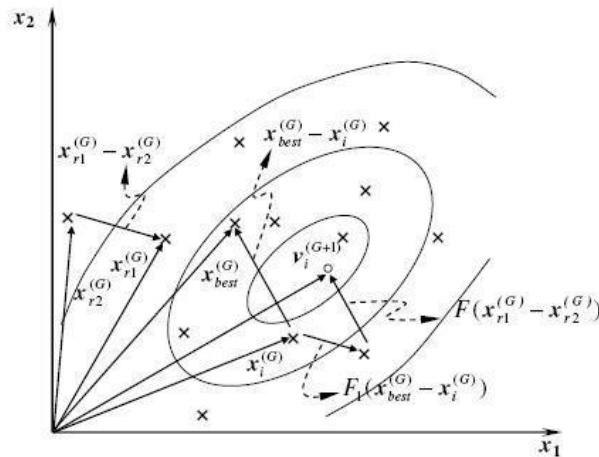


图 2.1 DE/current-to-best/1 中从当代个体产生 v 的二维图形解释

2.2.2 交叉过程

为了增加种群的多样性，引入交叉操作。对于每个变异向量 $v_i^{(G+1)}$ ，其试验向量 $u_{i,G+1} = (u_{1i,G+1}, u_{2i,G+1}, \dots, u_{ni,G+1})$ 由下式产生：

$$u_{j_i, G+1} = \begin{cases} v_{j_i, G+1} & \text{if } randb(j) \leq CR \text{ or } j = rnbr(i) \\ \mathbf{x}_{j_i, G} & \text{if } randb(j) > CR \text{ and } j \neq rnbr(i) \end{cases}, \quad (2.7)$$

其中, $j=1, 2, \dots, n$; $randb(j) \in [0, 1]$, 是 n 个 0~1 之间相互独立的随机数中的第 j 个, $rnbr(i)$ 为在 $1, 2, \dots, n$ 中随机选择的个体向量维度的序号, 用来保证 $u_{i, G+1}$ 至少有一个参数是来自 $v_{i, G+1}$ 。CR 是 $\in [0, 1]$, 为用户定义的交叉因子, 将决定个体之间交叉的概率。

2.2.3 选择过程

DE 采用贪婪准则来进行选择操作。经突变、交叉产生的子代个体将与父代个体进行比较, 目标函数值更优的个体将被选择进入下一代种群。

一个个体能不能成为种群 $G+1$ 中的一个, 可以比较子代的试验向量 $u_{i, G+1}$ 与父代的目标向量 $x_{i, G}$ 的目标函数值, 这里用 f 表示目标函数。

$$x_i^{(G+1)} = \begin{cases} u_i^{(G+1)} & \text{if } f(u_i^{(G+1)}) < f(x_i^{(G)}) \\ x_i^{(G)} & \text{if } otherwise \end{cases}, \quad (2.8)$$

因此, 经父子两代个体比较以后, 优良的个体将被保存于种群中。这些操作重复进行直至满足设定的停止准则。

2.3 算法参数的选取

要取得理想的结果, 参数的选择至关重要。DE 算法自出现以来, 很多研究人员对参数的选择及其对算法性能的影响进行了大量的分析和实验, 为 DE 算法的理论和应用研究奠定了一定的基础。对算法的寻优性能影响显著的参数主要包括: 种群大小 NP、变异因子 F (F_1) 和交叉概率 CR。选择适当的参数值可以有效地减少计算规模、降低时间复杂度^[30]。

- (1) 种群大小 NP: 种群大小 NP 直接影响算法的收敛速度, 同时也一定程度上影响优化结果的质量。NP 过小, 则会导致种群多样性减小, 无法收敛到全局最优解; NP 过大, 则计算规模增加, 收敛速度减慢。个体的分布在搜索域内几乎是均匀的, 通常取 NP 为问题维数(向量参数的个数)的 5~10 倍。种群大小的合适取值主要用于维持个体的多样性。
- (2) 变异因子 F (F_1): 变异因子 $F \in [0, 2]$ 是变异操作中, 添加到被扰动向量上的差异值的比率。F 越大, 算法的全局搜索能力越强, 能保证收敛到问题的最优解, 但收敛速度较慢; F 越小, 收敛速度越快, 局部搜索能力越强。但

过小时,极易出现早熟现象。通常 F 选择在 $[0.4,1.0]$ 范围内(Price&Storn,1997), 初始值可取 $F=0.5$, 如果算法过早收敛, 则可增加 F 和 (或) NP 。

- (3) 交叉概率 CR : $CR \in [0,1]$, 表示子代个体从变异操作产生的试验向量个体中继承的比率, 即用于控制候选个体 $u_i^{(G+1)}$ 中哪些变量由变异个体 $v_i^{(G+1)}$ 提供, 哪些变量由当前演化个体 $x_i^{(G)}$ 提供。 CR 增大则收敛速度增大, 但当 CR 值大于 0.9 后, 容易出现早熟现象。通常 CR 初始值为 0.9 较好, 如果对优化结果不满意, 再适当调整 CR 的值。
- (4) NP 取值越大, 则 F 取值应越小, DE 算法对 F 的调整比对 CR 的调整更加敏感, 通常变化比较细微时使用 CR , 比较大的调整使用 F 。

最近大量的测试分析也表明^[24]: ① F 从区间 $[0.5,1.0]$ 随机取值, 可以很显著地提高收敛性能, 特别是有噪声影响的目标函数。② CR 为小值, 如 $CR=0.2$, 有助于优化参数可分离的目标函数, 因为它会促使优化沿坐标轴搜索。而对参数间相互关联的优化问题取 $CR=0.9$ 更为合适。事实上实际优化问题多数不像人工测试函数那样参数是可分离的。③ 无论优化参数的维数为多大, 当 NP 取到一定值时(比如 40), 增加其大小并不能显著提高收敛性。④同时要确保参数向量的初始化是在整个数值范围内进行的, 即如果一个参数允许在 $[-100,100]$ 范围内取值, 那么就不应该对它有额外的限制, 以保证种群多样性。⑤不同的问题经常需要设置不同的参数 NP , F , CR 。

2.4 本章小结

本章主要介绍了微分演化算法的基本理论。首先对算法的基本操作进行介绍, 然后对算法的参数进行分析并给出参数选取的建议。

第 3 章 基于微分演化算法的桁架尺寸优化设计

3.1 引言

结构优化设计从 Maxwell 理论(1854)和 Michell 桁架(1905)出现起已逾百年,从 Schmit(1960)将数学规划理论与有限元方法结合求解结构的最小重量设计问题算起亦有 50 年历史。在过去的几十年里,结构优化设计的理论、算法和应用都得到较大的发展,结构优化已成为结构工程中热点的研究方向之一。以重量最轻化为目标的桁架结构的优化大致可分为尺寸优化、形状优化和拓扑优化三个层次,其中尺寸优化为第一个层次。对于桁架结构,在给定结构形式、材料、布局拓扑和形状的情况下,优化各个杆件的截面尺寸使结构最轻,即尺寸优化。在尺寸优化中取杆件的截面面积为设计变量。如果设计变量允许在连续的范围取值,则该问题为连续变量优化问题。而实际工程中,设计变量通常只允许从一些给定的离散值中选取,这样的问题属于离散变量优化问题。两种不同类型的优化问题,求解的方法也不同。

对于结构优化设计,算法的好坏通常会决定计算的效率和结果的优劣。传统的结构优化的方法主要有准则法、数学规划法等,随着结构设计的越来越复杂,传统的一些优化方法面临着很大的挑战,如准则法难以有效地处理多约束优化问题且通用性较差,数学规划法重分析的次数多,需要大量的储存空间、计算量大,故只适合于构件的优化,却不适合大型结构系统的优化。近三十多年来得到发展的一些现代智能优化算法,如遗传算法^[13, 32]、BB-BC 算法^[16]、蚁群算法^[33, 14]、粒子群优化算法^[34, 15]等启发式算法在桁架结构优化设计领域得到广泛的应用,并取得很好的效果。

微分演化 (Differential Evolution, 简称DE)作为一种新颖的算法,自从1995年被Storn和Price引入以来,在解决复杂的优化问题上得到了很多关注。作为一种混合算法,DE的主要优点是算法简单,它结合了遗传算法的更大种群概念和进化算法的自适应变异以及采用了贪婪选择策略。同时,DE算法用浮点语言取代了在许多传统进化算法中的二进制语言,控制变量少,执行起来更简单。这些特征使DE算法相比进化算法和遗传算法收敛更快、稳定性更好。研究表明针对复杂的优化问题,DE算法相对于PSO算法和遗传等其他算法具有更加精确、更快的收敛速度和较强的稳定性的特点^[30]。该算法已被广泛应用^[28]于化工、电力、信号处理、工程设计^[35]、可靠度分析^[36]、主动控制^[37]、系统识别^[29]等诸多问题。而在桁架结

构优化问题上DE却鲜有应用。

基于此本文采用DE对平面桁架及空间桁架在单工况及多工况作用及多约束情况下进行尺寸优化设计,通过与相关文献的结果对比,来评价DE用于桁架尺寸优化的效果。

3.2 桁架单目标尺寸优化的数学描述

3.2.1 设计变量

一个结构设计方案中,存在着三种类型的参数,即设计参数、性态参数和中间参数。设计参数是设计中的自变量,通常由设计者主动选择;性态参数是结构的输出变量,例如应力、位移、自振频率等等,是设计参数的因变量,通常只能靠结构分析来描述;中间参数是由设计参数求性态参数运算中的一些量。在优化过程中,往往将设计参数的一部分率先给定,如在尺寸优化中,给定结构节点的坐标、杆件的连接关系、边界条件等。通过调整另一部分设计参数,达到优化的目的,这些可调整的设计参数,被称作设计变量。桁架结构的尺寸优化设计变量一般为杆件截面面积或截面特性参数。

本章定义设计变量为杆件的截面积 $A = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T$ (3.1)

3.2.2 目标函数

目标函数又称为评价函数,用来评价一种设计方案的好坏。桁架优化设计多以桁架的重量最轻作为优化目标。本章选择的目标函数包含桁架的总重量和处理约束的惩罚项:

$$\min F = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i + \lambda M \quad (3.2)$$

其中: F 为目标函数值, L_i 为第 i 组杆件的长度, A_i 、 ρ_i 分别为第 i 组杆件的截面积及密度, n 为截面设计变量进行变量连接后杆件的组数, M 为预先定义的一个大数 ($10e30$); λ 为罚函数因子,用来处理约束。当结构设计满足约束条件时 $\lambda = 0$, 否则 $\lambda = 1$ 。

3.2.3 约束条件

在设计空间中的每一个点都代表一种设计方案,而可行的设计方案必须满足一系列条件,即约束条件。桁架结构优化时的约束条件一般包括以下几种:

(1) 应力约束条件：这是使结构避免发生断裂、屈服等形式的破坏而要满足的强度约束条件。一般限制截面的应力值在应力的允许范围之内。

$$g_k^\sigma(A) = \sigma_k - [\sigma_k] \leq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (3.3)$$

其中： $g_k^\sigma(A)$ 为应力约束， $[\sigma_k]$ 、 σ_k 分别为第 k 组杆件的允许应力值和各种工况下的最不利应力值， K 为杆件的总组数。

(2) 变形约束条件：这是使结构在规定的荷载工况下满足所要求的刚度特性而建立的约束条件。一般限制控制节点的位移在一定范围之内。

$$g_{jl}^u(A) = u_{jl} - [u_{jl}] \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, ND) \quad (3.4)$$

其中： $[u_{jl}]$ 、 u_{jl} 分别为特定节点 j 在给定方向 l 上的位移允许值和各种工况下最不利位移值， m 为节点总数， ND 为节点位移约束维数。

(3) 稳定性约束条件：这是要求结构要具有良好的承压稳定性，不会在荷载作用下发生整体失稳破坏而建立起来的约束条件。

(4) 设计变量的取值范围约束：

对于连续截面为上下限约束：
$$A_{\min} \leq A \leq A_{\max} \quad (3.5a)$$

对于离散截面取离散集：
$$A \in \{a_1, a_2, \dots, a_q\} \quad (3.5b)$$

其中： A_{\max} 、 A_{\min} 为分别杆件截面尺寸的上限与下限。

3.2.4 变量连接

实际工程中，考虑到美观、制造、施工复杂度等因素，通常要求结构某些单元的截面保持相同，这种要求若干个单元取同一设计值，即变量连接。桁架结构的尺寸优化中，经过变量连接后，结构的设计变量数少于单元数，各单元的截面变化不再相互独立。

3.3 基于 DE 的桁架尺寸优化设计程序

基于微分演化算法(DE/current-to-best/1)的桁架结构尺寸优化步骤如下：

Step 1: 输入 DE 所需参数,如变异系数 CR 和交叉因子 F; 初始化种群 NP, 使第一代个体变量随机在搜索空间中产生; it=0;

Step 2: 进行结构分析, 计算出每个个体所代表的设计变量对应的结构的性能变量, 如各杆件应力和节点位移;

Step 3: 计算每个个体的评价函数值, 对于违反约束的个体在其评价函数值加上一个非常大的常数罚值 M ; 选出最优个体 \mathbf{x}_{best} ;

Step 4: 对每个个体根据式(2.4)进行变异操作, 并且按照式(2.7)对每个个体(父代)以及变异个体进行交叉操作, 得到新的个体(子代);

Step 5: 计算各子代个体以及父代个体的适应值; 按照式(2.8)选择适应值好的作为下一代种群中的个体;

Step 6: 计算各下一代个体的适应值, 并找到最优的个体; 如果新的最优个体的适应值比上一代 \mathbf{x}_{best} 的适应值好, 则更新 \mathbf{x}_{best} 值, 称为当前最优个体;

Step 7: 满足算法终止条件, 输出最优个体 \mathbf{x}_{best} , 以及最优个体的适应值, 否则返回 Step 2。

基于微分演化算法的桁架结构尺寸优化设计的流程图见图 3.1。

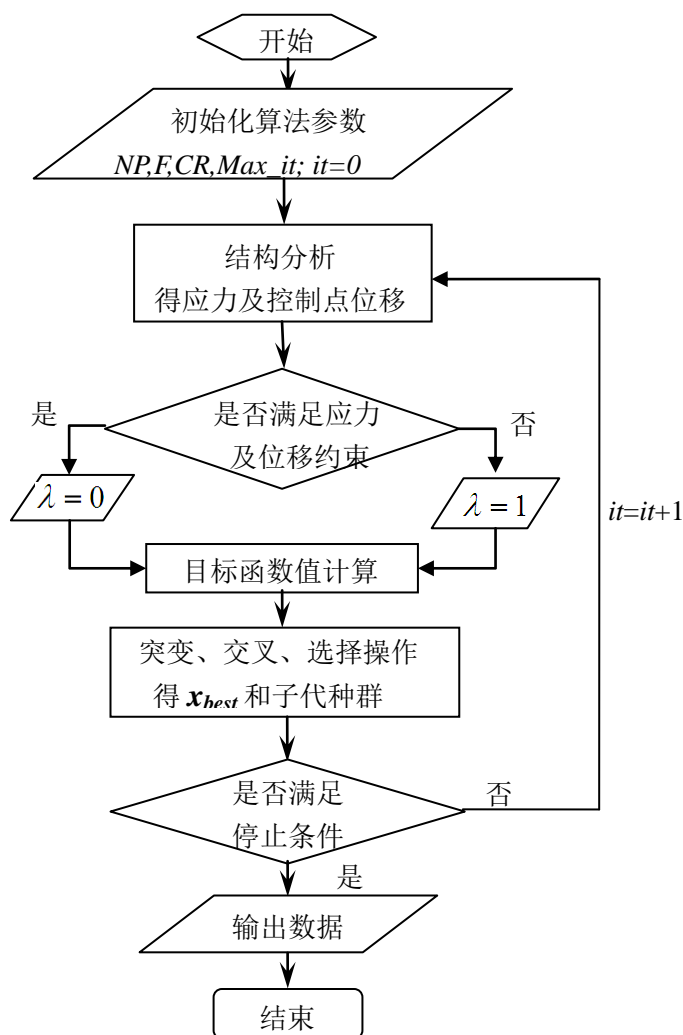


图 3.1 桁架尺寸优化设计流程图

3.4 连续变量桁架单目标尺寸优化设计

3.4.1 数学模型

以 n 杆桁架结构系统为研究对象, 其基本参数(包括弹性模量、材料密度、最大允许应力、最大允许位移等)已知, 在给定的工况下, 在一定面积区域内找出合理的截面面积, 使结构总重量最轻。其数学模型可表示为:

$$\begin{aligned}
 & \text{求 } A = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T, \\
 & \text{min } W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i + \lambda M \\
 & \text{s.t. } g_i^\sigma(A) = [\sigma_i] - \sigma_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, K \\
 & \quad g_{jl}^u(A) = [u_{jl}] - u_{jl} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad l = 1, 2, \dots, ND \\
 & \quad A_{\min} \leq A \leq A_{\max} \\
 & \quad \lambda = 0 \text{ or } 1
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.4.2 桁架优化算例

为了验证算法的有效性, 分别对 10 杆桁架单工况、25 杆桁架多工况、72 杆桁架多工况的情况进行分析。每个种群个体代表一种设计, 个体每个分量即为一个截面尺寸。设置参数如下: NP=5 倍设计变量维数, F1=0.6, F=0.6, CR=0.9, Max_it=200。

算例 (3.1a): 10 杆平面桁架

图 3.2 所示为典型 10 杆平面桁架^[16], 为了分析比较, 本文采用了与文献中相同的单位制。各杆使用相同的材料, 密度 $\rho = 0.11b/in^3$, 弹性模量 $E = 10^7 psi$, 允许应力 $[\sigma] = \pm 25 ksi$, 荷载 $P = 100 kips$, $L = 360 in$ 。截面设计变量范围从 $0.1 in^2$ 到 $35.0 in^2$, 位移约束为各节点 x, y 方向的位移均不超过 $\pm 2.0 in$ 。结构的单元与节点编号见图 3.2。

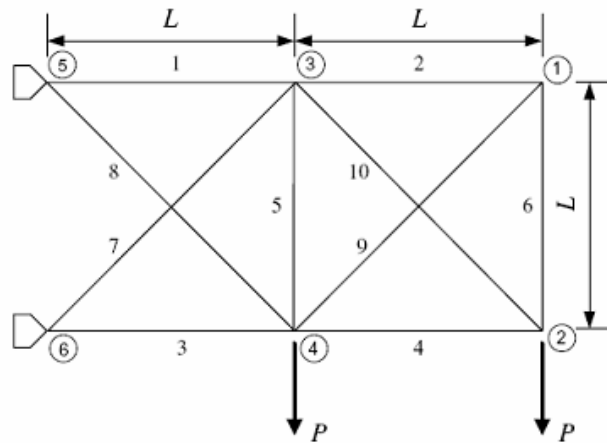


图 3.2 典型 10 杆桁架结构图

将该问题写成优化问题的标准形式如下式：

$$\left\{ \begin{array}{l} A = [A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}]^T \\ \min W = \sum_{i=1}^{10} \rho_i A_i L_i + \lambda M \\ s.t. \begin{cases} |\sigma_k| \leq 25 \text{ ksi} & (k = 1, 2, \dots, 10) \\ d_{\max} \leq 2.0 \text{ in} \\ 0.1 \text{ in}^2 \leq A \leq 35.0 \text{ in}^2 \end{cases} \\ \lambda = 0 \text{ or } 1 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

上式中， d_{\max} 为所有节点的最大位移值， $M = 10e + 30$ 。

为了分析算法的有效性，随机运行 5 次优化程序，评价函数收敛曲线见图 3.3。取最好与最差结果，与其他文献结果进行对比见表 3.1。

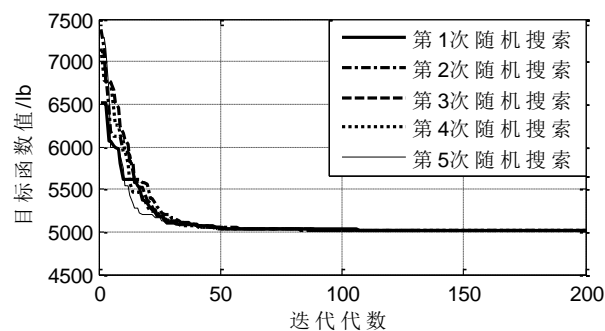


图 3.3 10 杆桁架 5 次随机优化评价函数收敛曲线

表 3.1 10 杆桁架 DE 优化结果与其他文献对比

| 杆件号 | 截面面积 (in^2) | | | | |
|--------------|-----------------|-----------|--------------------|---------------------|-----------------------|
| | DE best | DE worst | GA ^[38] | PSO ^[39] | BB-BC ^[16] |
| 1 | 30.104 | 30.341 | 28.92 | 29.999 | 30.804 |
| 2 | 0.100 | 0.101 | 0.10 | 0.100 | 0.100 |
| 3 | 22.933 | 22.842 | 24.07 | 23.268 | 22.344 |
| 4 | 15.422 | 15.511 | 13.96 | 15.129 | 15.437 |
| 5 | 0.100 | 0.100 | 0.10 | 0.100 | 0.100 |
| 6 | 0.100 | 0.100 | 0.56 | 0.554 | 0.967 |
| 7 | 20.767 | 20.702 | 21.95 | 21.232 | 21.890 |
| 8 | 7.425 | 7.433 | 7.69 | 7.454 | 5.801 |
| 9 | 0.100 | 0.101 | 0.10 | 0.100 | 0.100 |
| 10 | 21.748 | 21.641 | 22.09 | 21.670 | 21.532 |
| 重量(lb) | 5,022.939 | 5,023.104 | 5,076.31 | 5,059.85 | 5,022.65 |
| 平均重量(lb) | 5022.995 | | 5,067.51 | 5,041.92 | 5,025.97 |
| 标准差(lb) | 0.066 | | -- | 17.509 | 2.746 |

图 3.3 显示，迭代 100 次已基本收敛，最优解为 5022.939 lb ，最差解为 5023.104 lb ，均值为 5022.995 lb ，标准方差为 0.066 lb 。从表 3.1 可以看出，DE 5 次搜索得到的最好解虽稍差于 BB-BC，但其均值与标准差都明显小于其他方法，说明 DE 算法具有很好的寻优搜索能力，且比其他算法更加稳定。

算例(3.2a) 25-杆空间桁架(多工况)

25-杆空间桁架结构如图 3.4 所示。结构受两种荷载工况作用(见表 3.2)，应力约束随杆件组别而不同(见表 3.3)，位移约束为各节点在 x, y, z 方向位移均不超过 ± 0.35 in 。 $E = 10^7$ psi ， $\rho = 0.1$ lb/in^3 ， $L = 25$ in 。截面面积范围为 $A_{min} = 0.01$ in^2 ， $A_{max} = 3.4$ in^2

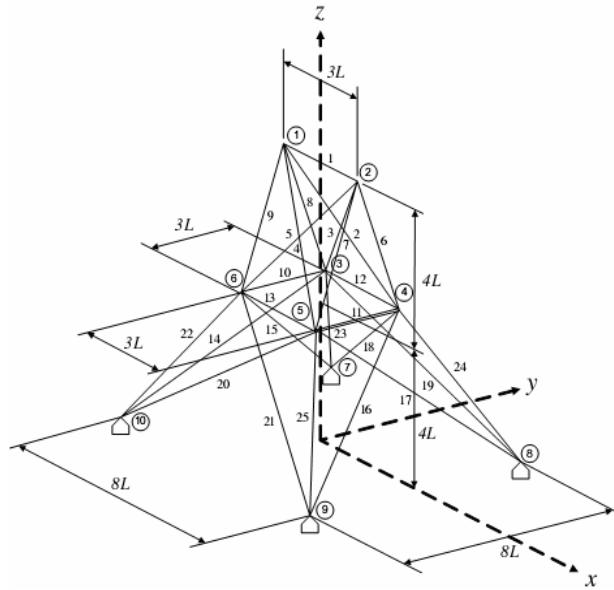


图 3.4 25-杆空间桁架结构图

表 3.2 25-杆桁架多工况荷载表

| 工况 | 节点号 | F_x/kip | F_y/kip | F_z/kip |
|----|-----|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 1 | 1.0 | 10.0 | -5.0 |
| | 2 | 0.0 | 10.0 | 5.0 |
| | 3 | 0.5 | 0.0 | 0.0 |
| | 6 | 0.5 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 1 | 0.0 | 20.0 | -5.0 |
| | 2 | 0.0 | -20.0 | -5.0 |

表 3.3 25-杆桁架杆件分组及允许应力表

| 组别 | 杆件号 | σ^+/ksi | σ^-/ksi |
|----|-------------|----------------|----------------|
| 1 | 1 | 35.0 | 35.092 |
| 2 | 2,3,4,5 | 35.0 | 11.590 |
| 3 | 6,7,8,9 | 35.0 | 17.305 |
| 4 | 10,11 | 35.0 | 35.092 |
| 5 | 12,13 | 35.0 | 35.092 |
| 6 | 14,15,16,17 | 35.0 | 6.759 |
| 7 | 18,19,20,21 | 35.0 | 6.959 |
| 8 | 22,23,24,25 | 35.0 | 11.082 |

随机优化运行 5 次，评价函数收敛曲线见图 3.5，优化结果对比见表 3.4。

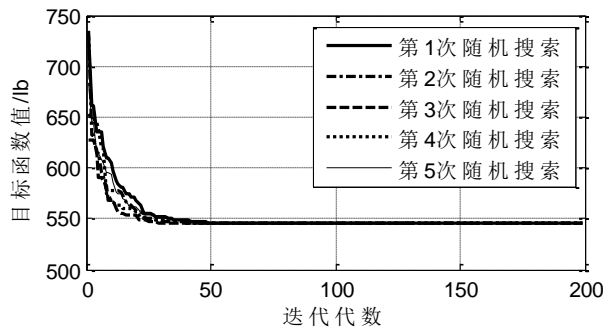


图 3.5 25-杆桁架随机优化 5 次评价函数收敛曲线

表 3.4 25 杆桁架 DE 优化结果与其他文献对比

| 杆件组号 | 截面面积 (in^2) | | | | | |
|--------------|-----------------|----------|--------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|
| | DE best | DE worst | GA ^[32] | PSO ^[40] | ACO ^[14] | BB-BC ^[16] |
| 1 | 0.010 | 0.010 | 0.0100 | 0.010 | 0.010 | 0.010 |
| 2 | 2.043 | 2.085 | 2.0119 | 2.121 | 2.000 | 2.092 |
| 3 | 3.003 | 2.965 | 2.9493 | 2.893 | 2.966 | 2.964 |
| 4 | 0.010 | 0.010 | 0.0100 | 0.010 | 0.010 | 0.010 |
| 5 | 0.010 | 0.010 | 0.0295 | 0.010 | 0.012 | 0.010 |
| 6 | 0.683 | 0.681 | 0.6838 | 0.671 | 0.689 | 0.689 |
| 7 | 1.623 | 1.606 | 1.6798 | 1.611 | 1.679 | 1.601 |
| 8 | 2.672 | 2.688 | 2.6759 | 2.717 | 2.668 | 2.686 |
| 重量(lb) | 545.036 | 545.066 | 545.80 | 545.21 | 545.38 | 545.38 |
| 平均重量(lb) | 545.042 | | -- | 546.34 | 546.34 | 545.78 |
| 标准差(lb) | 0.013 | | -- | 1.478 | 0.94 | 0.491 |

由图 3.5 可见迭代 50 次基本收敛。DE 随机优化 5 次得到的最优解为 545.036 lb ，最差解为 545.066 lb ，均值为 545.042 lb ，标准方差为 0.013。由上表可以看出，DE 算法的最好解与最差解均优于所列文献最优结果，标准方差也明显小于其他算法，说明 DE 算法具有很好的收敛性和很好的稳定性。

算例(3.3a) 72 杆空间桁架（多工况）

图 3.6 为 4 层 72-杆空间桁架结构及其节点、杆件编号方式。按对称性将杆件分为 16 组（见表 3.6）。结构受两个荷载工况的作用（见表 5）。材料特性为 $E = 10^7 \text{ psi}$ ， $\rho = 0.1 \text{ lb/in}^3$ ， $L = 60 \text{ in}$ 。约束条件为：顶层节点沿 x 、 y 方向的最大位移不能超过 $\pm 0.25 \text{ in}$ ，各杆最大允许应力为 $\pm 25 \text{ ksi}$ 。截面积取值范围从 0.1 in^2 到 3.0 in^2 。

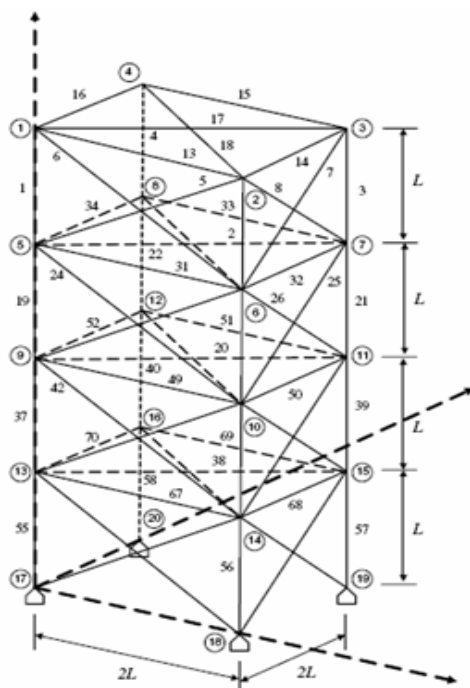


图 3.6 典型 72 杆空间桁架结构图

表 3.5 72 杆桁架荷载工况表

| 工况 | 节点号 | F_x/kip | F_y/kip | F_z/kip |
|----|-----|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 1 | 0.0 | 0.0 | -5.0 |
| | 2 | 0.0 | 0.0 | -5.0 |
| | 3 | 0.0 | 0.0 | -5.0 |
| | 4 | 0.0 | 0.0 | -5.0 |
| 2 | 1 | 5.0 | 5.0 | -5.0 |

在相同的参数和约束条件下，随机对结构进行 5 次优化，评价函数收敛曲线见图 3.7，优化结果与其他文献的结果对比见表 3.6。

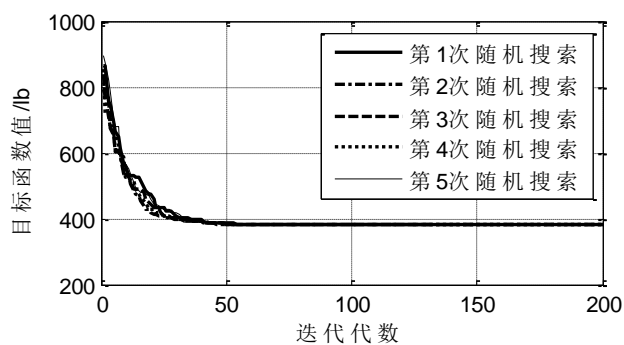


图 3.7 72 杆桁架随机优化 5 次评价函数收敛曲线

表 3.6 杆件分组及优化结果对比表

| 杆件分组 | 杆件号 | 截面面积 (in^2) | | | | |
|--------------|-------|-----------------|----------|--------------------|---------------------|-----------------------|
| | | DE best | DE worst | GA ^[32] | ACO ^[14] | BB-BC ^[16] |
| 1 | 55-58 | 0.1564 | 0.1563 | 0.1557 | 0.156 | 0.1565 |
| 2 | 59-66 | 0.5470 | 0.5460 | 0.5501 | 0.550 | 0.5507 |
| 3 | 67-70 | 0.4074 | 0.4088 | 0.3981 | 0.390 | 0.3922 |
| 4 | 71-72 | 0.5696 | 0.5628 | 0.6749 | 0.592 | 0.5922 |
| 5 | 37-40 | 0.5262 | 0.5346 | 0.5177 | 0.561 | 0.5029 |
| 6 | 41-48 | 0.5173 | 0.5140 | 0.5227 | 0.492 | 0.5172 |
| 7 | 49-52 | 0.1000 | 0.1000 | 0.1000 | 0.100 | 0.1004 |
| 8 | 53-54 | 0.1000 | 0.1001 | 0.1049 | 0.107 | 0.1005 |
| 9 | 19-22 | 1.2705 | 1.2761 | 1.2830 | 1.303 | 1.2476 |
| 10 | 23-30 | 0.5120 | 0.5164 | 0.5028 | 0.511 | 0.5269 |
| 11 | 31-34 | 0.1000 | 0.1000 | 0.1000 | 0.101 | 0.1000 |
| 12 | 35-36 | 0.1000 | 0.1000 | 0.1000 | 0.100 | 0.1012 |
| 13 | 1-4 | 1.8813 | 1.8747 | 1.8562 | 1.948 | 1.8577 |
| 14 | 5-12 | 0.5119 | 0.5118 | 0.4933 | 0.508 | 0.5059 |
| 15 | 13-16 | 0.1000 | 0.1000 | 0.1000 | 0.101 | 0.1000 |
| 16 | 17-18 | 0.1000 | 0.1000 | 0.1000 | 0.102 | 0.1000 |
| 重量(lb) | | 379.619 | 379.636 | 380.32 | 380.24 | 379.85 |
| 平均重量(lb) | | 379.626 | | -- | 383.16 | 382.08 |
| 标准差(lb) | | 0.008 | | -- | 3.66 | 1.912 |

由于设计变量为 16 维，变量维数高，而且为多工况共同作用，利用一般的优化算法对其进行优化时难度较大，利用 DE 则很容易解决该问题。从图 3.7 可以看出迭代 60 次时曲线基本收敛。从表 3.6 可知 DE 算法最优解为 379.619 lb ，均值解为 379.626 lb ，二者均优于其他文献所列结果，同时标准方差 0.008 也明显小于其他算法，说明 DE 算法无论是寻优能力还是稳定性都略胜一筹。

3.5 离散变量结构尺寸单目标优化设计

对于离散优化问题，设计变量 X_i 是从离散集合 S 中取得，即 $X_i \in S = \{A^1, A^2, \dots, A^N\}$ 。离散变量的优化问题是从所有可能的变量组合中选取最优组合的组合优化问题。由于其解空间是离散点的集合，是非连续区域，因此原本用于求解连续变量优化问题的方法与技术必须进行修改才能用于求解离散变量优化的问题，利用 DE 解决离散优化问题就必须将基于实数编码的基本 DE 算法影射到离散编码空间，或对问题变形。目前，基于 DE 的离散优化研究主要集中于前者，即直接将用于解决连续优化问题的 DE 算法用于处理离散优化问题。

Lampinen 等^[41]讨论了如何通过修改 DE 来求解离散-整数混合优化问题, 即 DE 在连续空间进行搜索, 通过保留浮点数的整数部分对目标函数进行评价。Onwubolu 等^[26]利用前向转化机制将整数变量转化为便于 DE 处理的连续变量, 利用向后转化机制将连续变量转化为可以进行目标评价的整数量。

本文利用 Lampinen 和 Zelinka 所提出的改编方式处理离散优化问题^[41], 其基本思想是: 不直接对离散变量值进行优化, 而是优化变量的索引号 i , 仅当计算目标函数值时才使用被索引的离散变量。这样最优解的搜索便可在连续空间内进行, DE 的突变、交叉基本操作均能够得以实现。具体步骤如下:

1) 首先, 集合 S 中以升序排列所有的离散设计变量值。集合 S 中每个元素被赋予一个索引号来代替相应的离散变量值。即: $S = \{A^1, A^2, \dots, A^j, \dots, A^N\}$, $1 \leq j \leq N$ 。其中, N 是离散设计变量数。

2) 其次, 建立一个映射函数 $h(j)$ 来联系集合 S 中的索引号并代表离散变量值 A^j : $h(j) = A^j$ 。因此, 集合 S 中元素的索引号即可对应离散变量值。

DE 算法通过初始化在搜索空间内随机产生 NP 个解向量。其中第 i 个解可以用向量 \mathbf{x}_i 表示为:

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id}, \dots, x_{iD})^T, \quad 1 \leq d \leq D, i = 1, 2, 3, \dots, NP$$

其中 $x_{id} \in \{1, 2, \dots, j, \dots, N\}$ 通过映射函数 $h(j)$ 与离散变量集 $\{A^1, A^2, \dots, A^j, \dots, A^N\}$ 相对应。因此, 解向量能够在连续空间里更新, 而只停留在整数空间的点上。换言之, 向量 \mathbf{x}_i 的所有分量都是整数。种群更新是通过式(2.4)、(2.7)和(3.8)来进行。

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \begin{cases} INT(\mathbf{u}_i^{(G+1)}) & \text{if } (f(INT(\mathbf{u}_i^{(G+1)})) < f(INT(\mathbf{x}_i^{(G)}))) \\ INT(\mathbf{x}_i^{(G)}) & \text{if } (f(INT(\mathbf{u}_i^{(G+1)})) \geq f(INT(\mathbf{x}_i^{(G)}))) \end{cases} \quad (3.8)$$

3.5.1 数学模型

以 n 杆桁架结构系统为研究对象, 离散变量桁架结构截面优化可以描述为: 在系统基本参数 (包括弹性模量、材料密度、最大允许应力、最大允许位移等) 以及工况已知的情况下, 在一定的离散面积集合中寻找出合理的截面面积组合, 使结构总重量最轻。其数学模型可表示为:

$$\text{求 } A = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T$$

$$\left. \begin{aligned}
 \min. \quad & W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i + \lambda M \\
 \text{s.t.} \quad & g_i^\sigma(A) = [\sigma_i] - \sigma_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, K \\
 & g_{jl}^u(A) = [u_{jl}] - u_{jl} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad l = 1, 2, \dots, ND \\
 & A \in \{a_1, a_2, \dots, a_q\} \\
 & \lambda = 0 \text{ or } 1
 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

比较式 (3.7) 与式 (3.9) 可知, 此时变量 A 的取值范围由原来的可行域变成了可行集, 正是这一变化, 使得两种优化问题出现了本质上的区别。

3.5.2 桁架优化算例

为了检验修改后适合离散优化问题的 DE 算法的效果, 将之用于求解上述几个典型桁架的离散优化问题, 并与相关文献中结果进行对比。

取算法参数时, 对两组参数进行测试: (1) F1=0.6, F=0.6, CR=0.9, Max_it=200 (2) F1=0.8, F=0.8, CR=0.9, Max_it=200。结果表明, 第 (1) 组参数出现早熟, 没能收敛到理想的解, 而第二组参数能得到较好的结果, 故本节算例均采用第 (2) 组参数进行优化求解。

算例(3.1b) 10 杆平面桁架

结构布置、杆件系统参数、约束条件、荷载工况均同例(3.1a), 不同的是可用截面尺寸为一包含 41 个元素的离散集(取自文献[16]), {1.62, 1.80, 1.99, 2.13, 2.38, 2.62, 2.88, 2.93, 3.09, 3.13, 3.38, 3.47, 3.55, 3.63, 3.84, 3.87, 3.88, 4.18, 4.22, 4.49, 4.59, 4.80, 4.97, 5.12, 5.74, 7.22, 7.97, 11.5, 13.5, 13.9, 14.2, 15.5, 16.0, 16.9, 18.8, 19.9, 22.0, 22.9, 26.5, 30.0, 和 33.5} in², 其索引依次设为自然数 1~41。

对于这样有 41 个离散变量值的 10 杆桁架的组合优化问题, 搜索空间的规模高达 1.34×10^{16} 次。应用 DE 对此进行 5 次随机寻优, 评价函数的收敛曲线见图 3.8, 优化设计的结果及比较见表 3.7。

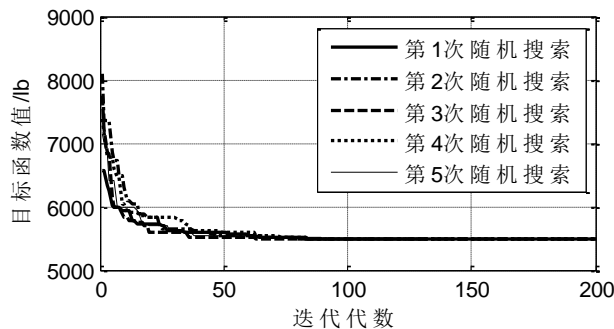


图 3.8 10 杆桁架随机优化 5 次评价函数收敛曲线

表 3.7 10 杆桁架优化设计结果与文献对比

| 杆件号 | 截面面积 (in^2) | | | | |
|--------------|-----------------|----------|--------------------|---------------------|-----------------------|
| | DE best | DE worst | GA ^[42] | PSO ^[14] | BB-BC ^[16] |
| 1 | 33.5 | 33.5 | 33.5 | 33.5 | 33.5 |
| 2 | 1.62 | 1.62 | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| 3 | 22.9 | 22.9 | 22.9 | 22.9 | 22.9 |
| 4 | 14.2 | 15.5 | 14.2 | 14.2 | 14.2 |
| 5 | 1.62 | 1.62 | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| 6 | 1.62 | 1.62 | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| 7 | 22.9 | 22.9 | 22.9 | 22.9 | 22.9 |
| 8 | 7.97 | 7.97 | 7.97 | 7.97 | 7.97 |
| 9 | 1.62 | 1.62 | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| 10 | 22.0 | 22.0 | 22.0 | 22.0 | 22.0 |
| 重量(lb) | 5490.74 | 5491.72 | 5490.74 | 5490.74 | 5490.74 |
| 平均重量(lb) | 5,490.93 | -- | -- | 5,510.52 | 5,494.17 |
| 标准差(lb) | 0.438 | -- | -- | 17.509 | 2.746 |

运行 DE 优化程序 5 次,得到的最优设计为 5,490.74 lb ,此结果与 GA, ACO 和 BB-BC 等算法得到的最优结果均一致,标准差为 0.438。从表 3.7 可见,无论是优化结果均值还是标准差均小于文献中其他算法的结果,表明了 DE 算法具有很强的寻优能力和稳定性。

算例(3.2b) 25 杆空间桁架(单工况)

结构图同例(3.2a),各杆使用相同的材料,密度 $\rho=0.1 lb/in^3$,弹性模量 $E=10^7 psi$,允许应力 $[\sigma]=\pm 40 ksi$ 。各节点 x,y,z 三向允许的最大位移分别为 $\pm 0.35in$ 。离散截面面积集合为从 $0.1 in^2$ 到 $3.4 in^2$ 中 $0.1 in^2$ 为增量的 34 个截面。对于此 8 组杆件的组合优化问题将会产生的组合数为 1.79×10^{12} 。设计荷载为单工况,见表 3.8。

表 3.8. 25 杆桁架单工况荷载表

| 节点 | $F_x/kips$ | $F_y/kips$ | $F_z/kips$ |
|----|------------|------------|------------|
| 1 | 1.0 | -10.0 | -10.0 |
| 2 | 0.0 | -10.0 | -10.0 |
| 3 | 0.5 | 0.0 | 0.0 |
| 6 | 0.6 | 0.0 | 0.0 |

采用本文算法随机搜索 5 次,目标函数收敛曲线见图 3.9,优化算法迭代到 200 代的结果与文献结果的对比见表 3.9。

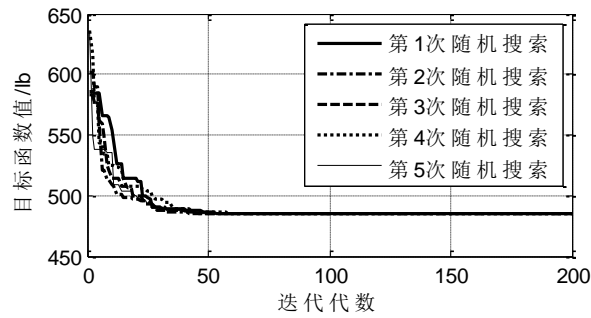


图 3.9.25 杆桁架离散优化目标函数收敛曲线

表 3.9.25 杆桁架优化设计结果与文献对比

| 杆件号 | 截面面积 (in^2) | | | | |
|----------|-----------------|----------|--------------------|---------------------|-----------------------|
| | DE best | DE worst | GA ^[32] | PSO ^[14] | BB-BC ^[16] |
| 1 | 0.10 | 0.10 | 0.10 | 0.10 | 0.10 |
| 2 | 0.30 | 0.30 | 0.50 | 0.30 | 0.30 |
| 3 | 3.40 | 3.40 | 3.40 | 3.40 | 3.40 |
| 4 | 0.10 | 0.10 | 0.10 | 0.10 | 0.10 |
| 5 | 2.10 | 2.10 | 1.90 | 2.10 | 2.10 |
| 6 | 1.00 | 1.00 | 0.90 | 1.00 | 1.00 |
| 7 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 |
| 8 | 3.40 | 3.40 | 3.40 | 3.40 | 3.40 |
| 重量(lb) | 484.85 | 484.85 | 485.05 | 484.85 | 484.85 |
| 平均重量(lb) | 484.85 | | -- | 485.20 | 485.10 |
| 标准差(lb) | 0 | | -- | 4.71 | 0.44 |

DE 算得的最轻桁架重 484.85 lb。这个结果与表中 ACO 和 BB-BC 算法得到的结果相同，而优于 GA 的结果。运行 5 次得到的结果相同，标准差为 0，说明 DE 算法比其他算法稳定性更好。

算例(3.3b) 72 杆空间桁架

结构图及杆件编号、分组同例(3.3a)。材料弹性模量、密度、结构的应力和位移约束、荷载工况均同前。本算例分两种情况对该桁架进行离散优化。Case 1: 离散变量值取自集合 $D = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 3.0, 3.1, 3.2\}$ (in^2); Case 2: 离散变量值取自于表 3.10。

对于 Case 1, 组合分析数高达 1.209×10^{24} ; Case 2, 组合数则高达 7.923×10^{28} , 足以说明该组合优化问题的极度复杂性。

图 3.10 和 3.11 为两种情况下的目标函数收敛曲线。表 3.10 和 3.11 为本文

优化结果与其他文献对比。

表 3.10 美国 ASIC 型钢规范可用截面面积表

| NO. | $in.^2$ | NO. | $in.^2$ | NO. | $in.^2$ | NO. | $in.^2$ |
|-----|---------|-----|---------|-----|---------|-----|---------|
| 1 | 0.111 | 17 | 1.563 | 33 | 3.840 | 49 | 11.500 |
| 2 | 0.141 | 18 | 1.620 | 34 | 3.870 | 50 | 13.500 |
| 3 | 0.196 | 19 | 1.800 | 35 | 3.880 | 51 | 13.900 |
| 4 | 0.250 | 20 | 1.990 | 36 | 4.180 | 52 | 14.200 |
| 5 | 0.307 | 21 | 2.130 | 37 | 4.220 | 53 | 15.500 |
| 6 | 0.391 | 22 | 2.380 | 38 | 4.490 | 54 | 16.000 |
| 7 | 0.442 | 23 | 2.620 | 39 | 4.590 | 55 | 16.900 |
| 8 | 0.563 | 24 | 2.630 | 40 | 4.800 | 56 | 18.800 |
| 9 | 0.602 | 25 | 2.880 | 41 | 4.970 | 57 | 19.900 |
| 10 | 0.766 | 26 | 2.930 | 42 | 5.120 | 58 | 22.000 |
| 11 | 0.785 | 27 | 3.090 | 43 | 5.740 | 59 | 22.900 |
| 12 | 0.994 | 28 | 1.130 | 44 | 7.220 | 60 | 24.500 |
| 13 | 1.000 | 29 | 3.380 | 45 | 7.970 | 61 | 26.500 |
| 14 | 1.228 | 30 | 3.470 | 46 | 8.530 | 62 | 28.000 |
| 15 | 1.266 | 31 | 3.550 | 47 | 9.300 | 63 | 30.000 |
| 16 | 1.457 | 32 | 3.630 | 48 | 10.850 | 64 | 33.500 |

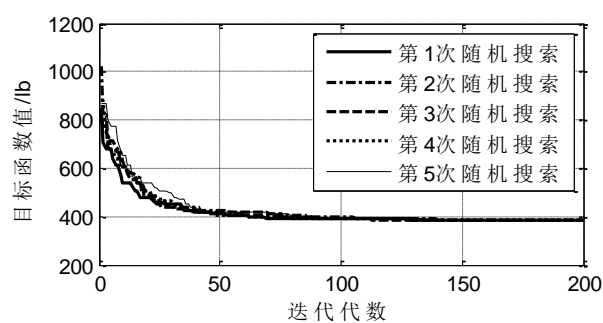


图 3.10 72 杆桁架 case1 情况下目标函数收敛曲线

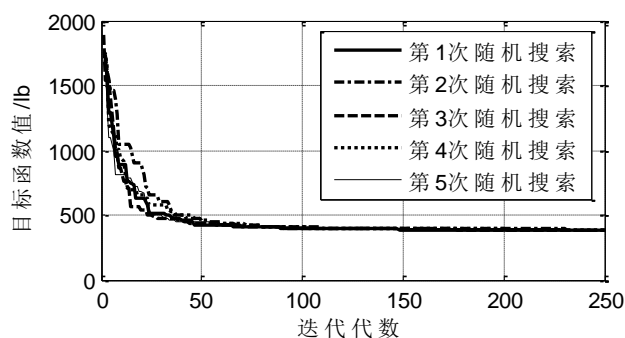


图 3.11 72 杆桁架 case2 情况下目标函数收敛曲线

表 3.11 72 杆桁架优化结果对比表(case 1)

| 杆件组 | 截面面积 (in^2) | | | | | |
|-------------|-----------------|----------|--------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| | DE best | DE worst | Wu ^[43] | Lee ^[44] | PSO ^[34] | HPSO ^[34] |
| 1 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.4 | 0.2 |
| 2 | 0.6 | 0.6 | 0.5 | 0.5 | 1.9 | 0.5 |
| 3 | 0.4 | 0.4 | 0.5 | 0.4 | 0.7 | 0.3 |
| 4 | 0.6 | 0.6 | 0.7 | 0.6 | 1.6 | 0.7 |
| 5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.6 | 2.2 | 0.5 |
| 6 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 1.9 | 0.5 |
| 7 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.1 |
| 8 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.9 | 0.1 |
| 9 | 1.4 | 1.3 | 1.3 | 1.4 | 2.1 | 1.4 |
| 10 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.6 | 1.5 | 0.5 |
| 11 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.6 | 0.1 |
| 12 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.1 |
| 13 | 1.9 | 2.0 | 1.5 | 1.9 | 2.6 | 2.1 |
| 14 | 0.5 | 0.5 | 0.7 | 0.5 | 1.5 | 0.6 |
| 15 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.1 |
| 16 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 重量(lb) | 385.54 | 385.54 | 400.66 | 387.94 | 1089.88 | 388.94 |
| 标准差(lb) | 0 | | -- | | | |

从表 3.11 可见, case1 下可以得到两种相同的可替代的最轻质量设计, 如下: $\{0.2\ 0.6\ 0.4\ 0.6\ 0.5\ 0.5\ 0.1\ 0.1\ 1.4\ 0.5\ 0.1\ 0.1\ 1.9\ 0.5\ 0.1\ 0.1\}$ (in^2) 和 $\{0.2\ 0.6\ 0.4\ 0.6\ 0.5\ 0.5\ 0.1\ 0.1\ 1.3\ 0.5\ 0.1\ 0.1\ 2.0\ 0.5\ 0.1\ 0.1\}$ (in^2)。而其他算法均没能得到这样的最优解, 得到的最好结果仅为 Lee^[44] 的 387.94 lb 。

表 11. 72 杆桁架优化结果对比表(case 2)

| 杆件组 | 截面面积 (in^2) | | | | |
|-----|-----------------|----------|--------------------|---------------------|----------------------|
| | DE best | DE worst | Wu ^[43] | PSO ^[34] | HPSO ^[34] |
| 1 | 0.196 | 0.196 | 0.196 | 1.990 | 0.391 |
| 2 | 0.563 | 0.563 | 0.602 | 1.620 | 1.457 |
| 3 | 0.391 | 0.442 | 0.307 | 1.563 | 0.766 |
| 4 | 0.563 | 0.602 | 0.766 | 1.266 | 1.563 |
| 5 | 0.563 | 0.563 | 0.391 | 3.09 | 1.563 |
| 6 | 0.442 | 0.563 | 0.391 | 1.228 | 1.228 |
| 7 | 0.111 | 0.111 | 0.141 | 0.111 | 0.111 |
| 8 | 0.111 | 0.111 | 0.111 | 0.563 | 0.196 |
| 9 | 1.228 | 1.266 | 1.800 | 3.09 | 2.88 |
| 10 | 0.563 | 0.563 | 0.602 | 0.785 | 1.457 |

续表3.12 72杆桁架优化结果对比表(case 2)

| 杆件组 | 截 面 面 积 (in ²) | | | | |
|-------------------------|----------------------------|----------|--------------------|---------------------|----------------------|
| | DE best | DE worst | Wu ^[43] | PSO ^[34] | HPSO ^[34] |
| 11 | 0.111 | 0.111 | 0.141 | 0.563 | 0.141 |
| 12 | 0.111 | 0.111 | 0.307 | 0.785 | 0.111 |
| 13 | 1.990 | 1.800 | 1.563 | 7.22 | 4.97 |
| 14 | 0.563 | 0.442 | 0.766 | 1.80 | 1.228 |
| 15 | 0.111 | 0.111 | 0.141 | 1.13 | 0.111 |
| 16 | 0.111 | 0.111 | 0.111 | 0.196 | 0.111 |
| Weight(lb) | 389.33 | 389.46 | 427.203 | 1209.48 | 933.09 |
| W _{stdev} (lb) | 0.55 | | -- | | |

由于case 2的复杂性，文献中其他算法求解均十分困难，而且像PSO,HPSO在运行2000代的情况下也均无法收敛到一个令人满意的解，显而易见，对本章最复杂的72杆桁架多离散设计变量的算例，DE随机5次寻优200代均能在适当参数下得到非常理想的结果，表明了DE最为优化手段具有收敛性速度快、稳定性好和不易陷入局部最优解等优点。

3.6 本章小结

本章首先介绍了桁架结构尺寸优化的基本概念和主要的优化方法。然后针对传统优化算法通用性差、效率不高，以及一些现代智能算法求解复杂离散优化问题收敛性不佳等问题，提出了一种基于微分演化算法的桁架优化设计新方法。通过对几个典型桁架进行尺寸优化设计分析与文献 BB-BC, PSO, ACO 算法的结果进行了对比，得出以下结论：

- (1) DE 算法具有收敛速度快、稳定性好的特点。
- (2) DE 算法可以有效地进行连续变量桁架尺寸优化设计也可进行复杂的离散变量桁架尺寸优化设计，且其结果优于 BB-BC、PSO、GA 等算法。

第 4 章 基于微分演化算法的桁架形状优化设计

4.1 引言

结构的几何形状不仅决定了其占有空间的大小,而且直接影响着结构的受力性态。结构的形状优化是指在结构的拓扑构形不变的情况下,同时对杆件的截面尺寸和节点位置两类变量进行优化,使结构在满足约束条件的同时达到目标函数值最小。由于设计变量的数目多,且两类变量的性质截然不同,对目标函数和约束函数具有不同的非线性性质,两类变量的耦合将导致数学上的困难甚至使计算不收敛^[45]。以往的解决办法是分层优化方法^[46, 47],该方法将截面变量和形状变量分开,分级进行优化,两级优化交替进行直至收敛。这样做是为了使每一阶段所考虑的数学模型规模变小,求解相对容易。但由于分层优化导致变量空间上的分割,带来解空间可行域的缩小,这样可能丢失真正的最优解,因此形状和尺寸优化分开单独研究不能保证目标函数值真的最小。因此发展一些更加通用、有效的全局优化算法来解决形状优化问题成为一种迫切的需要。

近年来工程优化领域逐渐涌现出一些智能优化算法,如遗传算法(GA)、微粒群算法(PSO)、蚁群算法(ACO)等,它们大多对目标函数和约束函数表达上的要求较为宽松,因而较传统算法而言有更广泛的应用范围。为得到全局最优解,考虑两类设计变量的耦合并解决因耦合而导致的收敛困难,一些智能优化方法已被应用于形状优化。Wang 等^[48]利用遗传算法解决在频率约束下的桁架形状优化。Tang 等^[49]用改进的遗传算法求解考虑尺寸、形状、拓扑变量的桁架优化问题。刘齐茂等^[50]将模拟退火算法用于两类变量耦合的桁架结构形状优化取得了很好的效果。Soh^[51]将 Genetic Programming 算法用于求解桁架结构的形状优化问题。Zielinski^[52]将 DE 和纳维-斯托克斯算子用于涡轮的形状优化。

本章提出在微分演化算法中综合考虑两类设计变量耦合的一种桁架结构形状优化设计新方法,该方法也能将连续变量和离散变量同时考虑进行优化求解,本章先给出桁架形状优化的数学描述,后通过对典型算例的分析并与文献结果的对比,来评价本文所提方法用于桁架形状优化的效果。

4.2 桁架结构形状优化的数学描述

桁架结构形状优化问题的求解,即寻求最优的设计变量 A , 以使目标函数

值最小，同时还满足相关的约束条件。

4.2.1 设计变量

桁架结构的形状优化设计包含两类设计变量：描述桁架结构形状的节点坐标和杆件截面面积。本文考虑两类不同性质变量间的耦合作用，故定义设计变量为

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_n, X_1, X_2, \dots, X_l]^T \quad (4.1)$$

其中： A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_n 为杆件的截面积， X_1 、 X_2 、 \dots 、 X_l 为变量连接后各节点的坐标。

4.2.2 目标函数

桁架形状优化设计中，以桁架的重量最小作为优化的目标，本文选择目标函数包含桁架的总重量和处理约束的惩罚项：

$$\min W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i(X) + \lambda M \quad (4.2)$$

其中： W 为结构的重量， $L_i(X)$ 为第 i 组杆件的长度， A_i 、 ρ_i 分别为第 i 组杆件的截面积及密度， n 为截面设计变量进行变量连接后杆件的组数， M 为预先定义的一个大数； λ 为罚函数因子，用来处理约束问题。当结构设计变量满足约束条件时 $\lambda=0$ ，否则 $\lambda=1$ 。

4.2.3 约束条件

桁架结构的形状优化还受到材料的性能、实际使用要求等条件的限制，因此需要考虑以下几种约束条件。

①应力约束条件：

$$g_k^\sigma(A, X) = \sigma_k - [\sigma_k] \leq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (4.3)$$

其中： $g_k^\sigma(A, X)$ 为应力约束， $[\sigma_k]$ 、 σ_k 分别为第 k 组杆件的允许应力值和各种工况下的最不利应力值， K 为杆件的总组数。

②节点的位移约束条件：

$$g_{jl}^u(A, X) = [u_{jl}] - u_{jl} \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, ND) \quad (4.4)$$

其中： $[u_{jl}]$ 、 u_{jl} 分别为特定节点 j 在给定方向 l 上的位移允许值和各种工况下最不利位移值， m 为节点总数， ND 为节点位移约束维数。

③设计变量的上下限约束：

$$\text{对于连续截面变量：} \quad A_{\min} \leq A \leq A_{\max}$$

$$\begin{aligned} \text{对于离散截面变量: } & A_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_q\}; \\ \text{位移设计变量: } & \underline{x}_c \leq x_c \leq \bar{x}_c \quad (c = 1, 2, \dots, t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中: A_i 为第 i 根杆件的截面积, A_{\max} 、 A_{\min} 为分别设定的杆件的截面尺寸的上限与下限, $\{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ 为离散截面集; \bar{x}_c 、 \underline{x}_c 分别是第 c 坐标的上下限, t 为节点变量数。

④局部稳定约束: 当杆件受压时, 存在压杆稳定问题。在形状优化过程中, 节点位置是变化的, 所以杆件长度和压杆稳定系数也是动态变化的。因此, 受压杆局部稳定性约束条件为

$$g_i^\sigma(A, X) = \varphi_i[\sigma_i] - \sigma_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (4.6)$$

其中: $g_i^\sigma(A, X)$ 为考虑压杆稳定的应力约束, φ_i 为对应第 i 根受压杆件的受压稳定系数, q 为受压杆件的总数。

4.3 基于 DE 的桁架形状优化程序

对桁架结构进行形状优化时, 将形状变量和尺寸变量分开考虑可降低求解的难度, 但不能保证得到全局最优解。为了解决两类变量间的耦合问题, 本文将尺寸变量和节点坐标变量同时考虑, 即在设计变量中同时包含了形状变量和尺寸变量两个部分。采用 DE 算法求解时, 很容易实现对两类变量的综合考虑, 每个个体表示一种设计方案, 个体向量中包含了形状变量与尺寸变量两部分的信息。另外, 优化过程中由于节点坐标是变化的, 结构分析时要依据设计变量值重新输入节点坐标, 这可能导致结构刚度矩阵发生奇异现象。因此, 结构分析时先检查刚度矩阵是否为奇异矩阵, 如果是, 则给杆件赋一个很大的应力值和位移值, 使其违反约束, 此时该个体将和父代个体进行比较时, 将被抛弃而不能进入下一代种群。

采用 Matlab 进行编程计算, 基于 DE 算法的桁架形状优化的流程如下:

Step 1: 输入 DE 算法所需参数, F , CR , Max_it ; 初始化种群, 使第一代个体变量随机在搜索空间中产生; $it = 0$;

Step 2: 进行结构分析, 计算出每个个体所代表的设计变量对应的结构的形态变量, 如各杆件应力和节点位移;

Step 3: 计算每个个体的评价函数值, 对于违反约束的个体在其评价函数值加上一个非常大的常数罚值 M , 选出最优个体 x_{best} ;

Step 4: 对每个个体进行变异操作, 并且对每个个体 (父代) 以及变异个体进行交叉操作, 得到新的个体 (子代);

Step 5: 计算每一个子代个体以及父代个体的目标函数值; 选择适应值好的作为下一代种群中的个体;

Step 6: 计算每个下一代个体的目标函数值, 并找到最优的个体; 如果新的最优个体的目标函数值比上一代 x_{best} 的目标函数值更优, 则更新 x_{best} 值, 称为当前最优个体;

Step 7: 满足算法终止条件, 输出最优个体 x_{best} 以及最优个体的目标函数值, 否则返回 Step 2。

基于微分演化算法的桁架结构形状优化设计的流程图见图 4.1。

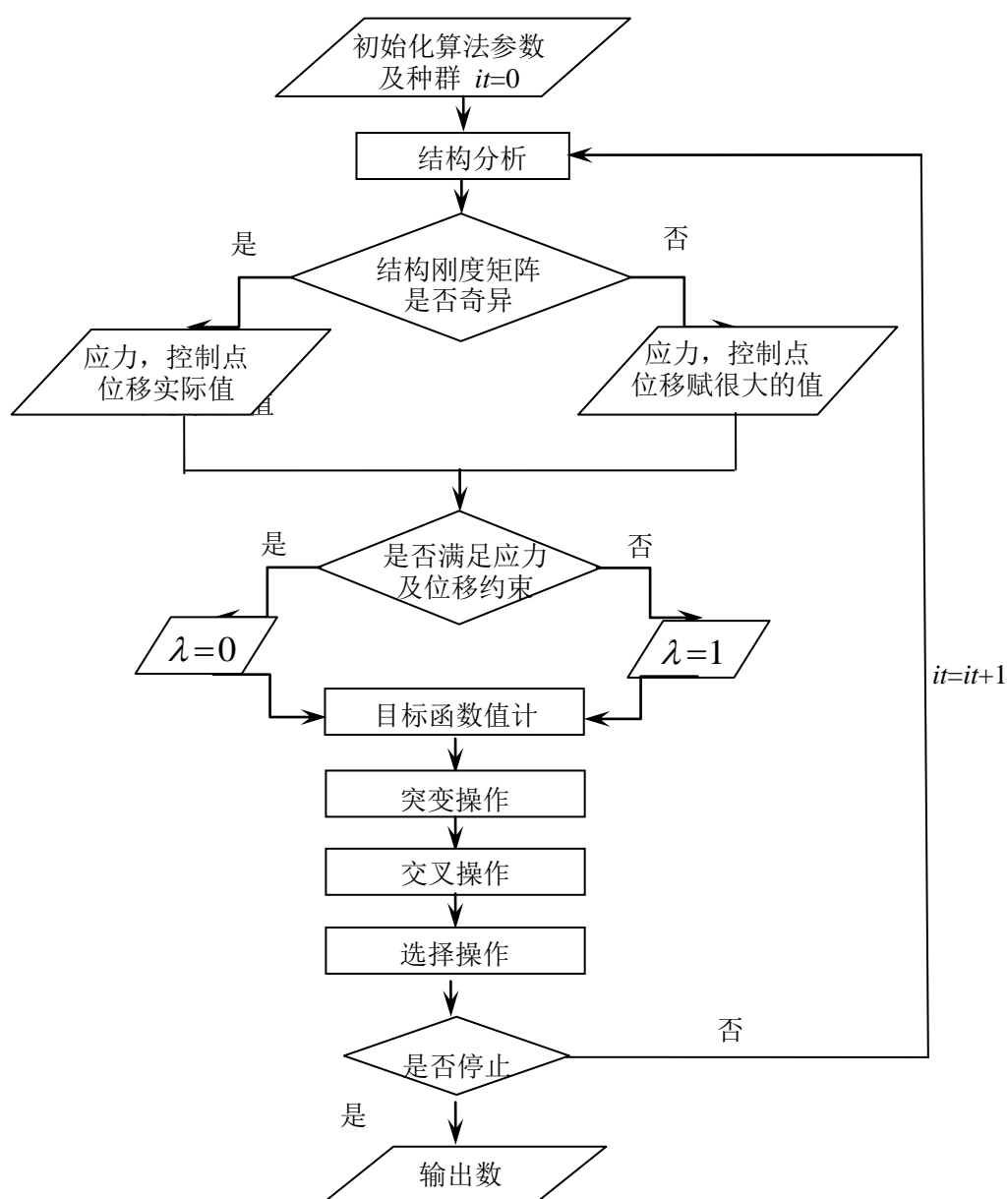


图 4.1 基于 DE 的桁架形状优化程序流程图

为了验证 DE 对桁架结构进行形状优化设计的有效性，并考虑截面设计变量的特点，以下分别按照截面设计变量取为连续值和离散值的情况在 4.4 和 4.5 节对几个典型桁架进行形状优化，并将优化结果与其他方法进行比较。

4.4 连续截面变量的形状优化设计

连续截面变量的桁架形状优化选用 3 个算例，基本参数取以下值时可以达到比较理想的收敛效果：NP=5 倍设计变量维数，F1=0.75，F=0.6，CR=0.85。

算例(4.1a) 25 杆空间桁架之一

此例取于文献[46]，25 杆桁架结构同图 3.4。各杆使用相同的材料，密度 $\rho = 2768 \text{kg/m}^3$ ，弹性模量 $E = 68950 \text{MPa}$ 。1、2 节点的 x、y 方向位移约束 $d_{\max} = 8.89 \text{mm}$ 。两种工况下节点荷载见表 4.1。杆件分组及许用应力见表 4.2。考虑到工程实际情况，本例杆件尺寸下界取 64.5mm^2 ，而非文献[46]中的 6.45mm^2 。

表 4.1 25 杆桁架荷载工况及节点荷载表

| 工况 | 节点号 | F_x/kN | F_y/kN | F_z/kN |
|----|-----|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | 1 | 4.448 | 44.482 | -22.241 |
| | 2 | 0 | 44.482 | -22.241 |
| | 3 | 22.241 | 0 | 0 |
| | 6 | 22.241 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 88.964 | -22.241 |
| | 2 | 0 | -88.964 | -22.241 |

表 4.2 25 杆桁架杆件分组及允许应力表

| 组号 | 杆件号 | 允许应力 | |
|----|----------------|-----------------------|-----------------------|
| | | σ_+/MPa | σ_-/MPa |
| A1 | 1 | 275.8 | -242.04 |
| A2 | 2, 3, 4, 5 | 275.8 | -79.94 |
| A3 | 6, 7, 8, 9 | 275.8 | -119.36 |
| A4 | 10, 11 | 275.8 | -242.04 |
| A5 | 12, 13 | 275.8 | -242.04 |
| A6 | 14, 15, 16, 17 | 275.8 | -46.62 |
| A7 | 18, 19, 20, 21 | 275.8 | -47.99 |
| A8 | 22, 23, 24, 25 | 275.8 | -76.44 |

优化过程中桁架保持关于 X-Z 平面和 Y-Z 平面对称，由对称性取设计变量为 $[A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, X_2, Y_2, Z_2, X_4, Y_4, Z_4]^T$ ，节点坐标见表 4.3。

25-杆空间桁架形状优化的评价函数收敛曲线见图 4.2。优化后桁架在两种

工况下的杆件应力及对应的应力约束值见表 4.4，最终形状见图 4.3。为了验证本文方法的有效性，跟文献[48,55]结果对比见表 4.5。

表 4.3 25 杆空间桁架形状优化节点坐标

| 节点 | x | y | z |
|----|-------|-------|----|
| 1 | -X2 | Y2 | Z2 |
| 2 | X2 | Y2 | Z2 |
| 3 | -X4 | Y4 | Z4 |
| 4 | X4 | Y4 | Z4 |
| 5 | X4 | -Y4 | Z4 |
| 6 | -X4 | -Y4 | Z4 |
| 7 | -2540 | 2540 | 0 |
| 8 | 2540 | 2540 | 0 |
| 9 | 2540 | -2540 | 0 |
| 10 | -2540 | -2540 | 0 |

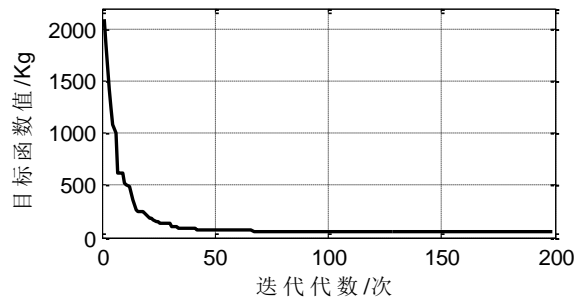


图 4.2 25 杆桁架形状优化的评价函数收敛曲线

表 4.4 25 杆空间桁架两种工况下杆件应力以及对应的应力约束

| 杆件 | 工况 1 | 工况 2 | 许用应力 | |
|----|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| | σ/MPa | σ/MPa | $\sigma+/\text{MPa}$ | $\sigma-/\text{MPa}$ |
| 1 | -24.902 | -33.508 | 275.8 | -242.04 |
| 2 | -78.769 | -38.626 | 275.8 | -79.94 |
| 3 | 54.937 | -35.893 | 275.8 | -79.94 |
| 4 | 57.714 | 12.779 | 275.8 | -79.94 |
| 5 | -79.87 | 15.459 | 275.8 | -79.94 |
| 6 | 72.483 | -80.561 | 275.8 | -119.36 |
| 7 | -119.057 | 37.753 | 275.8 | -119.36 |
| 8 | -118.732 | -77.775 | 275.8 | -119.36 |
| 9 | 79.257 | 40.506 | 275.8 | -119.36 |
| 10 | 21.162 | 1.570 | 275.8 | -242.04 |
| 11 | 37.137 | 8.933 | 275.8 | -242.04 |
| 12 | 79.711 | 253.031 | 275.8 | -242.04 |
| 13 | 69.322 | -127.006 | 275.8 | -242.04 |
| 14 | -6.802 | 20.865 | 275.8 | -46.61 |
| 15 | -16.902 | -44.146 | 275.8 | -46.61 |
| 16 | -31.861 | 15.331 | 275.8 | -46.61 |
| 17 | 11.912 | -46.592 | 275.8 | -46.61 |
| 18 | 45.521 | 17.621 | 275.8 | -46.61 |
| 19 | -46.172 | -31.342 | 275.8 | -46.61 |
| 20 | -46.610 | 26.478 | 275.8 | -46.61 |

续表 4.4 25 杆空间桁架两种工况下杆件应力以及对应的应力约束

| 杆件 | 工况 1 | 工况 2 | 许用应力 | |
|-----------|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| | σ/MPa | σ/MPa | $\sigma+/\text{MPa}$ | $\sigma-/\text{MPa}$ |
| 21 | 45.082 | -21.707 | 275.8 | -46.61 |
| 22 | -3.616 | 38.390 | 275.8 | -76.437 |
| 23 | -34.902 | -69.877 | 275.8 | -76.437 |
| 24 | -5.681 | -76.392 | 275.8 | -76.437 |
| 25 | -33.117 | 31.861 | 275.8 | -76.437 |

注：表中加粗的数字表示相应的杆件达到满应力，后面表格中此类情况不再标注。

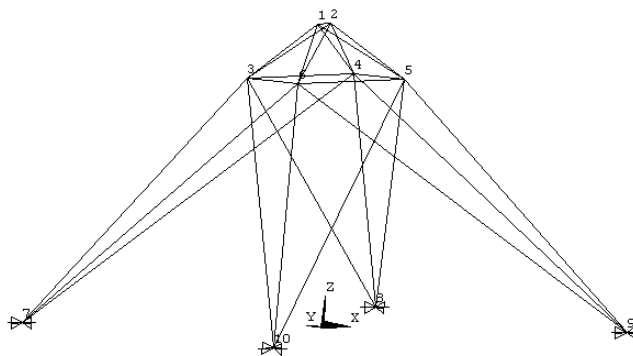


图 4.3 25 杆空间桁架最佳化形状图

表 4.5 25 杆空间桁架形状优化结果比较

| 设计变量 | 本文结果/ mm^2 | 文献 ^[46] / mm^2 | 文献 ^[53] / mm^2 |
|--------|---------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| A1 | 175.48 | 6.45 | 77.1 |
| A2 | 637.89 | 545.8 | 562.4 |
| A3 | 552.05 | 396.1 | 462.5 |
| A4 | 64.5 | 6.45 | 64.5 |
| A5 | 82.55 | 6.45 | 66.7 |
| A6 | 64.65 | 65.8 | 177.5 |
| A7 | 65.43 | 318.7 | 64.5 |
| A8 | 749.88 | 678.1 | 679 |
| X2 | 100.09 | 254 | 102.2 |
| Y2 | 39.96 | 0 | 2.4 |
| Z2 | 3556.03 | 3556 | 3556.4 |
| X4 | 770.15 | 520.7 | 781.3 |
| Y4 | 511.76 | 886.4 | 686.4 |
| Z4 | 2915.67 | 2474 | 2886.1 |
| 总重量/kg | 55.83 | 61.5 | 56.82 |

由图 4.2 可知, 25 杆空间桁架的形状优化计算在迭代大约 70 次后已经收敛。表 4.4 中, 第一种工况下杆件 2、5、7、8、19、20 达到满应力状态, 第二种工况下杆件 17、24 达到满应力状态。由表 4.5 知, 优化后桁架的总重量为 55.83 kg, 优于文献[46,53]的结果。

算例(4.1b) 25 杆空间桁架之二

本例也取自于文献[46]，大多数原始数据和例 4.1a 相同，不同的是：节点 1、2 的位置在优化过程中保持固定，节点 7、8、9、10 必须在 X-Y 平面内，因此节点坐标设计变量设为 $[X_4, Y_4, Z_4, X_8, Y_8]^T$ ，其他节点的位置坐标根据对称性得出。设计变量为 $[A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, X_4, Y_4, Z_4, X_8, Y_8]^T$ ，杆件的许用应力为 $[-275.8, 275.8] \text{MPa}$ 。杆件有动态局部稳定性约束，其形式为 $-39.27EA_i / L_i^2 \leq \sigma_{il}$ ，(杆件号 $i=1, 2, \dots, 25$ ，工况数 $l=1, 2$)，节点坐标见表 4.6。

表 4.6 25 杆空间桁架节点坐标

| 节点 | x | y | z |
|----|--------|-----|--------|
| 1 | -952.5 | 0 | 5080.0 |
| 2 | 952.5 | 0 | 5080.0 |
| 3 | -X4 | Y4 | Z4 |
| 4 | X4 | Y4 | Z4 |
| 5 | X4 | -Y4 | Z4 |
| 6 | -X4 | -Y4 | Z4 |
| 7 | -X8 | Y8 | 0 |
| 8 | X8 | Y8 | 0 |
| 9 | X8 | -Y8 | 0 |
| 10 | -X8 | -Y8 | 0 |

此 25-杆空间桁架形状优化的评价函数收敛曲线见图 4.4，优化后的桁架在两种工况下的杆件应力及对应的应力约束值见表 4.7，最终形状见图 4.5。文献 [46, 53] 及本文结果比较见表 4.8。

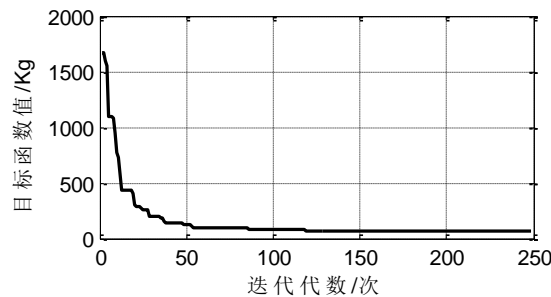


图 4.4 25 杆空间桁架形状优化的评价函数收敛曲线

表 4.7 25 杆空间桁架两种工况下杆件应力以及对应的应力约束

| 杆件 | 工况 1 | 工况 2 | 允许应力 | |
|----|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| | σ / MPa | σ / MPa | $\sigma+ / \text{MPa}$ | $\sigma- / \text{MPa}$ |
| 1 | 36.490 | 20.810 | 275.8 | -83.541 |
| 2 | -72.457 | -44.029 | 275.8 | -73.281 |
| 3 | 55.542 | -31.316 | 275.8 | -73.281 |
| 4 | 55.542 | 11.720 | 275.8 | -73.281 |
| 5 | -72.457 | 24.433 | 275.8 | -73.281 |
| 6 | 63.410 | -64.233 | 275.8 | -125.712 |
| 7 | -98.876 | 22.261 | 275.8 | -125.712 |
| 8 | -98.876 | -55.988 | 275.8 | -125.712 |
| 9 | 63.410 | 30.505 | 275.8 | -125.712 |
| 10 | 5.903 | 1.752 | 275.8 | -9.339 |

续表 4.7 25 杆空间桁架两种工况下杆件应力以及对应的应力约束

| 杆件 | 工况 1 | 工况 2 | 允许应力 | |
|----|---------------|---------------|----------------|----------------|
| | σ /MPa | σ /MPa | $\sigma+$ /MPa | $\sigma-$ /MPa |
| 11 | 5.903 | 9.851 | 275.8 | -9.339 |
| 12 | 24.719 | 92.838 | 275.8 | -127.040 |
| 13 | 24.719 | -54.620 | 275.8 | -127.040 |
| 14 | -1.966 | 0.418 | 275.8 | -6.909 |
| 15 | -3.343 | -1.713 | 275.8 | -6.909 |
| 16 | -3.343 | -3.491 | 275.8 | -6.909 |
| 17 | -1.966 | -5.621 | 275.8 | -6.909 |
| 18 | 52.532 | -44.836 | 275.8 | -88.874 |
| 19 | -80.467 | -57.182 | 275.8 | -88.874 |
| 20 | -80.467 | 28.092 | 275.8 | -88.874 |
| 21 | 52.532 | 15.747 | 275.8 | -88.874 |
| 22 | -17.449 | 64.538 | 275.8 | -124.851 |
| 23 | -35.785 | -78.856 | 275.8 | -124.851 |
| 24 | -17.449 | -116.785 | 275.8 | -124.851 |
| 25 | -35.785 | 26.608 | 275.8 | -124.851 |

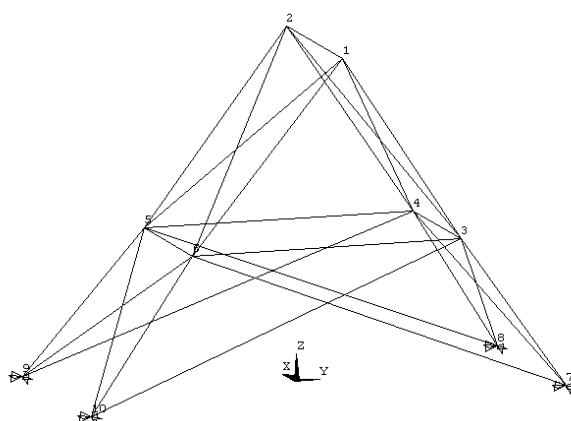


图 4.5 25 杆空间桁架最佳化形状图

表 4.8 25 杆空间桁架形状优化结果比较

| 设计变量 | 本文/mm ² | 文献 ^[46] /mm ² | 文献 ^[53] /mm ² |
|----------------|--------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| A ₁ | 111.929 | 6.4516 | 65.1 |
| A ₂ | 433.74 | 358.0638 | 301 |
| A ₃ | 601.29 | 973.5464 | 642.1 |
| A ₄ | 65.01 | 6.4516 | 64.7 |
| A ₅ | 122.31 | 86.45144 | 91 |
| A ₆ | 104.88 | 94.83852 | 263.5 |
| A ₇ | 378.63 | 512.257 | 442.3 |
| A ₈ | 359.28 | 444.5152 | 411 |
| X ₄ | 807.43 | 913.638 | 911.9 |
| Y ₄ | 2171.11 | 1230.376 | 1530.3 |
| Z ₄ | 2212.81 | 3095.498 | 3060.4 |
| X ₈ | 1159.56 | 1180.846 | 971.2 |
| Y ₈ | 3836.63 | 3064.256 | 3117 |
| 总重量 (kg) | 79.23 | 84.96 | 82.022 |

由图 4.4 可知,考虑动态局部稳定性约束后,25 杆空间桁架形状优化的计算在迭代约 120 次后基本收敛,慢于无动态约束的情况。表 4.7 中,在 1、2 节点 X、Y 方向的最大位移为 8.84mm 时,第一种工况下杆件 2、5 达到满应力状态,第二种工况下无杆件达到满应力状态。由表 4.8 可知,优化后所得桁架的总重量为 79.23kg ,优于文献[46, 53]的结果。考虑到实际结构,本文设定的截面尺寸下限为 64.5mm^2 ,而非文献[46]中的 6.45mm^2 。由表 4.5 和表 4.8 可知,本文算法搜索空间较文献[46]小,得到的总重量却更轻,所以本文结果更优。

算例(4.2a) 37 杆桁架桥

图 4.6 所示为 37 杆桁架桥的初始形状,节点坐标见表 4.9。假设下弦节点位置保持不变,上弦节点可沿垂直方向移动, $P=10\text{kN}$ 。节点 10 的最大竖直位移限制为 10mm ,结构对称性保持不变,最小截面面积取为 50mm^2 ,材料的弹性模量 $E=210\text{GPa}$,密度 $\rho=7800\text{kg/m}^3$,全部杆件的允许应力均为 $\pm 240\text{MPa}$ 。考虑两种情况:①不考虑局部稳定约束 ②考虑局部稳定约束,设杆件为圆截面。

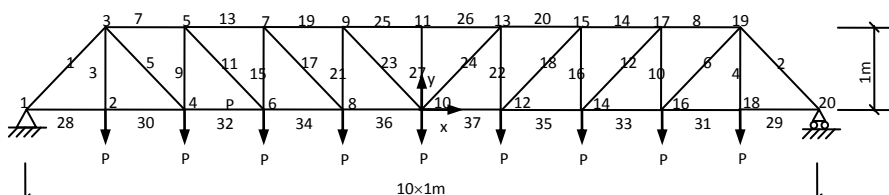


图 4.6 37 杆桁架桥

表 4.9 37 杆桁架桥节点坐标

| 节点 | x | y | z |
|----|-------|-----|---|
| 1 | -5000 | 0 | 0 |
| 2 | -4000 | 0 | 0 |
| 3 | -4000 | Y3 | 0 |
| 4 | -3000 | 0 | 0 |
| 5 | -3000 | Y5 | 0 |
| 6 | -2000 | 0 | 0 |
| 7 | -2000 | Y7 | 0 |
| 8 | -1000 | 0 | 0 |
| 9 | -1000 | Y9 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | Y11 | 0 |
| 12 | 1000 | 0 | 0 |
| 13 | 1000 | Y9 | 0 |
| 14 | 2000 | 0 | 0 |
| 15 | 2000 | Y7 | 0 |
| 16 | 3000 | 0 | 0 |
| 17 | 3000 | Y5 | 0 |
| 18 | 4000 | 0 | 0 |
| 19 | 4000 | Y3 | 0 |
| 20 | 5000 | 0 | 0 |

①不考虑局部稳定约束

根据结构对称性,取设计变量为 $[A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{19}, Y_3, Y_5, Y_7, Y_9, Y_{11}]^T$ 。

图 4.7 是 37-杆桁架桥在应力及位移约束下形状优化的评价函数收敛曲线,结果显示迭代 100 次左右时已经基本收敛。表 4.10 为优化后的桁架杆件应力及对应的应力约束值,表 4.11 为与不同文献结果对比,图 4.8 为优化后的形状。

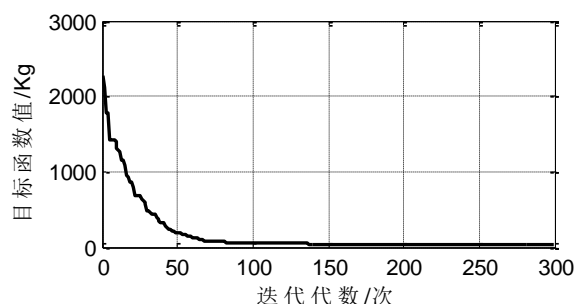


图 4.7 37 杆桁架桥形状优化评价函数收敛曲线

表 4.10 37 杆桁架桥杆件应力以及对应的允许应力

| 杆件 | 应力值 | 允许应力 | |
|----|-----------------|----------------|----------------|
| | σ /MPa | $\sigma+$ /MPa | $\sigma-$ /MPa |
| 1 | -239.91 | 240 | -240 |
| 2 | -239.91 | 240 | -240 |
| 3 | 199.786 | 240 | -240 |
| 4 | 199.786 | 240 | -240 |
| 5 | 148.514 | 240 | -240 |
| 6 | 148.514 | 240 | -240 |
| 7 | -239.983 | 240 | -240 |
| 8 | -239.983 | 240 | -240 |
| 9 | 91.79 | 240 | -240 |
| 10 | 91.79 | 240 | -240 |
| 11 | 83.277 | 240 | -240 |
| 12 | 83.277 | 240 | -240 |
| 13 | -239.644 | 240 | -240 |
| 14 | -239.644 | 240 | -240 |
| 15 | 128.261 | 240 | -240 |
| 16 | 128.261 | 240 | -240 |
| 17 | -27.414 | 240 | -240 |
| 18 | -27.414 | 240 | -240 |
| 19 | -239.865 | 240 | -240 |
| 20 | -239.865 | 240 | -240 |
| 21 | 224.593 | 240 | -240 |
| 22 | 224.593 | 240 | -240 |
| 23 | -14.772 | 240 | -240 |
| 24 | -14.772 | 240 | -240 |
| 25 | -239.928 | 240 | -240 |
| 26 | -239.928 | 240 | -240 |

续表 4.10 37 杆桁架桥杆件应力以及对应的允许应力

| 杆件 | 应力值 | | 允许应力 | |
|-----------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| | σ /MPa | $\sigma+$ /MPa | $\sigma+$ /MPa | $\sigma-$ /MPa |
| 27 | 226.372 | 240 | 240 | -240 |
| 28 | -75.517 | 240 | 240 | -240 |
| 29 | -75.517 | 240 | 240 | -240 |
| 30 | -75.646 | 240 | 240 | -240 |
| 31 | -75.646 | 240 | 240 | -240 |
| 32 | 26.07 | 240 | 240 | -240 |
| 33 | 26.07 | 240 | 240 | -240 |
| 34 | 68.77 | 240 | 240 | -240 |
| 35 | 68.77 | 240 | 240 | -240 |
| 36 | 56.323 | 240 | 240 | -240 |
| 37 | 56.323 | 240 | 240 | -240 |

表 4.10 中加粗的应力值均达到满应力，荷载作用下的 10 节点的 y 方向最大位移为 9.983mm，可以看出结构优化结果均满足应力约束、位移约束。最优结果为 37.922Kg，对比结果显示 DE 算法结果优于所有其他文献中的结果。

表 4.11 DE 优化结果与其他文献对比

| 设计变量 | 本文结果/ mm^2 | 文献 ^[54] / mm^2 | 文献 ^[53] / mm^2 |
|--------|--------------|-----------------------------|-----------------------------|
| A1 | 258.48 | 212.8 | 269.7 |
| A2 | 50.05 | 50 | 50 |
| A3 | 50.03 | 50 | 50 |
| A4 | 234.22 | 170 | 241.3 |
| A5 | 50.21 | 50 | 50 |
| A6 | 50.07 | 50 | 50 |
| A7 | 226.66 | 151.5 | 212.8 |
| A8 | 50.06 | 50 | 50.7 |
| A9 | 50.05 | 50 | 50 |
| A10 | 216.51 | 128.6 | 190.4 |
| A11 | 50.04 | 52.3 | 53.3 |
| A12 | 50.02 | 50 | 50 |
| A13 | 205.79 | 107.8 | 175.7 |
| A14 | 50.21 | 50 | 50 |
| A15 | 50.41 | 100.7 | 50 |
| A16 | 51.32 | 100.7 | 50 |
| A17 | 50.07 | 109 | 50 |
| A18 | 50.07 | 108.4 | 50 |
| A19 | 50.67 | 105.8 | 50 |
| Y3 | 1054.68 | 1862 | 967.3 |
| Y5 | 1674.38 | 3059 | 1799.8 |
| Y7 | 2103.50 | 4036 | 2427.8 |
| Y9 | 2432.70 | 4727 | 2850.4 |
| Y11 | 2548.58 | 4937 | 2994.2 |
| 总重量/kg | 37.922 | 50.740 | 39.277 |

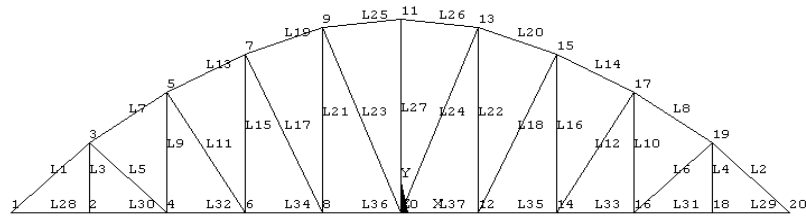


图 4.8 37 杆桁架桥最优化形状图

②考虑局部稳定约束

$$\text{局部稳定性约束为: } \sigma_{cr,i} = \frac{\pi E \times A_i}{4L_i^2} \quad (\sigma_i \leq \sigma_{cr,i})。$$

带局部稳定性约束 37-杆桁架桥形状优化评价函数曲线见图 4.9，杆件应力以及对应的允许应力见表 4.12，最优化形状见图 4.10，文献结果对比见表 4.13。

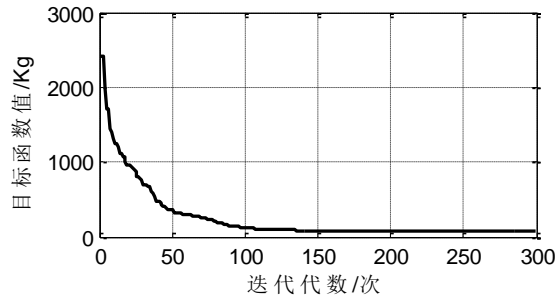


图 4.9 37 杆桁架桥形状优化评价函数收敛曲线

表 4.12 37 杆桁架桥杆件应力以及对应的允许应力

| 杆件 | 应力值 | 允许应力 | |
|----|---------------|----------------|----------------|
| | σ /MPa | $\sigma+$ /MPa | $\sigma-$ /MPa |
| 1 | -96.891 | 240 | -96.957 |
| 2 | -96.891 | 240 | -96.957 |
| 3 | 193.627 | 240 | -19.583 |
| 4 | 193.627 | 240 | -19.583 |
| 5 | 2.566 | 240 | -5.904 |
| 6 | 2.566 | 240 | -5.904 |
| 7 | -100.099 | 240 | -100.269 |
| 8 | -100.099 | 240 | -100.269 |
| 9 | 196.513 | 240 | -6.080 |
| 10 | 196.513 | 240 | -6.080 |
| 11 | 11.215 | 240 | -3.546 |
| 12 | 11.215 | 240 | -3.546 |
| 13 | -103.117 | 240 | -103.488 |
| 14 | -103.117 | 240 | -103.488 |
| 15 | 189.594 | 240 | -3.563 |
| 16 | 189.594 | 240 | -3.563 |
| 17 | 25.647 | 240 | -2.499 |
| 18 | 25.647 | 240 | -2.499 |

续表 4.12 37 杆桁架桥杆件应力以及对应的允许应力

| 杆件 | 应力值 | | 允许应力 | |
|----|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| | σ /MPa | $\sigma+$ /MPa | $\sigma+$ /MPa | $\sigma-$ /MPa |
| 19 | -105.858 | 240 | 240 | -106.053 |
| 20 | -105.858 | 240 | 240 | -106.053 |
| 21 | 177.189 | 240 | 240 | -2.777 |
| 22 | 177.189 | 240 | 240 | -2.777 |
| 23 | 3.706 | 240 | 240 | -2.148 |
| 24 | 3.706 | 240 | 240 | -2.148 |
| 25 | -106.785 | 240 | 240 | -107.114 |
| 26 | -106.785 | 240 | 240 | -107.114 |
| 27 | 190.301 | 240 | 240 | -2.591 |
| 28 | -7.089 | 240 | 240 | -8.265 |
| 29 | -7.089 | 240 | 240 | -8.265 |
| 30 | -7.001 | 240 | 240 | -8.369 |
| 31 | -7.001 | 240 | 240 | -8.369 |
| 32 | -4.882 | 240 | 240 | -8.285 |
| 33 | -4.882 | 240 | 240 | -8.285 |
| 34 | 2.511 | 240 | 240 | -8.277 |
| 35 | 2.511 | 240 | 240 | -8.277 |
| 36 | 16.460 | 240 | 240 | -8.374 |
| 37 | 16.460 | 240 | 240 | -8.374 |

表 4.13 37 杆桁架桥形状优化结果比较

| 设计变量 | 本文结果/ mm^2 | 文献 ^[54] / mm^2 | 文献 ^[53] / mm^2 | 文献 ^[55] / mm^2 |
|--------|--------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| A1 | 844.61 | 883.1 | 870.7 | 990.79 |
| A2 | 51.34 | 50 | 51.9 | 50.3 |
| A3 | 51.10 | 50 | 51.3 | 113.1 |
| A4 | 769.97 | 715.4 | 818.6 | 754.8 |
| A5 | 50.40 | 50 | 52 | 50.3 |
| A6 | 50.58 | 115.3 | 50.1 | 50.3 |
| A7 | 710.70 | 646.1 | 776.2 | 660.5 |
| A8 | 50.46 | 50 | 50.3 | 50.3 |
| A9 | 50.22 | 348.1 | 50.3 | 50.3 |
| A10 | 673.78 | 553.8 | 754 | 615.8 |
| A11 | 50.26 | 54.1 | 50.1 | 63.6 |
| A12 | 51.68 | 50 | 50.9 | 50.3 |
| A13 | 658.21 | 528.2 | 746.8 | 572.6 |
| A14 | 51.35 | 50 | 50.5 | 50.3 |
| A15 | 50.04 | 183.7 | 67.4 | 78.5 |
| A16 | 50.84 | 183.7 | 50 | 78.5 |
| A17 | 50.53 | 194 | 50.2 | 95 |
| A18 | 50.16 | 192.8 | 51.3 | 63.6 |
| A19 | 50.75 | 187.4 | 50.2 | 63.6 |
| Y3 | 649.21 | 1021 | 508.2 | 1000 |
| Y5 | 1154.39 | 1718 | 904.4 | 1800 |
| Y7 | 1506.12 | 2269 | 1178.1 | 2300 |
| Y9 | 1696.25 | 2669 | 1346.1 | 2600 |
| Y11 | 1761.12 | 2734 | 1363.4 | 4700 |
| 总重量/kg | 75.652 | 105.153 | 77.455 | 87.459 |

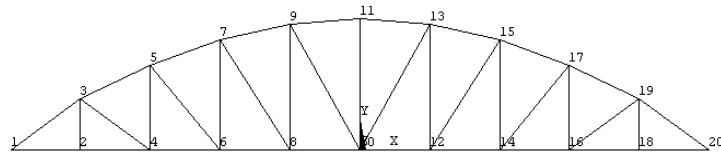


图 4.10 37 杆桁架桥最优化形状图

由图 4.9 可知，在考虑局部稳定性约束后，37 杆桁架桥形状优化计算在迭代约 150 次已基本收敛。表 4.12 中加粗的数值表示对应的杆件达到了满应力，节点 10 在 y 方向最大的位移仅为 $5.01mm$ ，优化结果满足应力约束与位移约束。由表 4.13 可知，进行形状优化后桁架桥的总重量为 $75.652kg$ ，优于文献[53-55]中的结果。考虑局部稳定约束更加符合工程实际，但对比表 4.11 和表 4.13 可知，在引入了局部稳定性约束后结构的总重量会增加。

4.5 离散截面变量的形状优化设计

对于桁架形状优化，截面变量取离散集更加符合工程实际，但优化求解的难度有很大增加，传统算法无法同时考虑离散截面和连续节点位移的混合变量进行优化，故有关此类优化问题的研究比较少见。文献[10]提出的离散截面变量空间桁架形状优化的一个两极算法，实质是将两极优化交替进行，每次优化只考虑一种变量，这势必割裂了解空间。而利用 DE 能够在每次优化迭代中，让种群个体中同时包含不同性质的连续、离散分量信息，分别采用不同的算法操作方式，符合优化问题的本质，而这两种方式已经分别在尺寸优化（3.4，3.5 节）中得到成功的应用。本节实则将这两种方式在每代优化中同时进行，以完成对此类混合变量优化问题的求解。下面就对 3 个算例进行分析求解，来验证本文所提方法的有效性。

算例(4.3) 10 杆平面桁架

对例（3.1b）中 10 杆平面桁架进行形状优化设计。材料以及荷载参数，位移、应力约束，离散截面可行集均与算例（3.1b）取值相同。

设计变量取为 $[A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, X_1, Y_1, X_3, Y_3]^T$ ，其中节点位置约束条件为：
 $540 \text{ in} \leq X_1 \leq 900 \text{ in}, \quad 180 \text{ in} \leq Y_1 \leq 540 \text{ in},$
 $0 \text{ in} \leq X_3 \leq 360 \text{ in}, \quad 180 \text{ in} \leq Y_3 \leq 540 \text{ in}.$

DE 参数设置：NP=70，F1=F=0.6，CR=0.9。

随机优化所得目标函数收敛曲线见图 4.11，最优化截面变量值比较见表 4.14，节点位置比较见表 4.15，本次优化所得 10 杆桁架最佳外形图见图 4.12。

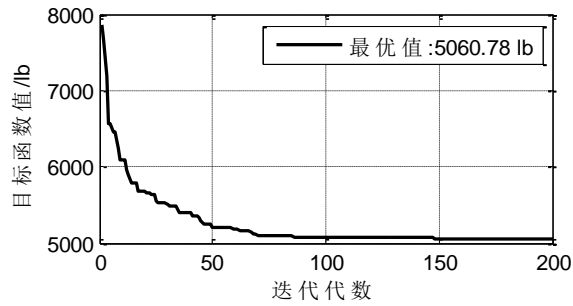


图 4.11 10 杆桁架离散截面形状优化目标函数收敛曲线

表 4.14 10 杆桁架最佳化结果比较

| 杆件号 | 截面面积 (in^2) | | |
|--------|-----------------|---------------------|---------------------|
| | 本文方法 | GA1 ^[56] | GA2 ^[57] |
| 1 | 33.5 | 33.5 | 33.5 |
| 2 | 16.9 | 4.80 | 4.49 |
| 3 | 26.5 | 22.9 | 22.9 |
| 4 | 13.5 | 15.5 | 16.0 |
| 5 | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| 6 | 16.0 | 3.88 | 3.47 |
| 7 | 16.0 | 18.8 | 18.8 |
| 8 | 7.97 | 7.22 | 5.74 |
| 9 | 5.12 | 1.80 | 1.80 |
| 10 | 4.97 | 16.9 | 18.8 |
| 重量(lb) | 5060.78 | 5088.09 | 5093.01 |

表 4.15 10 杆桁架最佳化后节点位置比较

| 节点 | 本文方法 | | GA1 ^[56] | | GA2 ^[57] | |
|----|---------|---------|---------------------|---------|---------------------|---------|
| | $x(in)$ | $y(in)$ | $x(in)$ | $y(in)$ | $x(in)$ | $y(in)$ |
| 1 | 649.292 | 89.366 | 639.120 | 107.420 | 676.189 | 71.137 |
| 2 | 720 | 0 | 720 | 0 | 720 | 0 |
| 3 | 367.388 | 299.121 | 413.500 | 279.120 | 400.986 | 291.450 |
| 4 | 360 | 0 | 360 | 0 | 360 | 0 |
| 5 | 0 | 360 | 0 | 360 | 0 | 360 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

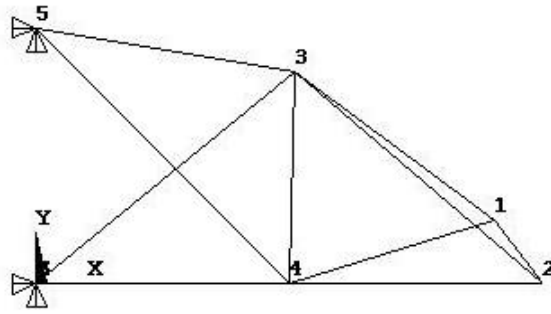


图 4.12 平面 10 杆桁架最佳外形图

本例最优化设计中,控制节点位移为 1.9997 in ,各杆件应力分别为: $\{6.6448\ 6.7860\ -7.4639\ -6.4967\ 17.9062\ 6.2048\ -8.2375\ 14.2654\ -6.2161\ 6.8882\} \times 10^3\ (\text{psi})$ 。由此可知,各杆件均有较大的应力盈余,而控制点位移基本接近限制,为控制本设计主要因素。

由图 4.11 可见本例形状优化随着迭代的进行目标函数不断减小,在 100 代以后趋于定值,从最优结果来看本文结果比文献中所列结果至少轻了 0.53%。

算例(4.1c) 25 杆空间桁架

基本参数同算例(4.1a),不同的仅仅是杆件截面尺寸取值范围为离散集 $S=\{0.645, 1.374, 2.142, 3.187, 3.806, 4.322, 4.652, 5.548, 6.0, 6.542, 7.419, 7.935, 8.581, 9.161, 10.838, 11.355, 12.671, 17.226, 19.568, 32.258, 51.613\}\text{cm}^2$ 。

目标函数收敛曲线见图 4.13,各工况下杆件截面应力见表 4.16,而控制点最大位移为工况 2 下的 8.830mm ,最优化截面尺寸和节点坐标见表 4.17。桁架最优化外形见图 4.14。

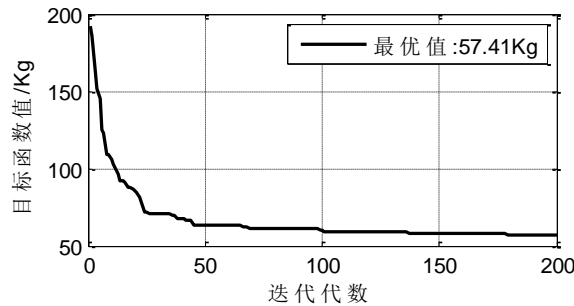


图 4.13 25 杆空间桁架离散截面形状优化收敛曲线

表 4.16 25 杆空间桁架两种工况下杆件应力以及对应的应力约束

| 杆件 | 工况 1 | 工况 2 | 许用应力 | |
|----|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| | σ/MPa | σ/MPa | $\sigma+/\text{MPa}$ | $\sigma-/\text{MPa}$ |
| 1 | -12.369 | -16.024 | 275.8 | -242.04 |
| 2 | -79.345 | -38.745 | 275.8 | -79.94 |
| 3 | 56.895 | -36.160 | 275.8 | -79.94 |

续表 4.16 25 杆空间桁架两种工况下杆件应力以及对应的应力约束

| 杆件 | 工况 1 | 工况 2 | 许用应力 | |
|----|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| | σ/MPa | σ/MPa | $\sigma+/\text{MPa}$ | $\sigma-/\text{MPa}$ |
| 4 | 58.448 | 13.891 | 275.8 | -79.94 |
| 5 | -79.838 | 16.458 | 275.8 | -79.94 |
| 6 | 71.623 | -76.602 | 275.8 | -119.36 |
| 7 | -114.546 | 34.840 | 275.8 | -119.36 |
| 8 | -114.445 | -74.145 | 275.8 | -119.36 |
| 9 | 75.189 | 37.291 | 275.8 | -119.36 |
| 10 | 22.847 | 10.405 | 275.8 | -242.04 |
| 11 | 32.758 | 17.444 | 275.8 | -242.04 |
| 12 | 54.432 | 181.288 | 275.8 | -242.04 |
| 13 | 50.138 | -91.210 | 275.8 | -242.04 |
| 14 | -3.544 | 21.350 | 275.8 | -46.61 |
| 15 | -19.993 | -42.655 | 275.8 | -46.61 |
| 16 | -28.535 | 16.380 | 275.8 | -46.61 |
| 17 | 7.230 | -45.943 | 275.8 | -46.61 |
| 18 | 38.901 | 7.771 | 275.8 | -46.61 |
| 19 | -46.594 | -43.781 | 275.8 | -46.61 |
| 20 | -46.595 | 33.707 | 275.8 | -46.61 |
| 21 | 38.899 | -17.453 | 275.8 | -46.61 |
| 22 | -1.915 | 38.653 | 275.8 | -76.437 |
| 23 | -36.123 | -69.872 | 275.8 | -76.437 |
| 24 | -3.086 | -76.377 | 275.8 | -76.437 |
| 25 | -35.121 | 32.118 | 275.8 | -76.437 |

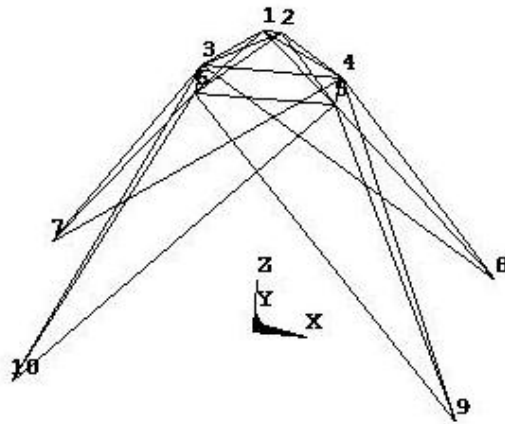


图 4.13 25 杆空间桁架最优化外形图

表 4.17 25 杆空间桁架离散截面形状优化结果比较

| 设计变量 | 本例/ mm^2 | 例 4.1a/ mm^2 | 文献 ^[46] / mm^2 |
|------|-------------------|-----------------------|------------------------------------|
| A1 | 432.2 | 175.48 | 6.45 |
| A2 | 654.2 | 637.89 | 545.8 |
| A3 | 600.0 | 552.05 | 396.1 |
| A4 | 64.5 | 64.5 | 6.45 |
| A5 | 137.4 | 82.55 | 6.45 |
| A6 | 64.5 | 64.65 | 65.8 |
| A7 | 64.5 | 65.43 | 318.7 |

续表 4.17 25 杆空间桁架离散截面形状优化结果比较

| 设计变量 | 本例/mm ² | 例 4.1a /mm ² | 文献 ^[46] /mm ² |
|--------|--------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| A2 | 654.2 | 637.89 | 545.8 |
| A8 | 741.9 | 749.88 | 678.1 |
| X2 | 108.93 | 100.09 | 254 |
| Y2 | 22.28 | 39.96 | 0 |
| Z2 | 3611.60 | 3556.03 | 3556 |
| X4 | 802.12 | 770.15 | 520.7 |
| Y4 | 494.31 | 511.76 | 886.4 |
| Z4 | 2976.40 | 2915.67 | 2474 |
| 总重量/kg | 57.41 | 55.83 | 61.5 |

由表 4.17 可见,25 杆空间桁架离散截面形状优化的结果要比本文连续截面的结果稍大 (大 1.58Kg), 这是由割裂了解空间所导致, 然而其结果仍比文献 [46] 分层优化方法中连续截面形状优化的结果要小, 说明了 DE 求解离散截面形状优化具有很强的搜索能力, 能够得到令人非常满意的结果。

算例(4.2b) 37 杆桁架桥 (考虑局部稳定)

基本参数同算例 (4.2a), 只是截面取离散值, 根据之前得到结果可知截面取值最大为 844.61mm², 因而为降低计算复杂度且不影响最终结果, 从 ASIC 规范型钢截面表中取较小的 32 个截面作为本算例的离散截面集 $S=\{0.111\ 0.141\ 0.196\ 0.250\ 0.307\ 0.391\ 0.442\ 0.563\ 0.602\ 0.766\ 0.785\ 0.994\ 1.000\ 1.228\ 1.266\ 1.457\ 1.563\ 1.620\ 1.800\ 1.990\ 2.130\ 2.380\ 2.620\ 2.630\ 2.880\ 2.930\ 3.090\ 1.130\ 3.380\ 3.470\ 3.550\ 3.630\}in^2$ 。 [注]; 1 in = 2.54 cm

本例 DE 参数取为: F1=F=0.8, CR=0.9, Max_it=800。数值试验表明, 如果仍如连续截面变量中取 F1=F=0.6 则收敛到一个略大于 100 的解。若 CR 取 0.3, 则收敛速度非常缓慢, 迭代 1000 代也只能收敛到 300 左右的值。

随机优化两次, 目标函数收敛曲线见图 4.15, 第 2 次优化的控制点位移为 9.307cm, 各杆件内力情况见表 4.18, 该次优化结果及比较见表 4.19。最优化结构形状见图 4.16。

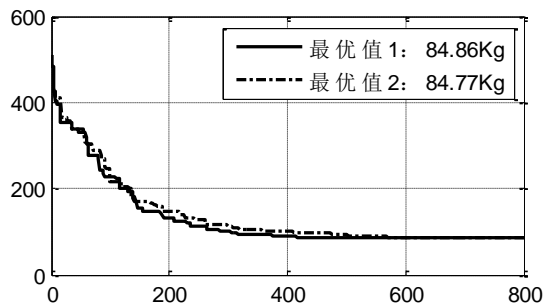


图 4.15 37 杆桁架桥混合变量优化 2 次目标函数收敛曲线

表 4.18 37 杆桁架桥杆件应力以及对应的允许应力（最优值 2）

| 杆件 | 应力值 | | 允许应力 | |
|----|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| | σ /MPa | $\sigma+$ /MPa | $\sigma+$ /MPa | $\sigma-$ /MPa |
| 1 | -105.590 | 240 | 240 | -123.169 |
| 2 | -105.590 | 240 | 240 | -123.169 |
| 3 | 139.640 | 240 | 240 | -45.650 |
| 4 | 139.640 | 240 | 240 | -45.650 |
| 5 | 0.001 | 240 | 240 | -9.383 |
| 6 | 0.001 | 240 | 240 | -9.383 |
| 7 | -116.482 | 240 | 240 | -116.482 |
| 8 | -116.482 | 240 | 240 | -116.482 |
| 9 | 139.640 | 240 | 240 | -14.444 |
| 10 | 139.640 | 240 | 240 | -14.444 |
| 11 | 0.004 | 240 | 240 | -6.498 |
| 12 | 0.004 | 240 | 240 | -6.498 |
| 13 | -116.038 | 240 | 240 | -121.007 |
| 14 | -116.038 | 240 | 240 | -121.007 |
| 15 | 139.637 | 240 | 240 | -8.385 |
| 16 | 139.637 | 240 | 240 | -8.385 |
| 17 | 91.645 | 240 | 240 | -4.904 |
| 18 | 91.645 | 240 | 240 | -4.904 |
| 19 | -117.679 | 240 | 240 | -129.172 |
| 20 | -117.679 | 240 | 240 | -129.172 |
| 21 | 69.555 | 240 | 240 | -7.048 |
| 22 | 69.555 | 240 | 240 | -7.048 |
| 23 | 92.694 | 240 | 240 | -4.414 |
| 24 | 92.694 | 240 | 240 | -4.414 |
| 25 | -122.125 | 240 | 240 | -130.669 |
| 26 | -122.125 | 240 | 240 | -130.669 |
| 27 | -7.074 | 240 | 240 | -7.077 |
| 28 | -11.811 | 240 | 240 | -11.811 |
| 29 | -11.811 | 240 | 240 | -11.811 |
| 30 | -11.811 | 240 | 240 | -11.811 |
| 31 | -11.811 | 240 | 240 | -11.811 |
| 32 | -11.811 | 240 | 240 | -11.811 |
| 33 | -11.811 | 240 | 240 | -11.811 |
| 34 | -11.808 | 240 | 240 | -11.811 |
| 35 | -11.808 | 240 | 240 | -11.811 |
| 36 | 47.242 | 240 | 240 | -11.811 |
| 37 | 47.242 | 240 | 240 | -11.811 |

表 4.19 37 杆桁架桥形状优化结果比较

| 设计变量 | 结果 1/mm ² | 结果 2/mm ² | 例 4.2a/mm ² | 文献 ^[55] /mm ² |
|------|----------------------|----------------------|------------------------|-------------------------------------|
| A1 | 940.00 | 940.00 | 844.61 | 990.79 |
| A2 | 71.61 | 71.61 | 51.34 | 50.3 |
| A3 | 71.61 | 71.61 | 51.10 | 113.1 |
| A4 | 816.77 | 816.77 | 769.97 | 754.8 |
| A5 | 71.61 | 71.61 | 50.40 | 50.3 |
| A6 | 71.61 | 71.61 | 50.58 | 50.3 |
| A7 | 792.26 | 792.26 | 710.70 | 660.5 |
| A8 | 71.61 | 71.61 | 50.46 | 50.3 |
| A9 | 71.61 | 71.61 | 50.22 | 50.3 |
| A10 | 729.03 | 792.26 | 673.78 | 615.8 |

续表 4.19 37 杆桁架桥形状优化结果比较

| 设计变量 | 结果 1/mm ² | 结果 2/mm ² | 例 4.2a/mm ² | 文献 ^[55] /mm ² |
|--------|----------------------|----------------------|------------------------|-------------------------------------|
| A11 | 71.61 | 71.61 | 50.26 | 63.6 |
| A12 | 71.61 | 71.61 | 51.68 | 50.3 |
| A13 | 792.26 | 792.26 | 658.21 | 572.6 |
| A14 | 71.61 | 71.61 | 51.35 | 50.3 |
| A15 | 71.61 | 71.61 | 50.04 | 78.5 |
| A16 | 71.61 | 71.61 | 50.84 | 78.5 |
| A17 | 71.61 | 71.61 | 50.53 | 95 |
| A18 | 71.61 | 71.61 | 50.16 | 63.6 |
| A19 | 71.61 | 71.61 | 50.75 | 63.6 |
| 设计变量 | 结果 1/mm | 结果 2/mm | 例 4.2a/mm | 文献 ^[55] /mm |
| Y3 | 535.73 | 508.66 | 649.21 | 1000 |
| Y5 | 959.02 | 904.29 | 1154.39 | 1800 |
| Y7 | 1263.53 | 1186.88 | 1506.12 | 2300 |
| Y9 | 1418.60 | 1294.55 | 1696.25 | 2600 |
| Y11 | 1416.21 | 1291.93 | 1761.12 | 4700 |
| 总重量/kg | 84.86 | 84.77 | 75.652 | 87.459 |

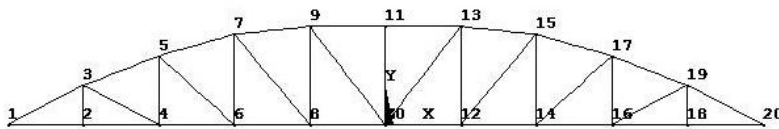


图 4.16 37 杆桁架桥混合变量最优化结果形状图（最优值 2）

由于变量维数高且在离散变量情况下目标函数取值的不连续性，将导致优化的复杂度急剧增加，优化的收敛速度显著减慢。从收敛曲线可见迭代至 600 代以后才基本收敛。混合变量的设计结果要比连续变量的结果稍大，但更符合工程实际，而比起用遗传算法对本桁架进行优化的文献[55]，微分演化算法的结果显然更胜一筹。从图形上看，本例离散截面变量得到的最佳桁架形状较连续截面的情况更加平扁。

4.6 本章小结

本章针对传统方法进行桁架形状优化时出现的问题，提出了一种基于微分演化的既能考虑两类设计变量耦合，又能同时考虑具有连续和离散的混合变量的桁架形状优化设计新方法。通过对几个典型的桁架形状优化的分析并与其他方法的结果进行比较，得出以下结论：

- (1) 本文所提的方法，能够在种群个体上同时考虑各类设计变量信息，可以克服传统优化方法进行桁架形状优化所遇到的困难。
- (2) 本文所提方法可以快速、有效地进行桁架结构的形状优化设计。

第5章 基于微分演化算法的桁架多目标优化设计

5.1 引言

现实生活中，人们经常会遇到需要使多个目标在给定区域上均尽可能最佳的优化问题。例如在桁架设计过程中，既要考虑使其具有较好的性能，又要考虑使其造价较低。由于性能好的结构往往造价较高，而造价较低的结构通常结构性能稍差，因此上述两个目标之间是相互矛盾的，即不存在一个使两者都满足最优的结构，必须在这些设计目标之间取一折衷的结果。再如投资问题，一般希望所投入的资金量少，风险最小，且获得的收益最大。这种多于一个的数值目标在给定区域上的最优化问题一般就称多目标优化问题。

通常，求解多目标优化问题（Multiobjective Optimization Problem, MOP）要比单目标优化问题（Singleobjective Optimization Problem, SOP）困难得多。因为单目标优化问题的最优解一般可以清楚地定义；而在多目标优化问题中，由于可能存在相互冲突的多个目标，通常不存在一个对所有目标都是最优的解，而是一组均衡解，即所谓的 Pareto 最优解集。Pareto 最优的概念最早是由意大利经济学家帕累托（Vilfredo Pareto）于 1897 年研究资源配置时提出的，他认为最优状态标准应该是：在某种既定的资源配置状态，任何改变都不可能使至少一个人的状况变好，而又不使任何人的状况变坏。

在过去的几十年里，土木工程系统的优化设计研究主要集中在单目标优化问题上，目标函数主要是结构材料的用量（体积、重量或费用）。近来，研究利用有效的数值算法来求解结构多目标优化设计问题，得出考虑多个目标且符合设计要求的优化设计解集，成为结构优化设计领域的一个热门方向。本章提出用 DEMO 进行桁架结构基于性能的多目标优化，通过对典型桁架结构优化结果的比较分析，来验证 DEMO 用于桁架结构多目标优化的有效性。

5.2 多目标优化的基本概念

通常在多目标优化领域广泛采用、被普遍接受的 MOP 相关定义如下：

定义 1 一般多目标优化问题（MOP）

不失一般性，考虑下列多目标优化问题模型：

$$\text{minimize } y=F(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_k(x)) \quad (5.1a)$$

$$\text{subject to } g_i(x) \leq 0, i=1,2,\dots,m \quad (5.1b)$$

其中,

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbf{X},$$

$$\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n) \in \mathbf{Y},$$

$$\mathbf{X}=\{(x_1,x_2,\dots,x_n) \mid l_i \leq x_i \leq u_i, i=1,2,\dots,n\},$$

$$\mathbf{L}=(l_1,l_2,\dots,l_n),$$

$$\mathbf{U}=(u_1,u_2,\dots,u_n)。$$

一般的 MOP 由 n 个决策变量参数、 k 个目标函数和 m 个约束条件组成。其中 \mathbf{X} 表示决策空间, \mathbf{L} 和 \mathbf{U} 分别为变量取值的下界和上界, \mathbf{Y} 表示目标函数空间。本章的所有讨论都是基于上述多目标优化问题模型展开的。

定义 2 Pareto 支配 (Pareto Dominance)

对于向量 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ 和向量 $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$, 如果有下列条件成立:

$$\left. \begin{array}{l} \forall i \in \{1,\dots,k\}, u_i \leq v_i \\ \exists i \in \{1,\dots,k\}, u_i < v_i \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

则称向量 \mathbf{u} 支配 (dominate) 向量 \mathbf{v} (表示为 $\mathbf{u} \prec \mathbf{v}$)。

定义 3 Pareto 最优解 (Pareto Optimal Solution)

$\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$, 如果当且仅当不存在 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, 使得 $\mathbf{v}=\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 优于 $\mathbf{u}=\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$, 则称 \mathbf{x}^* 为决策空间 \mathbf{X} 上的一个 Pareto 最优解, 也称为非支配解 (Non-dominated Solution)。

定义 4 Pareto 最优集 (Pareto Optimal Set) 和 Pareto 前沿 (Pareto Front)

对于给定的 MOP, Pareto 最优集 \mathbf{P} 可定义为:

$$\mathbf{P}=\{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \mid \text{不存在 } \mathbf{x}' \in \mathbf{X}, \text{ 使得 } \mathbf{F}(\mathbf{x}') \prec \mathbf{F}(\mathbf{x})\} \quad (5.3)$$

相应的目标函数集合 $\mathbf{F}(\mathbf{P})=\{\mathbf{u}=\mathbf{F}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{P}\}$ 叫做 Pareto 前沿。

根据以上的定义可知, 求解多目标优化问题的目的就是求出 Pareto 最优集, 然后由决策者根据相关信息、要求或偏好确定一个折衷解 (也称妥协解, Compromise Solution)。

总的来说, 包含 Pareto 前沿 (点、线或面) 的解析表达式, 通常是不可能得到的。当然, 专家们特殊设计的一些多目标测试函数在理论上是存在解析解的, 它们常用来测试某些多目标优化算法的性能。生成 Pareto 前沿的常规程序是计算足够多的 Pareto 最优解以及它们在目标空间中的对应关系, 进而生成近

似的 Pareto 前沿。Pareto 最优解集也被称作非支配集或有效集；它们所对应的目标空间中的向量被称作非支配向量。

5.3 多目标优化方法

由于多目标优化问题的求解思想与单目标问题不同，很多原本能求解单目标优化问题的算法在多目标优化问题中并不适用。因此，关于开发能有效求解多目标优化问题的优化技术成为多目标优化领域的基本工作。

一个成功的多目标优化算法应当能实现以下两点：（1）可以获得一个尽量接近 Pareto 前沿的非支配解集；（2）可以使得解集尽可能分散，这样可以避免解集出现聚拢现象。

5.3.1 传统的多目标优化方法

传统的多目标优化方法是将各目标聚合成一个正系数的单目标函数，系数由决策者来决定，或由优化方法自动调整。为了获取近似 Pareto 最优解集，一些优化方法使用不同的系数来实施动态优化。常见的方法有加权法、约束法、目标规划法和极小极大法。

加权法是通过目标函数的线性组合将 MOP 转换成单目标问题：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y = f(x) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \dots + w_k f_k(x) \\ \text{subject to} \quad & x \in X_f \end{aligned} \quad (5.4)$$

其中， w_i 称为权重，不失一般性通常可正则化使 $\sum w_i = 1$ ，求解不同权重后输出一组解。

约束法是一种不限于优化 Pareto 最优前端凸部的方法，它将 k 个目标中的 $k-1$ 个目标转换成约束条件，剩下的一个目标（可随意确定）作为单目标函数。

其模型如下：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y = f(x) = f_h(x) \\ \text{subject to} \quad & e_i(x) = f_i(x) \geq \varepsilon_i, \quad (1 \leq i \leq k, i \neq h) \\ & x \in X_f \end{aligned} \quad (5.5)$$

其中， ε_i 作为下界可在优化过程中取不同值，以发现多个 Pareto 最优解。

古典方法的优点在于继承了求解单目标优化的一些成熟算法的机理。但对大规模问题，这些多目标方法很少真正被使用。原因在于：①为了获得 Pareto 最优解集必须独立进行多次优化，每次得到的结果往往离散性较大，而且要花费很多时间。②一些古典方法如加权法求解多目标优化问题时，对 Pareto 最优

前端的形状很敏感，不能处理前端的凹部。③求解问题所需的与应用背景相关的启发式知识常常不能获得，导致无法正常实施优化。

近 10 多年来，一些进化算法在多目标优化求解方面取得了丰硕的成果。其优点在于基于种群的并行计算可处理大规模的搜索空间、在单轮优化期间就可产生多个非支配解，克服了传统方法的局限性。

5.3.2 现代进化多目标优化算法

进化多目标优化算法大致包括以下几种^[17]：以 Goldberg 的非支配排序思想为基础的第一代进化多目标优化算法，如 MOGA、NSGA 和 NPGA 等；以及以引入精英保留机制为特征的第二代进化多目标算法，如 SPEA、SPEA2、PAES、PESA、PESA-II、NSGA-II 等。其中 NSGA-II 是迄今为止最为优秀的进化多目标优化算法之一。该算法提出了拥挤距离的概念，引入了精英保留机制，经选择后参加繁殖的个体所产生的子代与其父代个体共同竞争来产生下一代种群，因此有利于精英个体的保存，提高种群的整体进化水平。

近年来，一些新的智能算法被引进多目标优化领域，如粒子群优化、蚁群算法、人工免疫系统、微分演化算法等被用于求解多目标优化问题。

5.4 多目标微分演化优化算法—DEMO

本文拟采用 Robic 提出的一种多目标微分演化算法—DEMO 进行桁架结构优化设计。为了更好的理解 DEMO，本节首先对算法中的有关操作加以解释和说明。

5.4.1 约束处理方法

对于结构设计来说，约束条件可以来源于编码、额外性能要求、构造要求等方面。所有的多目标优化设计结果都应当是可行设计，即不能违反约束。由于变异、交叉操作，设计变量可能会超出上下限。本文对违反界限约束的设计分量采取重新赋予一个可行值，使其保留在群体中。对于函数约束，虽然出现过多种处理策略，如放松约束法，NSGA-II 使用的约束 Pareto 占优等，但本文采用罚函数法处理约束也取得了非常理想的效果。即当个体代表的信息为不可行设计时，将目标函数值加上一个大数，这样该个体将会在选择操作中被自行抛弃，而优良的个体在种群中得到保存和繁衍。

5.4.2 快速非支配排序

非支配排序是依据 Pareto 优劣关系对当前种群的个体进行分级。“快速”是针对 NSGAI 中将该排序的计算繁杂度由 $o(MN^4)$ 降到 $o(MN^3)$ 而言。DEMO 采用与 NSGA-II^[58] 相同的排序思想，其过程如下：当代种群中所有非支配个体的等级设为 1，然后将它们从种群中暂时移去；再在余下的种群中将所有非支配个体的等级设为 2，也暂时移去；如此循环直至所有个体都被赋值（排序算法的伪代码见文献[58]）。确定进化个体的等级后，就可以对种群进行裁减（见后），使种群整体向着 Pareto 最优前沿的方向进化。

5.4.3 多样性保持

保持种群多样性、避免其进化早熟是保证算法收敛到全局 Pareto 最优前沿的有效手段。同 NSGA-II 一样，在 DEMO 中通过计算种群个体在目标空间中相对于同级个体的拥挤距离来保持种群在进化中的多样性。一般而言，拥挤距离越大越好。拥挤距离越小，说明聚拢现象越严重，在同级个体中越先被裁减。

要计算拥挤距离时，需按每个目标函数值大小对种群中的所有个体按升序排序。首个和末个个体的拥挤距离设为无穷大，这样边界点总是会被保留，利于种群多样性拓展。第 i 个个体的拥挤距离则设为第 $i+1$ 和第 $i-1$ 个体的所有目标函数值之差的和。（伪代码详见 NSGA-II^[58]）。个体被赋予拥挤距离后，就可以定义个体解的质量高低：（1）非支配排序等级高的个体质量高。（2）非支配排序等级相等时拥挤距离大的个体质量高。

5.4.4 突变与交叉操作

可采用 DE 任一种突变、交叉方式^[27]。本章选用 DE/rand/1 的变异方式。

5.4.5 选择操作

在单目标优化中，对子父两代个体进行选择操作很简单，即子代候选解如果比父代更优则被选择进入下一代种群，否则父代被选择。而在多目标优化中，则需要借用支配的概念，DEMO 选择操作使用以下的原则：a. 当子代解支配父代时，则子代被选择进入当前种群；b. 当父代解支配子代时，则子代舍弃，父代被选择；c. 当父、子二代互不支配时，则均被选择进入当前种群。这种将每代优势解进行选择的做法保证了精英解信息的保存。依次对种群所有个体进行这一操作，将得到一个个数在 NP 和 $2NP$ 之间的一个种群。

5.4.6 种群裁减

为使在进化中各代种群大小 NP 保持不变，需要在选择操作后对当前种群进行裁减。裁减的过程同 NSGA-II 一样：在对种群进行非支配分级与计算拥挤距离之后，选择质量最优的 NP 个个体进入下一代种群。这种裁减机制的效果是：在种群进化初期，非支配分级数比较多，裁减更依照排序等级，裁去的个体多是排序等级较差的个体，这有助于种群整体向着 Pareto 最优前沿逼近；而在进化后期，随着越来越多的个体的非支配等级为 1，拥挤距离逐渐在裁减过程中起主导作用，使整个种群在 Pareto 最优前沿上趋于均匀分布。

5.5 多目标微分演化算法基本流程

多目标微分演化算法 DEMO 基本流程如下：

- Step1: 初始化程序参数，并在设计空间内随机初始化种群， $it=0$ ；
- Step2: 计算每个个体的各个目标函数值；
- Step3: 变异、交叉操作，产生子代个体，并对种群个体进行边界约束检查；
 $Add_NP = 0$ ；
- Step4: 选择操作，更新当前种群个体；
- Step5: 对种群个体进行非支配分级，并计算每个个体的拥挤距离；
- Step6: *if* $Add_NP > 0$, 对种群进行裁减，得到个体数为 NP 的下一代种群；
- Step7: 二维显示目标空间点集的优化收敛情况，便于掌握迭代次数的选取；
- Step8: 对新一代种群个体进行随机排列。
- Step9: 判断是否停止：是，则停止；否，则转到 Step2。

5.6 数值测试

5.6.1 测试函数

(1) 无约束测试函数

Deb (1999) 介绍了设计多目标测试函数的系统方法。Zitzler (2000) 遵循这些步骤设计了 6 个著名的无约束测试函数，其中 5 个 (ZDT1, ZDT2, ZD3, ZDT4, ZDT6) 已成为文献中的经典算例^[58]。本文采用这 5 个来测试 DEMO 的性能，它们分别代表了不同类型的优化问题，且均为求最小值的双目标函数。具体描述见表 5.1。

表 5.1 无约束多目标测试函数

| 名称 | 维数 n | 边界 | 目标函数 | 最优解 | 问题类别 |
|------|--------|--|--|---|------------|
| ZDT1 | 30 | [0,1] | $f_1(x) = x_1$ $f_2(x) = g(x)[1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(x)}}]$ $g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i$ | $x_1 \in [0,1]$ $x_i = 0$ $i=2, \dots, n$ | 凸 |
| ZDT2 | 30 | [0,1] | $f_1(x) = x_1$ $f_2(x) = g(x)[1 - (\frac{x_1}{g(x)})^2]$ $g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i$ | $x_1 \in [0,1]$ $x_i = 0$ $i=2, \dots, n$ | 非凸 |
| ZDT3 | 30 | [0,1] | $f_1(x) = x_1$ $f_2(x) = g(x)[1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(x)}} - \frac{x_1}{g(x)} \cdot \sin(10\pi x_1)]$ $g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i$ | $x_1 \in [0,1]$ $x_i = 0$ $i=2, \dots, n$ | 凸, 不连续 |
| ZDT4 | 10 | $x_1 \in [0,1]$ $x_i \in [-5,5]$ $i=2, \dots, n$ | $f_1(x) = x_1$ $f_2(x) = g(x)[1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(x)}}]$ $g(x) = 1 + 10(n-1) + \sum_{i=2}^n (x_i^2 - 10\cos(4\pi x_i))$ | $x_1 \in [0,1]$ $x_i = 0$ $i=2, \dots, n$ | 非凸 |
| ZDT6 | 10 | [0,1] | $f_1(x) = x_1$ $f_2(x) = g(x)[1 - (\frac{f_1(x)}{g(x)})^2]$ $g(x) = 1 + \frac{9}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i$ | $x_1 \in [0,1]$ $x_i = 0$ $i=2, \dots, n$ | 非凸, 不均匀 |

(2) 有约束测试函数

以下 3 个有约束测试函数也取自文献[58]。

表 5.2 有约束多目标测试函数

| 名称 | 维数 n | 变量边界 | 目标函数 | 约束 |
|--------|--------|--|---|---|
| CONSTR | 2 | $x_1 \in [0.1, 1.0]$ $x_2 \in [0, 5]$ | $f_1(x) = x_1$ $f_2(x) = (1 + x_2) / x_1$ | $g_1(x) = x_2 + 9x_1 \geq 6$ $g_2(x) = -x_2 + 9x_1 \geq 1$ |
| SRN | 2 | $x_i \in [-20, 20]$ $i=1, 2$ | $f_1(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + 2$ $f_2(x) = 9x_1 - (x_2 - 1)^2$ | $g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq 225$ $g_2(x) = x_1 - 3x_2 \leq -10$ |
| TNK | 2 | $x_i \in [0, \pi]$ $i=1, 2$ | $f_1(x) = x_1$ $f_2(x) = x_2$ | $g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1 + 0.1\cos(16\arctan(x_1 / x_2)) \leq 0$ $g_2(x) = (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \leq 0.5$ |

对于以上测试函数的具体特点，文献[60]有如下评述：CONSTR 问题中一部分无约束 Pareto 最优前沿区域是不可行的，故该问题的有约束 Pareto 最优前沿是由部分无约束最优前沿和约束边界组成。在问题 SRN 中，有约束 Pareto 最优前沿是无约束最优前沿的一个子集。在问题 TNK 中，Pareto 最优前沿是非连续的，且完全落在第一个约束函数的边界上。

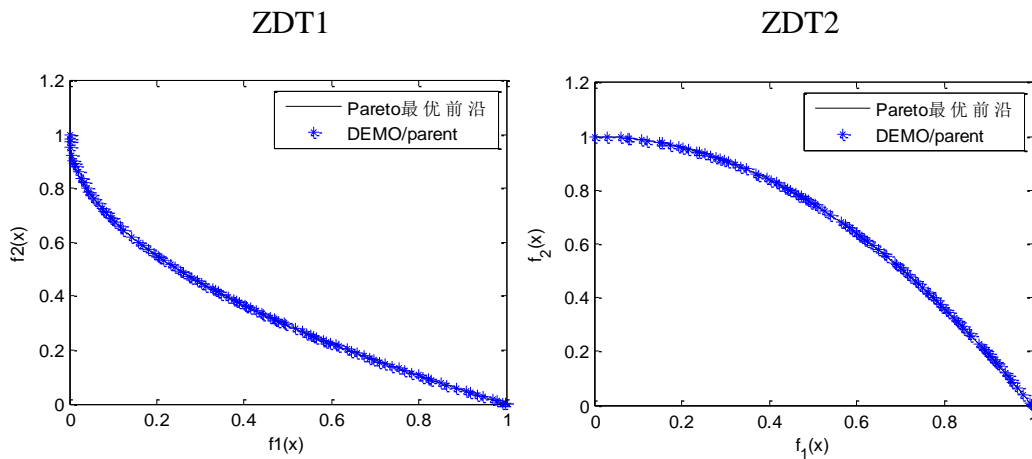
5.6.2 结果分析

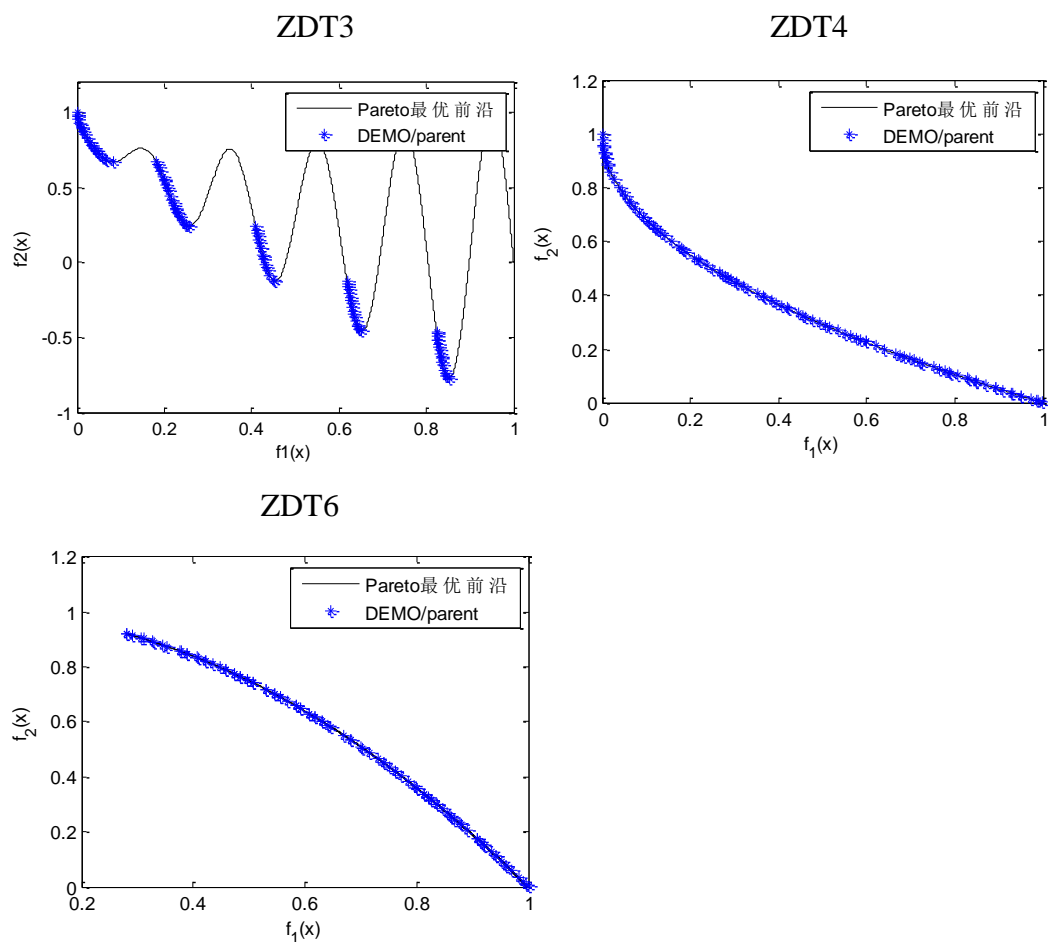
DEMO 参数设置：除 ZDT4 中取 $F=0.5$ 外，其他统一为 $NP=100$ ， $F=0.8$ ， $CR=0.3$ ，变异策略 $Strategy=DE/rand/1/bin$ ， $Max_it=500$ 。

测试结果如图组 5.1、5.2 所示。

其中 5 个无约束测试函数 ZDT1~ZDT5 有 Pareto 最优前沿的解析解表达式，已将其在图中用黑线画出。可以看出各个测试函数中，DEMO 所得解均能够均匀的收敛到 Pareto 最优前沿上。而对于 3 个有约束测试函数，虽然无法写出 Pareto 最优前沿的解析解表达式，但通过与文献[58]中 NSGA-II 所得结果的对比发现，DEMO 所得结果丝毫不逊于 NSGA-II。同时值得指出的是用 DEMO 测试所得的 NP 个种群个体的非支配等级均为 1，即迭代终止所有个体互不支配，均为问题的非支配解。

(1) 无约束测试函数



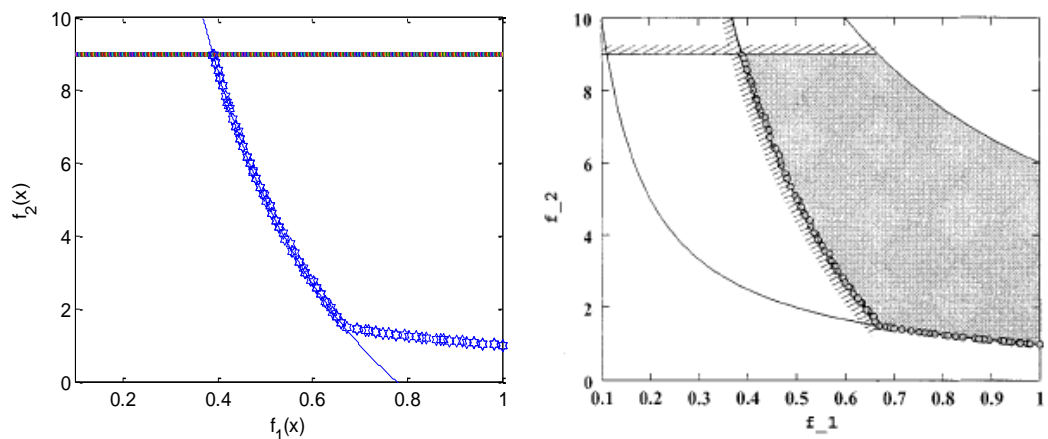


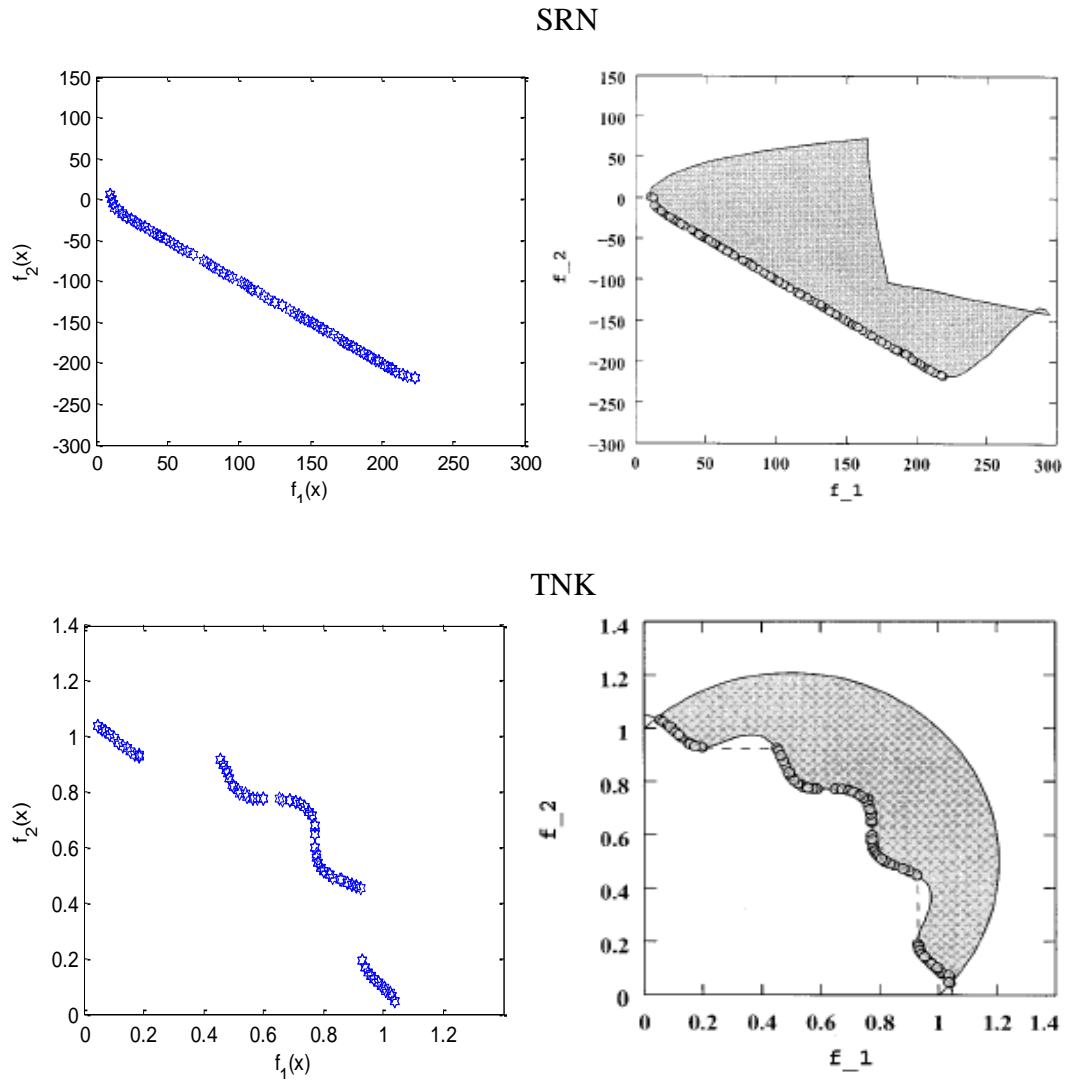
图组 5.1 无约束 MOP 测试函数收敛图

(2) 有约束测试函数

其中左侧为用 DEMO 求得的 Pareto 最优前沿，右侧为文献[58]中 NSGA-II 求得的结果。

CONSTR





图组 5.2 有约束 MOP 测试函数收敛图

5.7 桁架结构多目标优化设计

5.7.1 桁架结构优化的数学模型

仍然以典型 n 杆桁架结构系统为研究对象，该系统基本参数（包括弹性模量、材料、密度、最大允许应力、最大允许位移等）已知。在给定的工况下，求一合理的截面面积值，使结构总重量最轻的同时，也使某种其他性能的目标尽量达到最优，则该问题就变成了多目标优化设计问题。如果取结构总重量最轻与控制节点的位移最小，则该问题就变成了两目标优化问题，其数学模型可表示为：

$$\begin{aligned}
 & \text{求} \quad A = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T \\
 & \left. \begin{aligned}
 \min \quad f_1 = W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i \\
 \min \quad f_2 = u_{jl} \\
 \text{s.t.} \quad g_i^\sigma(A) = [\sigma_i] - \sigma_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, K) \\
 A_{\min} \leq A \leq A_{\max}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

式中： $A=[A_1, A_2, \dots, A_n]^T$ 为设计变量， n 为变量连接后杆件的组数， W 为结构的重量， L_i 、 A_i 、 ρ_i 分别为第 i 组杆件的长度、截面面积及密度； $g_i^\sigma(A)$ 为应力约束， $[\sigma_i]$ 、 σ_i 分别为第 i 组杆件的应力允许值和各种工况下的最不利应力值； u_{jl} 为各工况下节点 j 在给定方向 l 上的位移值； K 为杆件数， A_{\min} 、 A_{\max} 为杆件截面尺寸约束的下限与上限。

5.7.2 桁架结构多目标优化设计算例

仍以典型 10 杆平面桁架和 25 杆空间桁架为例，采用 DEMO 进行求解，并将结果与其他文献进行对比分析。

算例(5.1) 10 杆平面桁架（连续设计变量）

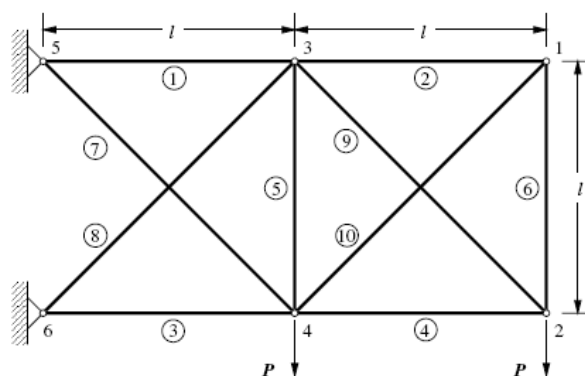


图 5.3 10 杆平面桁架

为了能与文献[59]的结果进行比较，结构的布置及杆件、节点编号如图 5.3。各杆使用材料相同，弹性模量 $E = 10^7 \text{ psi}$ ，允许应力 $[\sigma] = \pm 25 \text{ ksi}$ ，荷载 $P = 100 \text{ kip}$ ， $l = 360 \text{ in}$ 。本例截面设计变量设为连续，取值范围是从 0.1 in^2 到 35.0 in^2 。本例优化问题为以 10 杆截面面积为设计变量，使结构的体积和节点 2 的垂直位移同时达到最小 2 个目标优化。这 2 个目标之间本质上是相互冲突的，因为减小变形位移需增加截面面积，进而增大结构体积。

DEMO 参数设置：种群大小 NP=100，变异因子 F=0.8，杂交概率 CR=0.9，

变异策略 Strategy=DE/rand/1/bin, 最大迭代次数 Max_it=500。

下面从求解的收敛过程、边界值及对应的杆件截面积两项内容进行分析。

①收敛过程

实时跟踪种群目标空间中各点的位置有利于分析迭代的收敛过程。现将迭代至 50 代、100 代、300 代和 500 代后当前种群个体的目标向量用图 5.4 加以直观表示。由图可见, 迭代 50 代后种群中就基本均为非支配个体, 但尚未完全收敛到真实 Pareto 最优前沿; 有了一定的多样性, 但覆盖区域内的解尚不十分均匀, 同时边界点拓展的也不够。随着迭代次数的增加, 种群目标向量更加逼近 Pareto 最优前沿, 同时边界不断拓展, 解排列更加均匀有致。不难看出, 到 500 代时目标空间中的点均为非支配解, 且分布十分均匀, 达到了多目标优化的效果, 与文献[59]中采用的 Tchebycheff, Weighting, ε -constraint 方法结果对比见图 5.5。值得指出的是, 这几种方法均是文献[59]中求解近似 Pareto 曲线的实用数值方法, 文中利用均匀分布的权重系数计算 21 次而得的 21 个固定点进行曲线拟合。这些点中, 权重系数的极端点为 (0.0, 1.0) 和 (1.0, 0.0), 变化间距为 0.05。显然采用 DEMO 求解, 一次计算便可以得到更多更均匀的非支配解, 能够显示真实 Pareto 前沿的大致形状, 很好地达到了多目标优化的要求。而文献中方法得到的有限点并不能均匀地分布, 难以显示真实 Pareto 前沿形状。

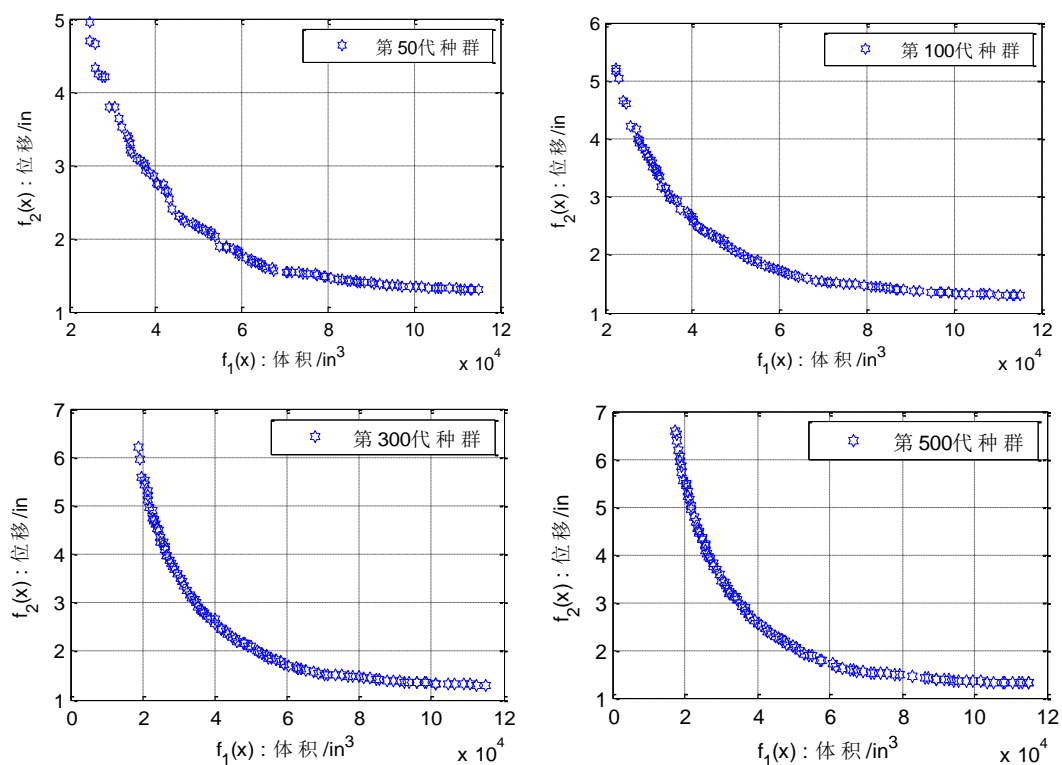


图 5.4 目标空间中各点收敛过程示意

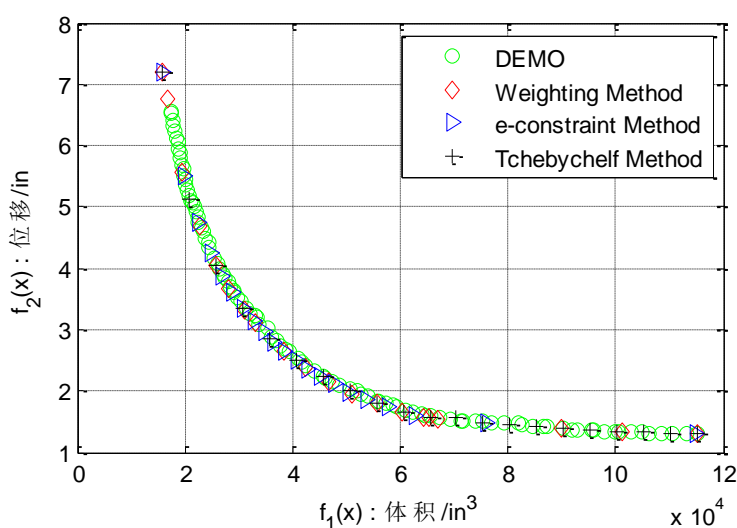


图 5.5 DEMO 第 500 代目标空间中各点与文献结果比较

② 极端点比较

本文将 DEMO 求得的极端点与文献[59]中结果进行对照（见表 5.3），极端点处杆件的截面积与文献结果对照（见表 5.4）。由于文献[59]中采用了加权法（且权重为 0: 0.05: 1 分布）对桁架目标函数进行了 21 次加权计算，因此它得到的将是理论上能够覆盖整个真实 Pareto 最优前沿的一些点。权重取极端点（0.0, 1.0）和（1.0, 0.0）时定义了理论上目标空间中的真实极端边界点。任何进化 MOP 算法求得的解应该均在此极端边界点中间的区域，且应尽量地逼近它。为结合工程实际，结果对比中仅取到小数点后 4 位。

迭代到 500 代时，当前 Pareto 最优前沿最大位移为 6.5505 in，最大体积为 115120.8000 in³。由表 5.1 与表 5.2 可知，采用本文算法所得到的最大体积与控制点最小位移的两个极端解都能很好的逼近文献中的三种方法所得到的结果。其中 DEMO 求得的极大体积点体积 115120.8000 in³ 稍超出文献算法定义的边界，这可能于文献中某些未曾提及的单位设置或是中间变量的取值精度不够有关。

表 5.3 10 杆桁架多目标优化极端点坐标比较表

| 方法 | 位置 | 体积 (in ³) | 位移 (in) |
|-------------------------------|-------|-----------------------|---------|
| DEMO(500 代) | 极大位移点 | 17292.9970 | 6.5505 |
| | 极大体积点 | 115120.8000 | 1.3034 |
| Weighting Method | 极大位移点 | 15936.5626 | 7.1969 |
| | 极大体积点 | 115114.7524 | 1.3034 |
| Tchebycheff Method | 极大位移点 | 15945.5321 | 7.1913 |
| | 极大体积点 | 114858.8405 | 1.3037 |
| ϵ -constraint Method | 极大位移点 | 15930.3384 | 7.1995 |
| | 极大体积点 | 115114.7513 | 1.3034 |

表 5.4 极端点处的截面变量值比较表

| 单元 编号 | 500 代 | | Weighting method | |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | 极大位移点 截面积/ in^2 | 极大体积点 截面积/ in^2 | 极大位移点 截面积/ in^2 | 极大体积点 截面积/ in^2 |
| x1 | 8.00 | 30.00 | 7.94 | 30.00 |
| x2 | 0.10 | 30.00 | 0.10 | 30.00 |
| x3 | 8.20 | 30.00 | 8.06 | 30.00 |
| x4 | 5.02 | 30.00 | 3.95 | 30.00 |
| x5 | 0.25 | 0.10 | 0.10 | 0.10 |
| x6 | 0.10 | 30.00 | 0.10 | 30.00 |
| x7 | 6.03 | 30.00 | 5.74 | 30.00 |
| x8 | 5.76 | 30.00 | 5.57 | 30.00 |
| x9 | 6.75 | 30.00 | 5.57 | 30.00 |
| x10 | 0.10 | 30.00 | 0.10 | 30.00 |

算例 (5.2) 25 杆空间桁架 (离散设计变量)

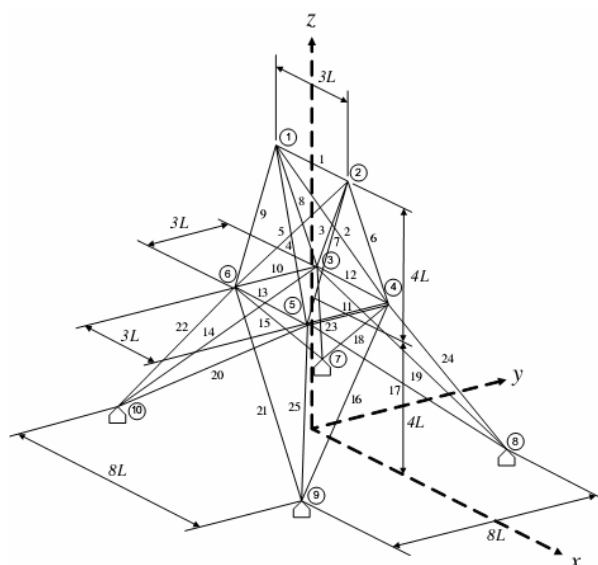


图 5.6 25-杆空间桁架

将图 5.6 所示的典型 25 杆空间桁架，用于离散设计变量多目标优化问题，即以每组杆件截面面积为离散设计变量，优化此结构使其总重量最轻的同时节点 1 的垂直位移最小。算例 (3.2b) 中曾得到 25 杆单目标离散变量优化的结果（重量 $484.85lb$ ，控制点位移 $0.35in$ ，实际节点位移 $0.35in$ ）。为了能与该结果进行比较，取与算例 (3.2b) 相同的结构参数：各杆使用相同材料，密度 $\rho=0.1 lb/in^3$ ，弹性模量 $E=10^7 psi$ ，允许应力 $[\sigma]=\pm 40 ksi$ 。离散截面面积集合为从 $0.1 in^2$ 到 $3.4 in^2$ 中以 $0.1 in^2$ 为增量的 34 个截面。设计荷载为单工况，同表 3.8。

迭代 500 代后目标空间中的所有点均为非支配解，结果见图 5.7。

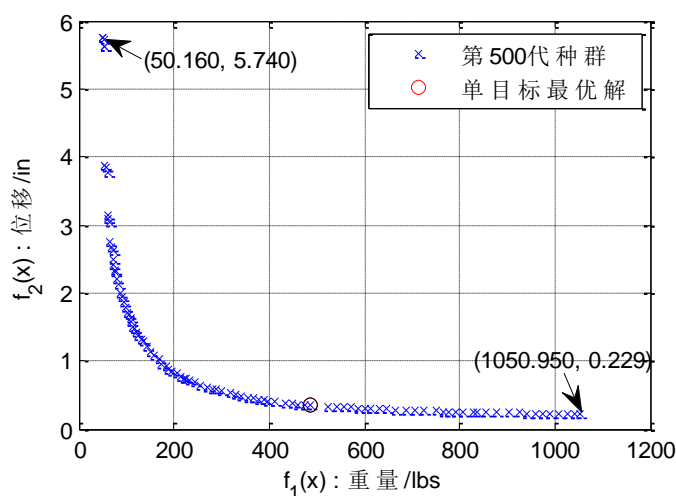


图 5.7 第 500 代种群在目标空间中的点

由图 5.7 可知，500 代时种群所有个体的目标向量均收敛到当前当前 Pareto 最优前沿，且在该前沿大部分缓和区域能够非常均匀分布。其中最轻设计总重量为 50.160 lb，控制点位移为 5.740 in；而控制点位移最小设计为 0.229 in，总重量为 1050.950 lb。单目标最优化结果用圆圈在图中画出，不难看出，该设计恰好基本与 DEMO 优化结果中的一个解重合，即本例的离散多目标优化所得 Pareto 最优前沿中包含离散单目标最优化的设计的结果。由此可见，DEMO 求解 25 杆空间桁架多目标优化问题能够给出一个很好的近似 Pareto 最优前沿。

由对本节两个算例的分析可以看出：DEMO 可以有效地进行桁架结构的多目标优化设计，由它得到的 Pareto 最优解集能够均匀覆盖理论上极端点之间的区域。与单目标优化结果的比较得知，该最优解集能够包含非常接近单目标优化的结果的解。

5.8 本章小结

根据微分演化算法在单目标桁架优化问题上的不凡表现，本章提出基于一种多目标微分演化算法—DEMO 的桁架多目标优化新方法。首先对 DEMO 进行了无约束和有约束的标准测试函数的测试，结果表明 DEMO 能够快速、准确地定出 Pareto 最优前沿，并使解集在该前沿均匀分布，很好地达到了多目标优化的要求，能够有效地解决无约束和有约束的多目标优化问题。

接着建立了基于最小重量（体积）和最小位移两个性能指标的桁架双目标优化数学模型，通过对 10 杆、25 杆两个典型桁架两目标优化问题的分析对比表明：

DEMO 可以有效、快捷地进行桁架多目标优化设计，由它求得的解集能够得到很好地逼近真实 Pareto 最优前沿，且能在该前沿均匀地分布，同时非支配解集中能够含有非常接近单目标最优化结果的非支配解。

第6章 考虑不确定性的桁架优化设计

6.1 引言

许多结构不可避免地受到各种不确定性因素的影响。显然，常规的确定性结构在确定性荷载作用下的优化设计模型和方法在这种情况下已不适用。本章将外荷载和结构系统的各项参数视为随机变数，研究基于概率（可靠度）的不确定性微分演化优化方法。

可靠度为产品在特定生命周期或一定的使用时间内，于特定的操作环境中达成其特定功能的能力。可靠度的概念起源于二次世界大战，德国人将此概念用于改善火箭的可靠度。大约在1950年美国国防部开始重视军品可靠度的问题，最有名的是成立电子装备可靠度顾问小组（Advisory Group on the Reliability of Electronic Equipment, AGREE）。可靠度的概念首先是以电子装备为研究对象，迄今电子系统的可靠性理论和方法已日渐成熟，并广泛应用于工程之中。关于结构可靠性的研究也可追溯到20世纪50年代初期，苏、美、日、加等国的学者都在结构可靠性研究方面做出了巨大的贡献。60、70年代由于越来越多的桥梁、高层建筑已接近设计寿命基准期，如何估计这些结构的使用性能成为当时迫切的任务。同时，人们认识到应用应力准则法设计出来的结构并不可靠，需要提出更合理的结构设计理论和方法。70年代计算机和计算方法的发展都极大地促进了结构可靠性研究的长足进步。然而，由于结构系统远比电子系统复杂，至今有关结构体系可靠性的理论和方法尚不尽完善系统。

6.2 结构可靠性优化的基本概念

结构可靠性优化是在常规优化方法基础上发展兴起的一种全新的结构设计方法，它的基本框架产生于结构可靠性理论与数学优化方法的有机结合。在考虑不确定性的结构优化中，把对结构的可靠性要求或者作为追求的目标，或者作为优化设计的约束，运用最优化方法寻求结构在概率意义下的最佳设计。

结构可靠性优化问题的求解包括结构分析、可靠度计算和优化设计三部分内容，其中结构可靠性分析是结构可靠性优化设计问题的核心，其最终目的是为了实现结构更加合理地进行优化设计。

与常规的优化相比，基于可靠度的优化设计不仅可以考虑荷载和系统参数

的随机性，而且能够获得满足可靠度要求的结构最佳设计方案，或在满足其他条件下使结构可靠度极大化，因而能够更好的符合工程实际、更为合理、有更好的适用性。

6.2.1 结构可靠性分析中的随机因素

在工程实践中，许多结构不可避免地受到各种随机因素的影响，主要包括：

- (1) 考虑结构本身材料参数的随机性，包括物理参数（如弹性模量 E ，剪切模量 G 、质量密度 ρ 、材料强度 σ 等），几何参数（如构件的截面尺寸 A ，结构的外形 L ，结构的装配尺寸）等为随机变量。
- (2) 考虑外荷载的随机因素（如外荷载的大小、方向和作用点等）。
- (3) 考虑结构边界条件的随机性（如支撑位置、支撑刚度、约束方式等）。
- (4) 结构阻尼的随机性。

结构的随机性因素多种多样，问题的复杂程度会随着考虑的随机因素的增加而显著增加。然而基于概率的结构可靠性分析和设计有其深刻和广泛的工程背景，因此有着广阔的发展前景和现实意义。

6.2.2 结构可靠性优化的研究概况与现状

目前，对于基于概率（可靠性）的结构优化设计研究已经取得了不少成果。陈建军(1997)^[60]曾经对我国结构可靠性优化设计研究方面的工作进行了综述。程心恕(1999)^[61]在基于随机有限元法的结构优化设计中，考虑了作用载荷和结构抗力的随机性。陈建军(1999,2001)^[62, 63]同时以杆系结构的位移概率和体系安全概率为约束，开展了多工况下的结构拓扑优化研究，对结构材料物理参数具有随机性的梁、板结构进行了基于概率的动力特性优化设计研究。马洪波^[64](2004)在其博士学位论文“随机结构可靠性分析和优化设计研究”中系统地讨论了采用遗传算法在框架结构静、动力下，基于单元与体系可靠度下的尺寸与形状优化设计中的应用。李靖^[65](2008)研究了基于体系可靠度的平面刚框架优化设计。刘喜宁^[66](2009)在其硕士学位论文“基于可靠性的桁架结构优化设计方法研究”中采用遗传算法以及最速下降法计算桁架可靠性优化问题。总的说来，上述论文中均是将可靠度指标显示化处理作为优化的约束条件，将之转化为确定性的优化问题，再与某种优化算法相结合来进行求解。

本文以桁架结构为对象，对结构的物理参数、几何尺寸和作用载荷三者同时具有随机性时，进行结构有限元和可靠性分析，在此基础上构建桁架结构基于概率的优化设计模型，运用微分演化算法进行优化设计。

6.3 随机桁架结构有限元分析^[64]

桁架结构有着广泛的应用，如高压输电架线塔架、大型起重机械臂、空间网架和钢桁桥结构等。杆单元仅承受杆件轴向力，是一种二力杆。

本节引用文献[64]中的内容，应用随机因子法处理结构分析中出现的各种随机因素，对桁架结构进行基于概率的结构有限元分析。

6.3.1 弹性模量 E 为随机变量

考虑到结构材料在成型过程中不可避免地受到多种随机因素的影响，使得同一种材料其物理参数弹性模量 E 的取值都呈现出一定的离散性，故在此将 E 作为随机变量。

设被分析的桁架结构共有 n_c 个单元，并采用同一种材料。利用随机因子法，随机变量 E 可被表示为： $E = \bar{E} \cdot \delta_E$ ，其中： \bar{E} 为 E 的均值， δ_E 为 E 的随机因子，其均值为 1、方差为 γ_E^2 。显然，由于 E 的随机性，从而将导致结构的刚度矩阵 $[K]$ 的随机性。

利用有限单元法，任意单元 e 在局部坐标系下的刚度矩阵 $[K^{(e)}]$ 为：

$$[K^{(e)}] = E \frac{A_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \delta_E \cdot [K^{(e)}]^\# \quad (6-1)$$

其中： l_e ， A_e 分别为 e 单元的杆长和杆截面积； $[K^{(e)}]^\#$ 为 $[K^{(e)}]$ 中的确定量部分，即常规有限元分析中的结构单元刚度矩阵。

此式表明：结构单元刚度矩阵被分解为随机变量 δ_E 和常量矩阵 $[K^{(e)}]^\#$ 两部分之积，其随机性仅取决于弹性模量随机因子 δ_E 的随机性，而在建立 $[K^{(e)}]^\#$ 时，仍同以往建立单元刚度矩阵一样即可。

进而在总体坐标系下单元 e 和结构的总刚度矩阵 $[\hat{K}^{(e)}]$ ， $[K]$ 分别为：

$$[\hat{K}^{(e)}] = \delta_E [T^{(e)}]^T [K^{(e)}]^\# [T^{(e)}] = \delta_E \cdot [\hat{K}^{(e)}]^\# \quad (6-2)$$

$$[K] = \sum_e^{n_e} [\hat{K}^{(e)}] = \delta_E \cdot \sum_e^{n_e} [\hat{K}^{(e)}]^\# = \delta_E \cdot [K]^\# \quad (6-3)$$

式中： $[\hat{K}^{(e)}]^\#$ ， $[K]^\#$ 分别为总体坐标系下 e 单元的常规刚度矩阵和结构的常规总刚度矩阵； $[T^{(e)}]$ 为 e 单元从局部坐标系到总体坐标系的坐标转换矩阵。

结构静力学有限元方程为

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{P\} \quad (6-4)$$

式中： $\{\delta\}$ 为结构总体坐标下的位移向量； $\{P\}$ 为结构外加载荷向量。

将(2-3)式代入(2-4)式可得

$$\delta_E \cdot [\hat{K}^{(e)}]^\# \cdot \{\delta\} = \{P\} \quad (6-5)$$

$$\{\delta\} = \frac{1}{\delta_E} ([\hat{K}^{(e)}]^\#)^{-1} \cdot \{P\} \quad (6-6)$$

由于上式中只有弹性模量随机因子 δ_E 具有随机性，因此可设 $\{\delta\}^\# = ([K]^\#)^{-1} \cdot \{P\}$ 为结构的常规位移有限元计算值(下同)，则(2-6)式可表为：

$$\{\delta\} = \frac{1}{\delta_E} \cdot \{\delta\}^\# \quad (6-7)$$

由上式，根据求解随机变量数字特征的代数综合法，可求出结构节点位移的均值和方差分别为：

$$\{\mu_\delta\} = (1 + \gamma_E^2) \cdot \{\delta\}^\# \quad (6-8)$$

$$\{\sigma_\delta^2\} = \gamma_E^2 \cdot \{\delta^2\}^\# \quad (6-9)$$

这里规定，当 X 为 n 维向量时， $\{X^2\}$ 的意义为 $\{X^2\} = \{x_1^2 \ x_2^2 \ \dots \ x_n^2\}^T$ ，以后遇到此类表达式时，意义相同，不再重复说明。

由有限元方程求出结构各节点的位移之后，对结构中各单元的应力可以通过如下的推导得到。为了与随机变量均方差加以区别，记结构的单元应力为 $\{S_e\}$ ，其中的每个分量 S_e 代表第 e 个单元的应力。由胡克定律可知，应力与节点位移(局部坐标下)的关系式为

$$\{s_e\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta_e\} \quad (6-10)$$

$$\{\delta_e\} = [T^{(e)}] \cdot \{\delta_e\}' \quad (6-10a)$$

其中： $[D]$ 为弹性矩阵，对于不同类型的单元具体表达式不同； $[B]$ 为几何矩阵，同样对不同单元来说具体表达式不同， $[D]$ 和 $[B]$ 都是定常矩阵； $\{\delta_e\}'$ 为单元 e 在总坐标系下的节点位移。

结构单元应力的大小取决于单元节点位移的大小，所以此时结构单元应力亦为随机变量，其随机变量的数字特征仅取决于单元节点位移的随机变量数字特征。由式(6-10)可得到应力随机变量的均值和方差分别为：

$$\{\mu_{s_e}\} = [D] \cdot [B] \cdot [T^{(e)}] \cdot \{\mu_\delta\} \quad (6-11)$$

$$\text{令:} \quad [Y]=[D] \cdot [B] \cdot [T^{(e)}] \quad (6-12)$$

则单元应力的方差表达式为:

$$\{\sigma_{se}^2\}=[Y^2] \cdot \{\sigma_{\delta}^2\} \quad (6-13)$$

6.3.2 几何尺寸 L 为随机变量

桁架结构的几何尺寸主要包括各杆件的长度 \bar{L} 和杆截面积 \bar{A} 两类, 显然, 长度 \bar{L} 和杆截面积 \bar{A} 的随机性亦将导致结构刚度阵的随机性。

(1) 这里首先考虑结构的杆长随机变量 \bar{L} 。为了便于分析, 假设各杆件长度 l^e 取值的分散性即变异系数均相等, 从而有 $\nu_l^{(e)} = \nu_l$, 应用随机因子法令: $l_e = \eta^{(e)} \cdot l$, 其中 $\eta^{(e)}$ 为确定性量, 表示第 e 杆长的公称尺寸; l 为杆长尺寸随机变量因子, 其均值为 1、方差为 γ_l^2 。由有限单元法, 各杆单元和结构的总刚度矩阵可分别表为:

$$[K^{(e)}] = E \frac{A_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \cdot \frac{EA_e}{\eta^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{l} [K^{(e)}]^\# \quad (6-14)$$

$$[K] = \frac{1}{l} \sum_e^{n_e} [\hat{K}^{(e)}]^\# = \frac{1}{l} \sum_e^{n_e} [T^{(e)}]^T [K^{(e)}]^\# [T^{(e)}] = \frac{1}{l} \cdot [K]^\# \quad (6-15)$$

式中: $[K^{(e)}]^\#$, $[K]^\#$ 为确定性矩阵, 为将各杆长尺寸的随机因子 l 提出后杆单元 e 和结构的刚度矩阵; $[\hat{K}^{(e)}]^\#$ 为总体坐标系下的单元刚度矩阵。

需要特别说明的是, e 单元的坐标转换矩阵 $[T^{(e)}]$ 具体表达式为

$$[T^{(e)}] = \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix}, \quad \text{其中:} \quad [\lambda] = [\cos(x, \bar{x}) \quad \cos(y, \bar{x}) \quad \cos(z, \bar{x})], \quad \text{该式中的}$$

$\cos(x, \bar{x}) \quad \cos(y, \bar{x}) \quad \cos(z, \bar{x})$ 分别表示结构 e 单元的局部坐标轴 \bar{x} 与总坐标轴 x ,

y, z 之间夹角的余弦, 它们均为杆长随机变量 \bar{L} 的高阶小量, 因此其随机性的影响可以忽略不计。

同理, 经过与 6.3.1 中类似的推导可得出, 当杆长 l_e 为随机变量时, 结构节点位移与单元应力的统计量, 即均值和方差。

将式(6-15)代入结构有限元方程式(6-4), 则有:

$$\frac{1}{l} \cdot [K]^\# \cdot \{\delta\} = \{P\}: \quad (6-16)$$

$$\text{从中解得:} \quad \{\delta\} = l \cdot ([K]^\#)^{-1} \cdot \{P\} \quad (6-17)$$

$$\text{同样令:} \quad \{\delta\}^\# = ([K]^\#)^{-1} \cdot \{P\}$$

$$\text{则(6-17)式被表示为} \quad \{\delta\} = l \cdot \{\delta\}^\#$$

从而结构各节点位移的均值和方差分别为

$$\{\mu_\delta\} = \{\delta\}^\# \quad (6-18)$$

$$\{\sigma_\delta^2\} = \gamma_l^2 \cdot \{\delta\}^\# \quad (6-19)$$

与 6.3.1 中的过程类似, 由式(6-10)、(6-10a)得单元应力的均值为

$$\{\mu_{se}\} = [D] \cdot [B] \cdot [T^{(e)}] \cdot \{\mu_{\delta e}\} \quad (6-20)$$

由式(6-12)可得单元应力的方差表达式为

$$\{\sigma_{se}^2\} = [Y^2] \cdot \{\sigma_{\delta e}^2\} \quad (6-21)$$

(2) 当结构的各单元截面积 \bar{A} 为随机变量时, 其处理过程与上述考虑杆长随机变量 \bar{L} 的情况完全相同, 这里不再赘述。

需要指出的是, 在通常的结构可靠性优化设计中, 单元截面积 \bar{A} 均被作为设计变量, 因此, 在优化过程中一般不再考虑其随机性; 而考虑其随机性的结构可靠性优化则属于随机规划的范畴, 此种情况下又需将单元截面积作为随机变量进行特殊处理。为此在本章下面的有限元分析和后续章节的基于可靠性的结构优化设计中不再考虑单元截面积 \bar{A} 的随机性。

6.3.3 外荷载 $\{P\}$ 为随机变量

外荷载 $\{P\}$ 具有随机性的一般情况是比较复杂的, 因为载荷的幅值、施加的位置以及载荷的方向等均可以具有随机性。文中只研究 $\{P\}$ 的幅值具有随机性的情况。设 $\{P\}$ 为一随机向量, 其各分量 P_i 的均值不尽相同, 但它们取值的分散程度是完全相同的, 且彼此完全正相关, 其对应的工程背景是: 结构受到来自于同一随机荷载源的作用。同样利用随机因子法, 将随机荷载向量 $\{P\}$ 分解为确定和随机两部分之积, 即令:

$$\{P\} = \Delta p \{ \beta \} \quad (6-22)$$

其中: $\{P_0\}$ 为外加载荷的均值; Δp 为一均值为 1、方差为 γ_p^2 的随机因子。

将(6-22)式代入(6-4)式得

$$[K] \cdot \{\delta\} = \Delta p \cdot \{P_0\} \quad (6-23)$$

从中解得
$$\{\delta\} = \Delta p \cdot ([K]^\#)^{-1} \cdot \{P\} \quad (6-24)$$

从上式出发, 可求得结构各节点位移随机向量的均值和方差分别为

$$\{\mu_\delta\} = [K]^{-1} \cdot \{P_0\} \quad (6-25)$$

$$\{\sigma_\delta^2\} = \gamma_p^2 \cdot \{\delta\}^\# \quad (6-26)$$

同样与 6.3.1 中的推导类似, 由 (6-10)、(6-10a) 可得单元应力的均值为

$$\{\mu_{se}\} = [D] \cdot [B] \cdot [T^{(e)}] \cdot \{\mu_{\delta e}\} \quad (6-27)$$

由式 (6-12) 可得单元应力的方差表达式为

$$\{\sigma_{se}^2\} = [Y] \cdot \{\sigma_{\delta e}^2\} \quad (6-28)$$

6.3.4 物理参数 E 、几何参数 l 和外加载荷 $\{P\}$ 均为随机变量

当弹性模量 E 、几何尺寸(杆长) l 和外加载荷 $\{P\}$ 同时为随机变量时, 结构分析的过程虽然复杂一些, 但仍然可按照 6.3.1、6.3.2、6.3.3 的方法进行推导, 得到结构节点位移和单元应力的统计量。注意到: 在物理参数、几何参数以及外加载荷三者中, 物理参数的随机性是由材料本身的物理性质以及材料成型过程决定的, 几何参数的随机性则来源于材料的加工和工艺, 而外加载荷的随机性来自于结构系统的外部环境, 所以三者之间通常没有必然的联系, 也就是说三个随机变量之间为互不相关的, 故可取两两随机变量之间的相关系数为零。基于此, 应用随机因子法进行结构分析如下:

将所有随机变量的随机因子提出单元刚度阵外, 则有

$$[K^{(e)}] = \frac{EA_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{E}{l} \cdot \frac{A_e}{\eta^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\delta_E}{l} [K^{(e)}]^\# \quad (6-29)$$

经坐标转换和单元刚度矩阵组集可得结构在总体坐标下的总刚度矩阵为

$$[K] = \sum_e^{n_e} [\hat{K}^{(e)}] = \frac{\delta_E}{l} \cdot \sum_e^{n_e} [\hat{K}^{(e)}]^\# = \frac{\delta_E}{l} \cdot [K]^\# \quad (6-30)$$

对随机载荷向量仍按 6.1.3 中的处理, 即

$$\{P\} = \Delta p \cdot \{P_0\} \quad (6-23)$$

再将式(6-30)、(6-23)代入结构有限元方程式(6-4)中, 得

$$\frac{\delta_E}{l} \cdot [K]^\# \cdot \{\delta\} = \Delta p \cdot \{P_0\} \quad (6-31)$$

从中解得结构位移随机向量为

$$\{\delta\} = \frac{l}{\delta_E} \cdot \Delta p \cdot ([K]^\#)^{-1} \{P_0\} \quad (6-32)$$

从上式出发，由代数综合法推得位移随机向量的均值和方差分别为

$$\{\mu_\delta\} = (1 + \gamma_E^2) \cdot ([K]^\#)^{-1} \{P_0\} = (1 + \gamma_E^2) \cdot \{\delta\}^\# \quad (6-33)$$

其中 $\{\delta\}^\# = ([K]^\#)^{-1} \{P_0\}$, 令 $\alpha = \frac{l}{\delta_E}$

则有 $\mu_\alpha = \frac{\mu_l}{\mu_{\delta E}} (1 + \gamma_E^2) = (1 + \gamma_E^2)$, $\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{\mu_{\delta E}^2} (\gamma_l^2 + \gamma_E^2) = (\gamma_l^2 + \gamma_E^2)$

所以

$$\begin{aligned} \{\sigma_\delta^2\} &= (\mu_\alpha^2 \cdot \sigma_p^2 + \mu_p^2 \cdot \sigma_\alpha^2 + \sigma_\alpha^2 \cdot \sigma_p^2) \cdot \{\delta^2\}^\# \\ &= [(1 + \gamma_E^2)^2 \cdot \gamma_p^2 + (\gamma_l^2 + \gamma_E^2) + (\gamma_l^2 + \gamma_E^2) \cdot \gamma_p^2] \cdot \{\delta^2\}^\# \end{aligned} \quad (6-34)$$

与 6.3.1 中的叙述类似，由式(6-10)、(6-10a)可得单元应力的均值为

$$\{\mu_{se}\} = [D] \cdot [B] \cdot [T^{(e)}] \cdot \{\mu_\delta\} \quad (6-35)$$

由式(6-12)可得单元应力的方差为

$$\{\sigma_{se}^2\} = [Y^2] \cdot \{\sigma_\delta^2\} \quad (6-36)$$

6.4 结构响应量的可靠性指标^[64]

上节中，详细分析了桁架结构在各种随机因素情况下，结构响应量（位移和应力）的均值和方差，并得到了位移和应力随机变量数字特征具体的计算表达式。本节在此基础上，根据应力—强度干涉理论和结构可靠性中的一次二阶矩方法，获得在随机因素影响下的结构响应量(节点位移和单元应力)的可靠性指标。

设：结构单元的强度为 r ，应力为 S ，由应力—强度干涉理论，可得事件 $(r > S)$ 的概率即可靠度为

$$P_r = P_{rob}(r > S) = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(r) F_S(r) dr \quad (6-37)$$

其中： $f_r(r)$ 为随机变量 r 的概率密度函数； $F_S(r)$ 为随机变量 S 的概率分布函数。

令 $Y = r - S$ 为强度裕度，则由随机函数和分布的表达式，可得事件 $Y > 0$

的可靠度为

$$P_r = P_{rob}(r > S) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dY \quad (6-38)$$

这里仅推导可靠性指标的模型是应力—强度的正态—正态模型，即认为结构的位移和单元应力响应以及许用位移和强度随机变量均服从正态分布。若这些随机变量服从其它类型的分布，我们总可以通过当量正态化处理，将其转化为正态变量。

设应力、强度均为正态分布，即 $S \sim N(\mu_S, \sigma_S)$ ， $r \sim N(\mu_r, \sigma_r)$ ，则由正态变量的再生性，有 $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$ ，其中 $\mu_Y = \mu_r - \mu_S$ ， $\sigma_Y = (\sigma_r^2 + \sigma_S^2)^{1/2}$ ，从而可靠度为

$$\begin{aligned} P_r = P_{rob}(r > S) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dY = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(Y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}} dY \\ (\text{令 } \mu &= \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}) &= \int_{\frac{\mu_Y}{\sigma_Y}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu \\ (\text{由对称性}) &= \int_{-\infty}^{\frac{\mu_Y}{\sigma_Y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} d\mu = \int_{-\infty}^{\beta} \varphi(\mu) d\mu = \Phi(\beta) \end{aligned}$$

利用结构可靠性中的一次二阶矩方法，可靠性指标 β 和相应的可靠度 P 为：

$$\beta = (\mu_R - \mu_S)(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{-1/2} \quad (6-39)$$

$$P = \Phi(\beta) \quad (6-40)$$

式中： $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态变量分布函数， μ 、 σ 分别表示随机变量的均值和标准差。

至此，给出了结构反应量的可靠性指标 β 的表达式，由此便可给出可靠性约束的表达式，关于可靠性约束的具体表达见后面小节。

6.5 基于可靠度的桁架结构不确定优化设计

本节在前面结构可靠性分析的基础上，构建了桁架结构基于可靠性的优化设计数学模型，并进行了算例分析。

6.5.1 优化模型

本节针对结构优化中的最一般情况，构建了以结构构件尺寸为设计变量，以结构重量均值极小化为目标函数，同时具有位移和应力性态约束的结构优化设计数学模型。由于在此同时考虑了作用荷载幅值、结构材料物理参数、几何参数和许用位移、应力等的不确定性，从而导致结构的所有位移和应力等性态约束均成为随机变量函数，它们须以概率(可靠度)形式表出。该优化设计的数学模型描述为：

模型 (6-1)：

$$\text{求 } \bar{A} = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T \quad (6-41)$$

$$\text{min: } \bar{W} = \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i A_i L_i + \lambda M, \quad \lambda = 0 \text{ or } \quad (6-42)$$

$$\text{s.t.: } P_\delta^* - P_r\{\delta_j^* - \delta_j \geq 0\} \leq 0 \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (6-43)$$

$$P_S^* - \min(P_r\{S_e^* - S_e \geq 0\}) \leq 0 \quad (e=1, 2, \dots, M) \quad (6-44)$$

$$A_{\min} \leq \bar{A} \leq A_{\max}, \quad (6-45)$$

式中： \bar{A} 是设计向量； n 为设计向量的维数； $\bar{\rho}_i$ 是第 i 类设计变量 A_i 对应的材料质量密度随机变量的均值； $A_i L_i$ 是第 i 类设计变量的体积， L_i 根据设计变量 A_i 选择的不同而定； \bar{W} 是结构重量均值； δ_j 、 S_e 均为随机变量，它们分别表示在随机荷载作用下结构中第 j 个自由度的位移和第 e 个单元的应力； δ_j^* 、 S_e^* 亦为随机变量，它们分别表示结构第 j 个自由度位移和第 e 个单元应力的许用量； P_δ^* 、 P_S^* 为设计给定的可靠度； $P_r\{\cdot\}$ 表示设计所得到的可靠度； A_{\max} 、 A_{\min} 分别为设计变量的上下限； N 为位移约束的数目； M 为结构中单元的数目。

对于其他类别的优化问题，只需修改相应的物理量，对模型略加修改即可。比如对于离散优化只需将设计变量的取值范围改为离散集；对于形状优化和多目标优化的概率模型可参考确定型模型进行稍加修改，恕不一一陈述。

6.5.2 可靠性约束的显式化处理^[64]

在以上优化数学模型中，可靠性约束均为设计变量的隐式复合函数，且以概率形式表出。为表达直观且利于编程，首先对概率约束进行等价显式处理。

由于模型中所有概率约束均可以如下统一形式表为：

$$P^* - P_r\{R - S \geq 0\} \leq 0 \quad (6-46)$$

其中： R 表示结构某物理量（位移或应力）的许用值随机变量； S 表示在结构荷载作用下与 R 对应的物理量（位移或应力）其响应值随机变量，在一般情况下 R 与 S 两者是彼此独立的。

由可靠性分析的一次二阶矩方法，上式可靠性约束可被表示为：

$$\beta^* - \beta \leq 0 \quad (6-47)$$

$$\beta^* = \Phi^{-1}(P^*) \quad (6-48)$$

$$\beta = (\mu_R - \mu_S)(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{-1/2} \quad (6-48a)$$

式中： $\Phi^{-1}(\cdot)$ 表示标准正态变量分布的反函数； μ 、 σ 分别表示随机变量的均值和标准差。

按照上式形式，则原优化模型中的概率约束(6-43)(6-44)式均可用其等价形式表示为：

$$\beta_\delta^* - \beta_{\delta_j} \leq 0 \quad (6-43a)$$

$$\beta_\delta^* = \Phi^{-1}(P_\delta^*) \quad \beta_{\delta_j} = (\mu_{\delta_j}^* - \mu_{\delta_j})(\sigma_{\delta_j}^{*2} + \sigma_{\delta_j}^2)^{-1/2} \quad (j = 1, \dots, N) \quad (6-43b)$$

$$\beta_S^* - \beta_{S_{min}} \leq 0 \quad (6-44a)$$

$$\beta_S^* = \Phi^{-1}(P_S^*) \quad \beta_{S_{min}} = (\mu_{S_e}^* - \mu_{S_e})(\sigma_{S_e}^{*2} + \sigma_{S_e}^2)^{-1/2} \quad (e = 1, 2, \dots, M) \quad (6-44b)$$

至此，原基于可靠性的结构优化模型可被表示为：

模型 (6-2)：

$$\begin{aligned} \text{find: } & \bar{A} = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T \\ \text{min: } & \bar{W} = \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i A_i L_i^3 \lambda \quad (6-42) \end{aligned}$$

$$\text{s.t. } : \beta_\delta^* - \beta_{\delta_j} \leq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (6-43a)$$

$$\beta_S^* - \beta_{S_{min}} \leq 0 \quad e \in 1, \dots, M, \quad (6-44b)$$

$$A_{min} \leq \bar{A} \leq A_m \quad (6-45)$$

6.5.3 程序设计流程

本节根据前述可靠性分析和所构建的优化设计数学模型，对基于可靠性的杆系结构优化设计编制了相应的程序，整个程序的流程图如图 5.1。

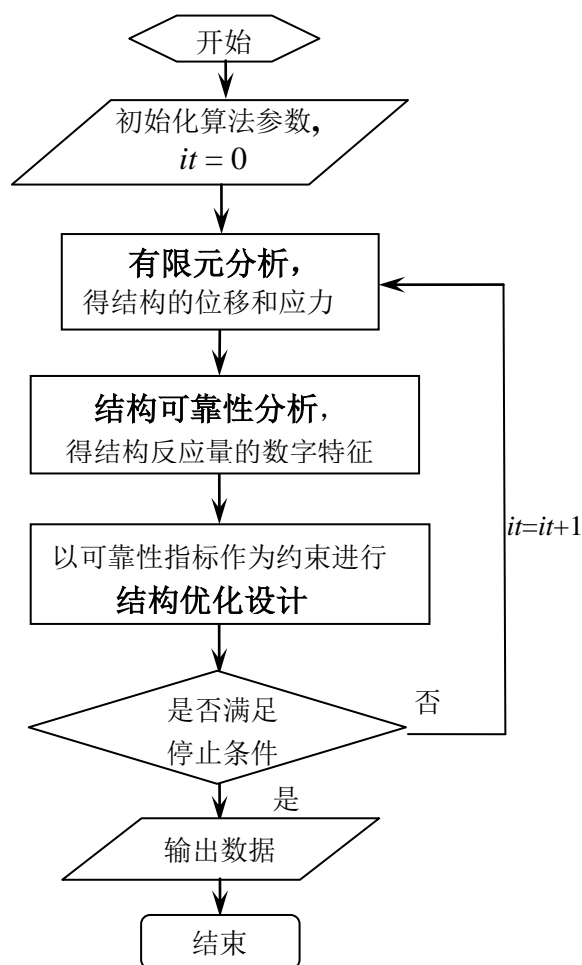


图 6.1 基于可靠性的总体优化程序设计流程图

6.5.4 基于可靠度约束的桁架尺寸优化设计

算例(6.1) 10 杆平面桁架

本算例是将外荷载、系统参数及材料强度视为随机变量，导入可靠度约束条件，做桁架结构在可靠度约束下的最优化设计。

表 6.1 各随机变量的平均值 μ 与变异系数 γ

| | E (ksi) | l (in) | σ_a (ksi) | P (kips) | Δ_a (in) |
|------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------|
| 平均值(μ) | 10^4 | 360 | 25 | 100 | 2 |
| 变异系数(γ) | 0.01, 0.05 ,0.1 | 0.01, 0.05 ,0.1 | 0.01, 0.05 ,0.1 | 0.01, 0.05 ,0.1 | 0 |

Case1.连续截面变量:

截面范围取为 $0.1\sim 35.0\text{ in}^2$ 。本 Case1 所代表的问题可描述为：单工况下基于可靠度约束的连续设计变量尺寸最优化设计。

表 6.2, 6.3, 6.4 分别为不同变异系数 γ 与最优化桁架结构重量之关系表, 从前述 3 个表, 可得表 6.5, 显示桁架经最优化在各种情况下的总重量, 再由表 6.5 得图 6.2, 图中显示在不同可靠度下变异系数与桁架总重量之关系, 由图可知变异系数 γ 越大或是可靠度 R 要求越高时, 则桁架结构重量越重, 重量范围由 5100.053 lb 到 7298.072 lb 之间。而桁架结构重量范围的变化也会随变异系数 γ 的大小而改变, 由表 4, 当 $\gamma=0.01$ 时, 桁架结构重量范围由 5100.053 lb 到 5234.647 lb 之间, 间距 134.594 lb 。当 $\gamma=0.1$ 时, 桁架结构重量范围由 5842.733 lb 到 7298.072 lb 之间, 间距 1455.339 lb 。而变异系数 γ 差 10 倍时, 重量范围的间距差了 10.813 倍。

相比于确定性优化(算例 3.1a)的结果 5023.0 lb 而言, 基于概率模型的优化结果要偏大, 偏大的数值与可靠度和变异系数有直接关系。

表 6.2 算例 1: 平面 10 杆桁架可靠度约束尺寸最优化结果表 ($R=0.8$)

| 面积(in^2) | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|---------------------|---------------|---------------|--------------|
| A ₁ | 30.490 | 32.354 | 34.594 |
| A ₂ | 0.100 | 0.103 | 0.100 |
| A ₃ | 23.077 | 24.901 | 26.691 |
| A ₄ | 15.722 | 16.699 | 17.900 |
| A ₅ | 0.100 | 0.100 | 0.101 |
| A ₆ | 0.102 | 0.101 | 0.101 |
| A ₇ | 20.992 | 22.072 | 23.769 |
| A ₈ | 7.622 | 8.368 | 9.451 |
| A ₉ | 0.100 | 0.100 | 0.102 |
| A ₁₀ | 22.253 | 23.360 | 25.235 |
| 重量(lb) | 5100.053 | 5417.393 | 5842.733 |

表 6.3 算例 1: 平面 10 杆桁架可靠度约束尺寸最优化结果表 ($R=0.9$)

| 面积(in^2) | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|---------------------|---------------|---------------|--------------|
| A1 | 30.892 | 33.520 | 34.992 |
| A2 | 0.100 | 0.100 | 0.100 |
| A3 | 23.363 | 25.945 | 29.064 |
| A4 | 15.844 | 17.382 | 19.177 |
| A5 | 0.100 | 0.100 | 0.100 |
| A6 | 0.106 | 0.103 | 0.102 |

续表 6.3 算例 1: 平面 10 杆桁架可靠度约束尺寸最优化结果表 ($R=0.9$)

| 面积(in^2) | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|--------------|---------------|---------------|--------------|
| A7 | 21.122 | 22.996 | 26.162 |
| A8 | 7.724 | 8.899 | 10.520 |
| A9 | 0.101 | 0.101 | 0.102 |
| A10 | 22.230 | 23.804 | 26.987 |
| 重量(lb) | 5140.089 | 5618.319 | 6253.987 |

 表 6.4 算例 1: 平面 10 杆桁架可靠度约束尺寸最优化结果表 ($R=0.99$)

| 面积(in^2) | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|-----------------|---------------|---------------|--------------|
| A ₁ | 31.383 | 34.934 | 34.999 |
| A ₂ | 0.101 | 0.102 | 0.101 |
| A ₃ | 23.920 | 28.496 | 34.973 |
| A ₄ | 16.017 | 18.360 | 23.200 |
| A ₅ | 0.100 | 0.101 | 0.100 |
| A ₆ | 0.107 | 0.105 | 0.100 |
| A ₇ | 21.513 | 25.069 | 31.360 |
| A ₈ | 7.950 | 10.112 | 12.995 |
| A ₉ | 0.104 | 0.101 | 0.100 |
| A ₁₀ | 22.602 | 26.452 | 32.801 |
| 重量(lb) | 5234.647 | 6098.457 | 7298.072 |

说明: $R=0.99$, $\gamma=0.1$ 时 1 杆截面达到边界值, 所以很难说这组截面为此状况的最优解。但是对表示总体趋势来说是可行的。

表 6.5 例 1 平面 10 杆桁架可靠度约束尺寸最优化之重量表(lb)

| 变异系数 γ 可靠度 R | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|------------------------|---------------|---------------|--------------|
| R=0.8 | 5100.053 | 5417.393 | 5842.733 |
| R=0.9 | 5140.089 | 5618.319 | 6253.987 |
| R=0.99 | 5234.647 | 6098.457 | 7298.072 |

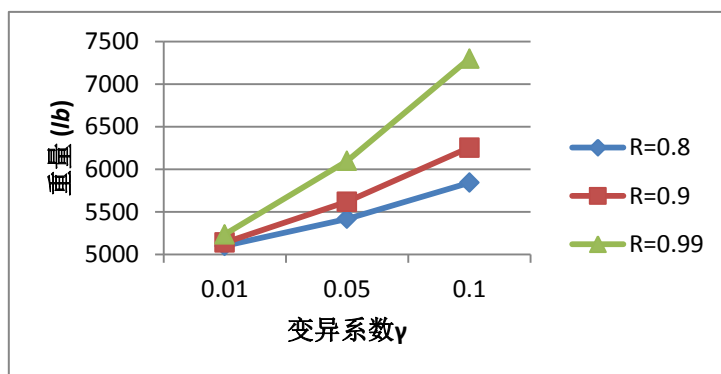


图 6.2 平面 10 杆桁架可靠度约束尺寸最优化，可靠度不同，变异系数与桁架总重量之关系

Case2 : 离散截面变量

截面集由 41 个离散值组成, (1.62, 1.80, 1.99, 2.13, 2.38, 2.62, 2.88, 2.93, 3.09, 3.13, 3.38, 3.47, 3.55, 3.63, 3.84, 3.87, 3.88, 4.18, 4.22, 4.49, 4.59, 4.80, 4.97, 5.12, 5.74, 7.22, 7.97, 11.5, 13.5, 13.9, 14.2, 15.5, 16.0, 16.9, 18.8, 19.9, 22.0, 22.9, 26.5, 30.0, and 33.5) in^2 。本 Case2 所代表的问题可描述为: 单工况下基于可靠度约束的离散设计变量尺寸最优化设计。

表 6.6, 6.7, 6.8 分别为不同变异系数 γ 与最优化桁架结构重量之关系表, 从前述 3 个表, 可得表 6.9, 显示桁架经最优化在各种情况下的总重量, 再由表 6.9 得图 6.3, 图中显示在不同可靠度下变异系数与桁架总重量之关系, 由图可知变异系数 γ 越大或是可靠度 R 要求越高时, 则桁架结构重量越重, 重量范围由 5568.958 lb 到 7883.466 lb 之间。而桁架结构重量范围的变化也会随变异系数 γ 的大小而改变, 由表 9, 当 $\gamma=0.01$ 时, 桁架结构重量范围由 5568.958 lb 到 5712.958 lb 之间, 间距 144.000 lb。当 $\gamma=0.1$ 时, 桁架结构重量范围由 6360.359 lb 到 7883.466 lb 之间, 间距 1523.107 lb。而变异系数 γ 差 10 倍时, 重量范围的间距差了 10.577 倍。

相比于确定性优化(算例 3.1b)的结果 5490.9 lb 而言, 基于可靠度的优化结果要偏大, 偏大的数值和可靠度与变异系数有直接关系。

表 6.6 算例 1: 平面 10 杆桁架可靠度约束尺寸最优化结果表 (R=0.8)

| 面积(in^2) | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|----------------|---------------|---------------|--------------|
| A ₁ | 33.5 | 33.5 | 33.5 |
| A ₂ | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| A ₃ | 22.0 | 26.5 | 30.0 |
| A ₄ | 16.0 | 15.5 | 19.9 |
| A ₅ | 1.62 | 1.62 | 1.62 |

续表 6.6 算例 1: 平面 10 杆桁架可靠度约束尺寸最优化结果表 ($R=0.8$)

| 面积(in^2) | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|-----------------|---------------|---------------|--------------|
| A ₆ | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| A ₇ | 22.9 | 22.9 | 26.5 |
| A ₈ | 7.97 | 11.5 | 11.5 |
| A ₉ | 1.62 | 1.80 | 1.62 |
| A ₁₀ | 22.9 | 22.9 | 22.9 |
| 重量(lb) | 5568.958 | 5901.841 | 6360.359 |

 表 6.7 算例 1: 平面 10 杆桁架可靠度约束尺寸最优化结果表 ($R=0.9$)

| 面积(in^2) | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|-----------------|---------------|---------------|--------------|
| A ₁ | 33.5 | 33.5 | 33.5 |
| A ₂ | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| A ₃ | 26.5 | 26.5 | 33.5 |
| A ₄ | 14.2 | 16.0 | 19.9 |
| A ₅ | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| A ₆ | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| A ₇ | 22.0 | 26.5 | 26.5 |
| A ₈ | 7.97 | 7.97 | 13.5 |
| A ₉ | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| A ₁₀ | 22.9 | 26.5 | 26.5 |
| 重量(lb) | 5620.338 | 6097.553 | 6771.464 |

 表 6.8 算例 1: 平面 10 杆桁架可靠度约束尺寸最优化结果表 ($R=0.99$)

| 面积(in^2) | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|-----------------|---------------|---------------|--------------|
| A ₁ | 33.5 | 33.5 | 33.5 |
| A ₂ | 1.62 | 1.80 | 1.62 |
| A ₃ | 26.5 | 26.5 | 33.5 |
| A ₄ | 15.5 | 19.9 | 30.0 |
| A ₅ | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| A ₆ | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| A ₇ | 22.9 | 30.0 | 33.5 |
| A ₈ | 7.97 | 11.5 | 14.2 |
| A ₉ | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| A ₁₀ | 22.9 | 26.5 | 33.5 |
| 重量(lb) | 5712.958 | 6602.312 | 7883.466 |

说明: $R=0.99$, $\gamma=0.1$ 时 1、3、7、10 杆截面均达到边界值, 这是截面范围受限所致, 同时这极大地增加了优化搜索的难度, 需要数次试算才能搜到可行解。用于表示总体趋势而言, 这个解是可行的。

表 6.9 例 1 平面 10 杆桁架可靠度约束尺寸最优化之重量表(lb)

| 变异系数 γ \ 可靠度 R | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|-----------------------|---------------|---------------|--------------|
| R=0.8 | 5568.958 | 5901.841 | 6360.359 |
| R=0.9 | 5620.338 | 6097.553 | 6771.464 |
| R=0.99 | 5712.958 | 6602.312 | 7883.466 |

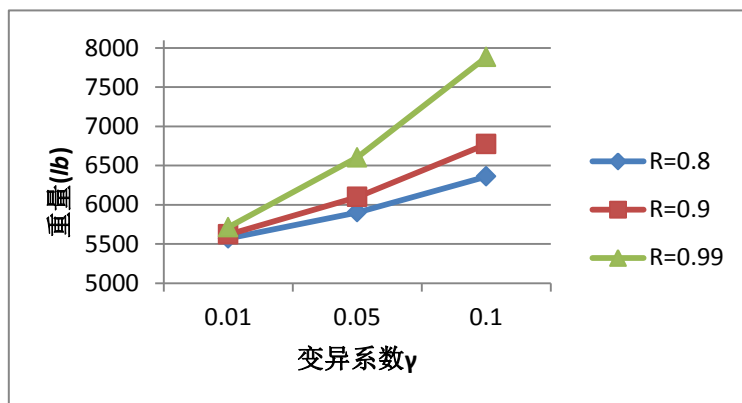


图 6.3 平面 10 杆桁架可靠度约束尺寸最优化，可靠度不同，变异系数与桁架总重量之关系

6.5.5 基于可靠度约束的桁架形状优化设计

算例 6.2 10 杆平面桁架（离散截面）

10 杆平面桁架结构参数，材料以及荷载参数，位移、应力约束，截面取值范围均与前面算例(4.3)一致。DE 参数：NP=70，F1=0.95，F=0.8，CR=0.85，变异策略取 DE/current-to-best/1

设计变量取为 $A=[A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, X_1, Y_1, X_3, Y_3]^T$ ，其中节点位置约束条件为： $540 \text{ in} \leq X_1 \leq 900 \text{ in}$ ， $180 \text{ in} \leq Y_1 \leq 540 \text{ in}$ ，

$$0 \text{ in} \leq X_3 \leq 360 \text{ in}, \quad 180 \text{ in} \leq Y_3 \leq 540 \text{ in}.$$

表 6.10, 6.11, 6.12 分别为不同变异系数 γ 与最优化桁架结构重量之关系表，规整前述 3 个表，可得表 6.13，显示桁架经形状最优化在各种情况下的总重量，再由表 6.13 得图 6.4。图中显示在不同可靠度下变异系数与桁架总重量之关系，由图可知变异系数 γ 越大或是可靠度 R 要求越高时，则桁架结构重量越重，重量范围由 5129.59 lb 到 7438.90 lb 之间。而桁架结构重量范围的变化也会随变异系数 γ 的大小而改变，当 $\gamma=0.01$ 时，桁架结构重量范围由 5129.59 lb 到 5254.22 lb 之间，间距 124.63 lb，当 $\gamma=0.1$ 时，桁架结构重量范围由 5840.68 lb 到 7438.90 lb 之间，间距 1598.22 lb。而变异系数 γ 差 10 倍时，重量范围的

间距差了 12.82 倍。

相对于确定性优化的结果 5074.34 *lb* 而言, 用可靠度考虑不确定性因素后的优化结果要偏大。

表 10 算例 6.2: 10 杆桁架可靠度约束形状最优化结果表 (R=0.8)

| 设计变量 | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|-------------------|---------------|---------------|--------------|
| A_1/in^2 | 33.5 | 33.5 | 33.5 |
| A_2 | 22.0 | 18.8 | 22.0 |
| A_3 | 26.5 | 26.5 | 30.0 |
| A_4 | 14.2 | 13.9 | 15.5 |
| A_5 | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| A_6 | 16.9 | 13.5 | 18.8 |
| A_7 | 16.0 | 19.9 | 19.9 |
| A_8 | 7.22 | 7.97 | 11.5 |
| A_9 | 5.74 | 5.74 | 4.97 |
| A_{10} | 2.38 | 5.12 | 4.22 |
| $X1/in$ | 648.006 | 667.560 | 614.318 |
| $Y1$ | 87.258 | 72.925 | 130.165 |
| $X3$ | 372.239 | 404.060 | 391.519 |
| $Y3$ | 290.629 | 289.524 | 299.442 |
| 总重量 (<i>lb</i>) | 5129.59 | 5434.20 | 5840.68 |

表 11 算例 6.2: 10 杆桁架可靠度约束形状最优化结果表 (R=0.9)

| 设计变量 | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|-------------------|---------------|---------------|--------------|
| A_1/in^2 | 33.5 | 33.5 | 33.5 |
| A_2 | 4.97 | 1.62 | 22.9 |
| A_3 | 22.9 | 26.5 | 33.5 |
| A_4 | 13.9 | 16.9 | 16.0 |
| A_5 | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| A_6 | 4.22 | 1.80 | 22.9 |
| A_7 | 18.8 | 22.0 | 18.8 |
| A_8 | 7.22 | 7.22 | 14.2 |
| A_9 | 2.98 | 1.62 | 7.97 |
| A_{10} | 18.8 | 26.5 | 3.87 |
| $X1/in$ | 697.474 | 772.185 | 607.068 |
| $Y1$ | 55.231 | 19.388 | 150.098 |
| $X3$ | 421.235 | 406.256 | 388.977 |
| $Y3$ | 285.617 | 289.725 | 305.351 |
| 总重量 (<i>lb</i>) | 5210.66 | 5738.71 | 6248.08 |

表 12 算例 6.2: 10 杆桁架可靠度约束形状最优化结果表 ($R=0.99$)

| 设计变量 | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|--------------|---------------|---------------|--------------|
| A_1/in^2 | 33.5 | 33.5 | 33.5 |
| A_2 | 18.8 | 22.9 | 18.8 |
| A_3 | 26.5 | 33.5 | 33.5 |
| A_4 | 13.5 | 16.0 | 26.5 |
| A_5 | 1.62 | 1.62 | 1.62 |
| A_6 | 16.9 | 22.0 | 19.9 |
| A_7 | 18.8 | 19.9 | 30.0 |
| A_8 | 7.97 | 11.5 | 13.5 |
| A_9 | 3.84 | 4.80 | 1.99 |
| A_{10} | 3.63 | 4.80 | 18.8 |
| $X1/in$ | 648.667 | 610.691 | 546.594 |
| $Y1$ | 88.386 | 128.622 | 168.587 |
| $X3$ | 401.034 | 400.396 | 372.692 |
| $Y3$ | 290.995 | 298.644 | 309.855 |
| 总重量 (lb) | 5254.22 | 6103.14 | 7438.90 |

表 6.13 例 1 平面 10 杆桁架可靠度约束形状最优化之重量表(lb)-离散截面

| 变异系数 γ 可靠度 R | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|--------------------------|---------------|---------------|--------------|
| $R=0.8$ | 5129.59 | 5434.20 | 5840.68 |
| $R=0.9$ | 5210.66 | 5738.71 | 6248.08 |
| $R=0.99$ | 5254.22 | 6103.14 | 7438.90 |

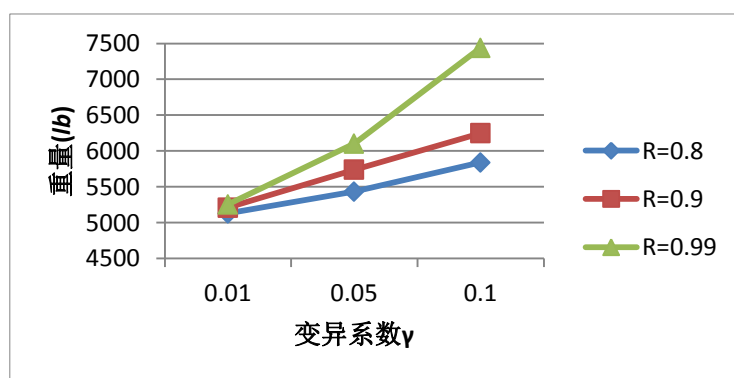


图 6.4 10 杆桁架可靠度约束形状最优化, 可靠度不同, 变异系数与桁架总重量之关系(离散截面)

算例 (6.3) 37 杆桁架桥 (连续截面)

结构系统参数同算例 (4.2a), 考虑局部稳定约束。DE 参数设置: NP=100, F1=0.75, F=0.6, CR=0.85, Max_it=500。

表 6.14, 6.15, 6.16 分别为不同变异系数 γ 与最优化桁架结构重量之关系表, 规整前述 3 个表, 可得表 6.17, 显示桁架经形状最优化在各种情况下的总重量, 再由表 6.17 得图 6.5。图中显示在不同可靠度下变异系数与桁架总重量之关系, 由图可知变异系数 γ 越大或是可靠度 R 要求越高时, 则桁架结构重量越重, 重量范围由 77.30 Kg 到 122.85 Kg 之间。而桁架结构重量范围的变化也会随变异系数 γ 的大小而改变, 当 $\gamma=0.01$ 时, 桁架结构重量范围由 77.30 Kg 到 80.59 Kg 之间, 间距 3.29 Kg, 当 $\gamma=0.1$ 时, 桁架结构重量范围由 94.91 Kg 到 122.85 Kg 之间, 间距 27.94 Kg。而变异系数 γ 差 10 倍时, 重量范围的间距差了 8.49 倍。

相对于确定性优化的结果 75.65 Kg 而言, 用可靠度考虑不确定性因素后的优化结果要偏大。

表 14 算例 6.2: 37 杆桁架可靠度约束形状最优化结果表 ($R=0.8$)

| 设计变量 | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|--------|---------------|---------------|--------------|
| A1 | 867.88 | 955.84 | 1045.49 |
| A2 | 50.17 | 75.58 | 120.72 |
| A3 | 50.04 | 50.12 | 50.15 |
| A4 | 801.32 | 931.75 | 1058.12 |
| A5 | 50.40 | 70.52 | 92.30 |
| A6 | 50.06 | 50.18 | 50.71 |
| A7 | 736.24 | 854.21 | 951.48 |
| A8 | 50.04 | 58.94 | 75.26 |
| A9 | 50.10 | 50.15 | 50.06 |
| A10 | 683.26 | 758.55 | 791.67 |
| A11 | 50.03 | 50.55 | 51.23 |
| A12 | 50.20 | 50.58 | 50.59 |
| A13 | 665.72 | 697.42 | 697.92 |
| A14 | 50.11 | 50.02 | 50.78 |
| A15 | 50.37 | 50.10 | 53.70 |
| A16 | 50.16 | 51.60 | 58.90 |
| A17 | 50.18 | 50.50 | 58.35 |
| A18 | 50.05 | 50.57 | 50.56 |
| A19 | 50.10 | 50.35 | 76.59 |
| Y3 | 655.70 | 634.09 | 691.55 |
| Y5 | 1165.65 | 1126.46 | 1228.20 |
| Y7 | 1529.86 | 1473.70 | 1608.01 |
| Y9 | 1700.71 | 1655.89 | 1782.70 |
| Y11 | 1745.84 | 1684.50 | 1799.35 |
| 总重量/Kg | 77.30 | 85.15 | 94.91 |

表 15 算例 6.2: 37 杆桁架可靠度约束形状最优化结果表 (R=0.9)

| 设计变量 | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|--------|---------------|---------------|--------------|
| A1 | 880.79 | 997.04 | 1043.99 |
| A2 | 50.40 | 98.67 | 86.82 |
| A3 | 50.10 | 50.12 | 50.01 |
| A4 | 819.23 | 991.89 | 1009.21 |
| A5 | 50.80 | 81.81 | 66.28 |
| A6 | 50.11 | 50.44 | 50.04 |
| A7 | 752.20 | 905.38 | 924.16 |
| A8 | 50.03 | 74.46 | 52.60 |
| A9 | 50.00 | 50.07 | 50.32 |
| A10 | 694.58 | 777.20 | 813.35 |
| A11 | 50.24 | 52.87 | 63.52 |
| A12 | 50.09 | 50.30 | 50.13 |
| A13 | 672.72 | 715.35 | 698.27 |
| A14 | 50.38 | 51.30 | 50.00 |
| A15 | 50.13 | 54.42 | 204.89 |
| A16 | 50.11 | 58.27 | 228.93 |
| A17 | 50.17 | 50.79 | 194.44 |
| A18 | 50.00 | 51.16 | 50.66 |
| A19 | 50.98 | 82.62 | 72.15 |
| Y3 | 650.50 | 651.73 | 841.85 |
| Y5 | 1155.77 | 1155.53 | 1417.55 |
| Y7 | 1513.52 | 1516.25 | 1757.10 |
| Y9 | 1694.15 | 1676.86 | 1913.78 |
| Y11 | 1717.34 | 1698.00 | 1934.38 |
| 总重量/Kg | 78.29 | 90.37 | 102.48 |

表 16 算例 6.2: 37 杆桁架可靠度约束形状最优化结果表 (R=0.99)

| 设计变量 | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|------|---------------|---------------|--------------|
| A1 | 909.89 | 1041.4 | 1195.2 |
| A2 | 56.89 | 104.03 | 122.04 |
| A3 | 50.09 | 52.08 | 50.13 |
| A4 | 862.54 | 1053.9 | 1191 |
| A5 | 53.34 | 91.69 | 92.61 |
| A6 | 50.04 | 50.27 | 50.17 |
| A7 | 791.08 | 983.19 | 1092.2 |
| A8 | 50.47 | 85.28 | 87.88 |
| A9 | 50.11 | 50.06 | 62.51 |

续表 16 算例 6.2: 37 杆桁架可靠度约束形状最优化结果表 (R=0.99)

| 设计变量 | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|--------|---------------|---------------|--------------|
| A10 | 718.14 | 813.53 | 902.54 |
| A11 | 50.22 | 55.35 | 104.03 |
| A12 | 50.09 | 50.02 | 80.73 |
| A13 | 684.67 | 707.81 | 703.29 |
| A14 | 50.15 | 50.17 | 50.98 |
| A15 | 50.79 | 158.2 | 170.58 |
| A16 | 50.58 | 175.23 | 197.56 |
| A17 | 50.00 | 119.48 | 166.73 |
| A18 | 50.27 | 50.68 | 101.4 |
| A19 | 50.35 | 70.92 | 139.42 |
| Y3 | 638.11 | 754.55 | 946.48 |
| Y5 | 1133.9 | 1286.4 | 1606.1 |
| Y7 | 1487.3 | 1664.8 | 2014.7 |
| Y9 | 1659.7 | 1808.9 | 2199.9 |
| Y11 | 1690.5 | 1825.4 | 2202.9 |
| 总重量/Kg | 80.59 | 101.18 | 122.85 |

表 6.17 例 1 平面 37 杆桁架可靠度约束形状最优化之重量表(Kg)-连续截面

| 变异系数 γ 可靠度 R | $\gamma=0.01$ | $\gamma=0.05$ | $\gamma=0.1$ |
|------------------------|---------------|---------------|--------------|
| R=0.8 | 77.30 | 85.15 | 94.91 |
| R=0.9 | 78.29 | 90.37 | 102.48 |
| R=0.99 | 80.59 | 101.18 | 122.85 |

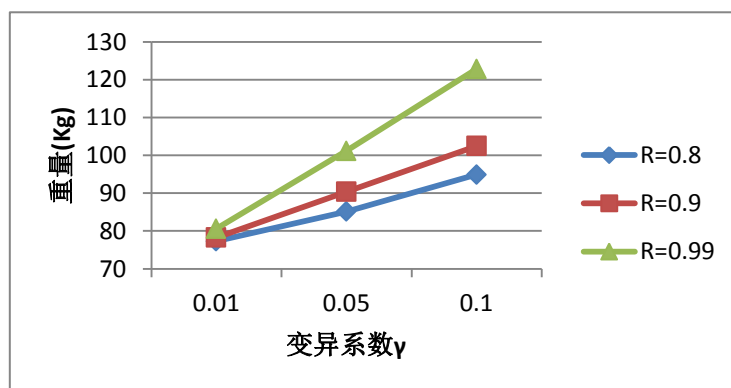


图 6.5 10 杆桁架可靠度约束形状最优化, 可靠度不同, 变异系数与桁架总重量之关系(连续截面)

6.6 本章小结

针对工程设计中存在的大量不确定性因素, 本文将其视为随机变数, 提出一种基于可靠度的求解不确定性优化问题的微分演化分析方法。建立了基于可靠度约束的桁架结构优化数学模型, 分别对典型桁架进行了基于可靠度的尺寸优化和形状优化设计。通过大量的数值计算对不同可靠度指标、不同变异系数情况下的优化结果进行了比较分析, 得出以下结论:

(1) 基于可靠度的桁架不确定优化设计的结果比确定性优化的结果偏大, 但更加符合工程实际背景。

(2) 优化结果的大小随着可靠度指标的提高和变异系数的增大而增大。

(3) 本文所提的分析方法能够发挥微分演化算法的优势, 可以快速、有效地进行基于可靠度的桁架结构优化设计。

第 7 章 总结与展望

7.1 本文工作总结

本文针对传统结构优化方法求解复杂优化问题存在的通用性差、效率低下、甚至无从下手等问题，以及现存一些现代智能优化算法求解复杂优化问题也面临的收敛性不佳等问题，提出一种基于微分演化算法的桁架结构优化设计新方法。以优化问题分类为导向，建立了基于该方法的求解各类优化问题的数学模型，通过对典型桁架结构的数值分析，并与其他优化方法结果对比，验证了本文所提方法在各类桁架优化问题中均有不凡的表现，优于以往结构优化的方法。本文的主要工作如下：

(1) 提出一种基于微分演化算法的桁架优化方法，它不仅可用于连续变量优化，经修改也可用于离散变量的优化。通过对几个典型桁架结构的优化设计分析，并与其他算法结果对比，验证了该方法用于桁架结构优化设计是有效的、且优于 GA, PSO, BB-BC 等优化算法。该方法克服了传统结构优化算法通用性差、效率不高、对某些问题无法有效求解等缺点，特别是在一些复杂离散优化问题上的出色表现也解决了运用多数现代智能优化算法求解稳定性差、收敛性不佳等难题。

(2) 提出一种在微分演化算法中考虑尺寸变量和节点位置变量相耦合的解决桁架形状优化问题的新方法，该方法也能够同时考虑连续变量和离散变量的耦合。通过对典型桁架结构的设计分析、结果对比，验证了该方法用于桁架形状优化问题的有效性、优越性。这种方法更符合优化设计的基本概念，而且克服了传统解算法决形状优化时依赖于问题初始解、难于耦合处理设计变量、分层求解难于收敛的尴尬，同时本文的工作对今后其他智能算法在该方面的应用起到了引领作用。

(3) 提出一种基于多目标微分演化算法—DEMO 的桁架多目标优化设计新方法。通过标准测试函数验证了 DEMO 求解多目标优化问题的有效性。然后建立了基于性能的桁架多目标优化数学模型，通过对典型桁架多目标优化设计问题的分析对比，验证了本文所提方法求解桁架多目标优化问题的卓越表现。

(4) 提出一种基于可靠度的不确定性优化问题的微分演化分析方法。将工程中大量存在的不确定性信息视为随机变数，将可靠度指标导入约束条件，建立了基于可靠度约束的桁架优化设计数学模型，分别对典型桁架进行了的尺寸、

形状优化。根据不同的可靠度指标和变异系数进行了大量的数值计算，得到了一些有用信息，可供实际优化设计参考。

7.2 未来的工作

基于本文所做的研究以及所遇到的问题，作者认为下一步研究工作可以从以下几个方面开展：

1、微分演化算法作为新的启发式算法，参数的选取往往依赖优化问题的类型，应该系统的研究该算法在不同优化问题中的参数选取规则；

2、除静力位移、应力约束外，还应考虑桁架系统的动力位移、频率等动力特性方面的约束。同样，在多目标优化问题中，也可将动力特性方面的参数取作一个目标来处理。

3、除杆单元外，应该讨论梁、板壳、索等多种单元考虑材料、制造以及使用，节点连接，边界约束，外荷载等多种不确定因素的随机有限元公式推导和可靠度指标计算。

4、除考虑结构的不确定性问题外，还应研究结构基于体系可靠性的优化设计问题，研究体系可靠性分配和再分配的方法。

5、结合相关规范开发相应的优化设计程序，使之用于实际工程结构优化。

致谢

时光荏苒，岁月如梭，一晃 2 年半的同济硕士生活即已画上句号。从本文的选题到论文的定稿，本人受到了很多人的帮助，对此本人感激不尽。

首先衷心的感谢恩师薛松涛教授与唐和生副教授，从论文的选题、开展到敲定，都离不开两位导师的默默指导。薛老师性格洒脱、学识渊博、善于鼓励学生。唐老师工作勤奋、为人师表、时刻心系学子的研究进展。没有二位老师在该领域的科研基础和后续指导就不会有我今天学位论文的顺利完成。此外，研究室里陈镕教授、谢丽宇讲师，在我研究生阶段也给予了很大的指点和鼓励，我真诚地感谢。还要深深地感谢 Tse-yung P. Chang 教授对我在求学生涯中产生的潜移默化的影响，以及曾给我的无私帮助。

还必须感谢我的父母，亲爱的奶奶和远在外地的亲朋好友，正是他们在情感和生活上对我的无私照顾、全力支持才能使我能够安心顺利的完成学业。

接下来感谢一起生活将近 3 年的同门李鹏飞、周进，室友李博、梁益，还有研究室的李峰、申道明等几位博士师兄，小屹、小兴等硕士师弟，你们的陪伴，让我的生活色彩斑斓。感谢同济 FOL 协会的郝壮、洪瀚、笑笑、陈伟、小斌等人，和大家风风火火一起办沙龙、出游、联欢让我真正融入了同济，深爱着同济。此外生活中佳林、耀北、文科等朋友也让我心存感激。在此，一并衷心感谢！

王兆亮

2010 年 4 月

参考文献

- [1] 郭鹏飞 韩英仕. 结构优化设计-21 世纪高等学校新理念教材建设工程(新理念), 沈阳: 东北大学出版社, 2005
- [2] 汪树玉, 刘国华, 包志仁. 结构优化设计的现状与进展 [J]. 基建优化 Vol 20,No.4 1999
- [3] 蔡文学, 程耿东. 桁架结构拓扑优化设计的模拟退火算法. 华南理工大学学报, 1998, 26 (9) : 78~84
- [4] Kennedy J, Eberhart R. Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks, Perth, November 27-December 1, 1995[C]. Piscataway: IEEE, 1995
- [5] Dorigo M, Gambardella L M. Ant colonies for the traveling salesman problem. BioSystems, 1997, 43: 73~81
- [6] Dorigo M, Caro G D. Ant algorithms for discrete optimization. Artificial Life, 1999, 5 (3) : 137~172
- [7] Osman K. Erol and Ibrahim Eksin. A new optimization method: Big Bang-Big Crunch. Advances in Engineering Software, 37 (2006) , 106-111
- [8] Storn R, Price,K. Differential evolution-A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces [J]. Journal of Global Optimization,1997,11(4):341~359.
- [9] 孙焕纯, 柴山, 王跃芳. 离散变量结构优化设计. 大连: 大连理工大学出版社, 1995
- [10] 孙焕纯, 王跃芳, 黄吉锋. 离散变量桁架的形状优化设计[J]. 大连理工大学学报, 1995, 35 (1) :10-16
- [11] 石连栓, 孙焕纯, 柴山. 两类变量综合处理的结构形状优化设计方法[J]. 计算力学学报, 1999, 16(4) : 416-420
- [12] Rajeev, S., and Krishnamoorthy, C. S. "Discrete optimization of structures using genetic algorithms." J. Struct. Eng.,1992,118(5), 1233 - 1250.
- [13] Galante, M. "Genetic algorithm as an approach to optimize real-world trusses." Int. J. Numer. Methods Eng., 1996,39, 361 - 382.
- [14] Camp, C. V., and Bichon, B. J. "Design of space trusses using ant colony optimization." J. Struct. Eng.,2004, Vol.130(5), 741 - 751.
- [15] Li LJ, Huang ZB, Liu F. A heuristic particle swarm optimization method for truss structures with discrete variables. Comput Struct, 2009, 87:435-443.
- [16] Camp, CV. Design of space trusses using big bang-big crunch optimization Journal of Structural Engineering-ASCE,2007,Vol.133(7): 999-1008.
- [17] 公茂果; 焦李成; 杨咚咚; 马文萍. 进化多目标优化算法研究. [J] 软件学报.2009,Vol.20,No.2: 271-289
- [18] 赵永翔. 多目标差分演化算法的构造及其应用[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2007

- [19] Abbass,H.A.: The self-adaptive pareto differential evolution algorithm. Congress on Evolutionary Computation(CEC' 2002). Vol.1(2002),831-836
- [20] Zitzler, E., Thiele, L.: Multi-objective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach. IEEE Tansactions on Evolutionary Computation, Vol.3, (1999) 257-271
- [21] Madavan, N.K.: Multi-objective optimization using a pareto differential evolution approach. Congress Evolutionary Computation, Vol.2, (2002) 1145-1150
- [22] Xue, F., Sanderson, A.C., Graves, R.J.: Pareto-based multi-objective differential evolution. Proceedings of the 2003 Congress on Evolutionary Computation(CEC' 2003). Vol.2,(2003)862-869
- [23] Tea, R., Bogdan, F.: DEMO: Differential Evolution for Multi-objective Optimization. EMO 2005 Proceedings, LNCS 3410,(2005)520-533
- [24] J.A. Adeyemo, F.A. O. Otieno. Multi-objective Differential Evolution Algorithm for Solving Engineering Problems [J] J of Applied Sciences.Vol:9 (2009), 3652-3661
- [25] 曹鸿钧. 基于凸集合模型的结构和多学科系统不确定性分析与设计.[D] 西安: 西安电子科技大学, 2005
- [26] Ben-Haim Y. and Elishakoff I., "Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics," Elsevier Science, Amsterdam. 1990.
- [27] Storn R, Price,K. Differential evolution-A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces [R]. Berkeley: University of California, 2006.
- [28] 刘波, 王凌, 金以慧, 等. 微粒群优化算法研究进展 [J]. 化工自动化及仪表, 2005, 32 (3) : 1-6
- [29] Hesheng Tang,Songtao Xue,Cunxin Fan. Differential Evolution strategy fro structural system identification. Computers and Structures. 86(2008) 2004-2012
- [30] 陈良, 戴光明, 张全元, 谢柏桥.差异演化算法及其改进形式的综述[J].计算机工程与设计, 2008,29(1):131-134.
- [31] Price, K. and R. Storn, 2008. Differential evolution (DE) for continuous function optimization. <http://www.ICSI.Berkeley.edu/~storn/code.html>
- [32] Cao, G. (1996). "Optimized design of framed structures using a genetic algorithm." Ph.D. thesis, Univ. of Memphis, Tenn.
- [33] Bland JA. Optimal structural design by ant colony optimization [J]. Engineering Optimization, 2001, Vol.33(4) :425-443
- [34] Li LJ, Huang ZB, Liu F, et al. A heuristic particle swarm optimizer for optimization of pin connected structures [J]. Computers & Structures, 2007, Vol. 85(7-8):340-349
- [35] Gong Wenyin, Cai Zhihua, Zhu Li. An efficient multi-objective differential evolution algorithm for engineering design [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization,2009,4(2):137~157
- [36] Coelho, Leandro dos Santos. Reliability-redundancy optimization by means of a chaotic differential evolution approach [J]. Chaos Solitons Fractals, 2009,7, Vol. 41(2), 594~602

- [37] Wu ZhiFeng, Huang HouKuan, Yang Bei, etc. A modified differential evolution algorithm with self-adaptive control parameters [C]// Proceedings of 2008 3rd International Conference on Intelligent System and Knowledge Engineering, 2008, 524~527
- [38] Camp, C., Pezeshk, S., and Cao, G. "Optimized design of two-dimensional structures using a genetic algorithm." J. Struct. Eng.,1998, Vol.124(5), 551 - 559.
- [39] Fourie, P. C., and Groenwold, A. A. "The particle swarm optimization algorithm in size and shape optimization." Struct. Multidiscip. Optim.,2002, 23, 259 - 267.
- [40] Schutte, J. J., and Groenwold, A. A. "Sizing design of truss structures using particle swarms." Struct. Multidiscip. Optim.,2003, 25, 261 - 269.
- [41] Lampinen, J., Zelinka, I., 1999. Mechanical engineering design optimization by differential evolution. In: Corne, D., Dorigo, M., Glover (Eds.), New Ideas in Optimization. McGraw Hill, International (UK), pp. 127 - 146.
- [42] Mahfouz, S. Y. "Design optimization of structural steelwork." Ph.D. thesis, Dept. of Civil and Environmental Engineering,1999, Univ. of Bradford, United Kingdom.
- [43] Wu SJ, Chow PT. Steady-state genetic algorithms for discrete optimization of trusses. Comput Struct 1995;56(6):979 - 91.
- [44] Lee KS, Geem ZW, Lee SH, Bae KW. The harmony search heuristic algorithm for discrete structural optimization. Eng Optim 2005;37(7):663 - 84.
- [45] Rozvany GIN, Bendsoe MP, Kirsh U. Layout optimization pitfalls in topology optimization [J] Appl. Mech. 1995, 48(2): 41-117
- [46] 隋允康, 由衷. 具有两类变量的空间桁架分层优化方法, 计算结构力学及其应用, 1998, Vol.7 No.4
- [47] 隋允康, 高峰, 龙连春等. 基于层次分解方法的桁架结构形状优化, 计算力学学报 2006,Vo l.23 , No. 1:46-51
- [48] D. Wang, W.H. Zhang, J.S. Jiang. Truss shape optimization with multiple displacement constraints [J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2002, 191: 3597-3612.
- [49] Wenyan Tang, Liyong Tong, Yuanxian Gu. Improved genetic algorithm for design optimization of truss structures with sizing, shape and topology variables. [J] Int. J Numer. Meth. Engng 2005,62:1737-1762
- [50] 刘齐茂, 燕柳斌, 邓朗妮. 桁架形状优化的一种改进模拟退火算法研究, 计算机工程与应用, 2007, 43 (23) : 218-221
- [51] Chee Kiong Soh, Yaowen Yang. Genetic Programming-Based Approach for Structural Optimization. Journal of Computing in Civil Engineering. 2000, Vol 14, No.1, January
- [52] Zielinski, Karin. Shape optimization of turbine stage using adaptive range differential evolution and three-dimensional Navier-stokes solver Proceedings of the 2nd IASTED International Conference on Computational Intelligence, 2006, 212-217
- [53] 王勇 基于微粒群算法的桁架结构优化设计 [D].上海:同济大学,2008.

- [54] 王栋, 张卫红, 姜节胜. 桁架结构形状与尺寸组合优化[J]. 应用力学学报, 2002,19(3): 72-76.
- [55] 朱朝艳, 离散变量结构优化设计中遗传算法的研究和应用 [D], 沈阳: 东北大学, 2004
- [56] Galante, M. and Oñate, E., “Genetic algorithms as an approach to optimize real-world trusses,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 361-382, 1996.
- [57] 邱兆宇. 具可靠度约束桁架结构最优化设计-使用改良的遗传算法 [D]. 国立台湾科技大学, 2009.
- [58] Deb K, Pratap A, Agarwal S, and Meyarivan T. A Fast and Elitist Multi-Objective. Genetic Algorithm: NSGA-II. *IEEE Trans. On Evolutionary Computation*, 2002,6(2):182-197.
- [59] Fadel G, Li Y. Approximating the Pareto curve to help solve biobjective design problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2002, 23: 280~296
- [60] 陈建军, 段宝岩, 王德满, 等. 我国结构可靠性优化研究综述. 计算力学学报, 1997, 14 (增刊): 477~482
- [61] 程心恕, 苏燕, 程旭日, 等. 基于随机有限元的结构优化设计. 福州大学学报 (自然科学版) 1999, 27 (3): 93~98
- [62] Chen Jianjun, Cao Yibo, Sun Huaian. Topology optimization of truss structures with systematic reliability constraints under multiple loading cases. *Acta Mechanica Sinica*, 1999,12(2):165~173
- [63] 陈建军, 车建文, 马洪波, 等. 桁架结构动力可靠性优化设计. 固体力学学报, 2001, 22 (1): 54~60
- [64] 马洪波, 随机结构可靠性分析和优化设计研究 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2004
- [65] 李靖, 基于体系可靠度的平面刚框架优化设计 [D] 长沙: 湖南大学, 2008
- [66] 刘喜宁, 基于可靠性的桁架结构优化设计方法研究 [D] 西安: 长安大学, 2009

个人简历 在读期间发表的学术论文与研究成果

个人简历:

王兆亮, 男, 1984 年 10 月生。

2003 年 9 月—2007 年 7 月 吉林大学 土木工程专业 获工学学士学位

2007 年 9 月进入同济大学 结构工程与防灾研究所 风工程专业 攻读硕士学位

已发表论文:

- [1] .Zhaoliang Wang, Hesheng Tang, Pengfei Li. Optimum Design of Truss Structures Based on Differential Evolution Strategy. ICIECS 2009 Vol 3 : 1576-1580 (EI 全文收录)
- [2] Pengfei Li, Hesheng Tang, Zhaoliang Wang. Parameter Estimation Using a SCE Strategy. (EI 全文收录)
- [3] 唐和生, 王兆亮, 薛松涛. 微分演化算法在桁架形状优化中的应用[J]. 土木、建筑与环境工程 Vol.32 (1) 2010: 42~50 (EI 检索)

待发表论文:

- [1] 王兆亮, 唐和生, 薛松涛. 微分演化算法在桁架尺寸优化中的应用