



同濟大學

TONGJI UNIVERSITY

硕士学位论文

基于 GPC 法的疲劳损伤预后不确定性分析

(国家自然科学基金项目资助 编号: 51178337, 50708076)

(科技部国家重点实验室基础研究项目 SLDRCE11-B-01)

(国家科技支撑计划 2013BAG19B01)

姓 名: 谢丽君

学 号: 1130731

所在院系: 土木工程学院

学科门类: 工学

学科专业: 风工程

指导教师: 薛松涛 教授

副指导教师: 唐和生 副教授

二〇一四年四月



同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

A dissertation submitted to
Tongji University in conformity with the requirements for
the degree of Master of Science

Uncertainty Analysis of Fatigue Damage Prognosis Using GPC Method

(Supported by the National Natural Science Foundation of China
(Grant No. 51178337 and 50708076), Basic Research of the State Key
Laboratory for Disaster Reduction in Civil Engineering of Tongji
University (Grant No.SLDRCE11-B-01) and Key Technologies
Research and Development Program of China (2013BAG19B01))

Candidate: Lijun Xie

Student Number: 1130731

School/Department: School of Civil Engineering

Discipline: Civil Engineering

Major: Wind Engineering

Supervisor: Songtao Xue

Deputy Supervisor: Hesheng Tang

April, 2014

基于GPC法的疲劳预后不确定性分析

谢丽君

同济大学

学位论文版权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版；学校有权保留学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构送交论文的复印件和电子版；在不以赢利为目的的前提下，学校可以适当复制论文的部分或全部内容用于学术活动。

学位论文作者签名：

年 月 日

同济大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律 responsibility 由本人承担。

学位论文作者签名：

年 月 日

摘要

在土木工程领域，损伤预后是结构耐久性研究的基础问题，对结构剩余使用寿命的准确预测至关重要。但是，结构的损伤预后受到工程材料分散性、结构服役环境复杂性以及损伤演化规律等影响，具有极强的不确定性。于是，本文引入不确定性理论分析损伤预后问题。由于不确定性因素的引入在一定程度上将使得原本复杂的土木工程问题的求解变得更为困难，因而选择高效的不确定性数值计算方法对于土木工程结构的损伤预后不确定性分析是十分必要的。

广义多项式混沌（GPC）法基于稀疏网格插值技术构造不确定性输出量在不确定性空间的代理多项式，将不确定性变量的分布信息放入后处理过程中，求解之前仅需给出不确定性变量的量化区间，可有效避免反复求解复杂系统。因此，本文针对损伤预后问题中存在的众多不确定性因素，建立基于广义多项式混沌（GPC）法的损伤预后分析方法，并以 Virkler 疲劳裂纹扩展实验数据为基础，考虑 Paris 参数为不确定性变量，验证 GPC 法在损伤预后不确定性分析中的有效性，主要工作有：

（1）分析 Virkler 实验数据，利用交叉验证技术分析材料参数的有效性，并最终确定 55 组实验数据用于计算。利用最小二乘法拟合 55 组材料参数，得出两者之间的线性关系显著。对材料参数可能的概率分布类型作出假定，提出综合考虑材料参数相关性和分布类型的金属板疲劳损伤预后不确定性模型。

（2）利用 GPC 法计算材料参数可能概率分布类型下的金属板剩余疲劳寿命，利用 K-S 检验分析金属板生育疲劳寿命的概率分布类型，与实验数据比较，分析最佳的材料参数分布类型和 GPC 法的有效性。

（3）对比 GPC 法与 Monte Carlo 法和随机 Galerkin 法在金属板疲劳损伤预后不确定性分析中的计算效率和计算精度，在两维不确定性问题中，GPC 法的计算精度基本与 Monte Carlo 法相当，计算效率明显高于 Monte Carlo 法和随机 Galerkin 法，由此说明 GPC 法是一种高效求解多维不确定性问题的方法。

关键词：疲劳损伤预后，不确定性分析，GPC 法，随机配点法

ABSTRACT

Damage prognosis is the basic problem in the research of durability of engineering structures. The development of reasonable measures to maintain structures relies on accurate prediction of the remaining useful life (RUL) of structures. While being affected by various sources of uncertainties, such as dispersion in engineering materials, complexity of structural service environment and the indetermination of damage evolution laws, the predicted RUL of structures in civil engineering field will be more obviously uncertain than other engineering structures. Therefore introducing uncertainty analysis in the damage prognosis is reasonable. However, that's may add difficulties in solving the original complex civil engineering problem. Choosing an efficient numerical method in damage prognosis of civil engineering structures is very necessary.

Generalized polynomial chaos (GPC) method utilizes Smolyak sparse grids to construct interpolation polynomials in the uncertainty spaces, and can achieve fast convergence with only being provided the interval values of uncertainties. Therefore, this paper proposes using GPC method to solving the uncertain damage prognosis problems in civil engineering. And based on the experimental data from fatigue crack propagation test conducted by Virkler et al, the damage prognosis of an 2024-T3 aluminum alloy plate with central mode I crack under the constant cyclic-load is analyzed, with considering $\lg C$ and m , the material parameters of Paris law, as the uncertainty variables and utilizing the generalized polynomial chaos (GPC) method. This paper mainly contains:

(1) The Sixty-eight Virkler's tests data is analyzed and with using the cross-validation technique the validities of $\lg C$ and m are investigated. Ultimately fifty-five sets of experimental data are used for uncertainty analysis. Experimental data of $\lg C$ and m are fitted by using the least square method and the result shows that the linear relationship between $\lg C$ and m is significant. The uncertainty model of fatigue damage prognosis is established with making assumptions about the possible probability distributions of $\lg C$ and m .

(2) The RUL of the metal plate under possible distribution types of $\lg C$ and m is calculated with using GPC method. And the distribution type of RUL is analyzed with utilizing the Kolmogorov-Smirnov test. Comparing the result of GPC method and

experimental data, the best distribution type of material parameters can be obtained and the availability of GPC method can be found out.

(3) With the comparison of the results of GPC method and the Monte Carlo simulation or Stochastic Galerkin method in uncertainty analysis of fatigue damage prognosis of the metal plate, the effectiveness and efficiency of these three methods are investigated, which show that the calculation accuracy of GPC method is approaching to Monte Carlo simulation in the two-dimensional uncertainty problem, while the computational efficiency of GPC method is significantly higher than Monte Carlo simulation and Stochastic Galerkin method. This illustrates that GPC method is an efficient method in solving multi-dimensional uncertainty problems.

Key Words: fatigue damage prognosis, uncertainty analysis, GPC method, stochastic collocation method

目录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 引言.....	1
1.2 损伤预后.....	2
1.2.1 基本概念.....	2
1.2.2 基本步骤.....	3
1.2.3 研究现状.....	5
1.3 不确定性分类及分析理论.....	6
1.3.1 不确定性分类.....	6
1.3.2 不确定性分析理论.....	7
1.4 不确定性数值计算方法.....	9
1.4.1 蒙特卡洛法.....	9
1.4.2 摄动法.....	10
1.4.3 区间法.....	10
1.4.4 随机有限元法.....	11
1.4.5 广义多项式混沌法 (GPC 法)	12
1.5 本文的主要研究内容.....	13
第 2 章 广义多项式混沌 (GPC) 法.....	15
2.1 引言.....	15
2.2 GPC 法的基本概念.....	15
2.2.1 不确定性问题的描述.....	15
2.2.2 不确定性的量化.....	16
2.2.3 不确定性问题的解.....	18
2.2.4 求解途径.....	19
2.3 随机配点法的计算步骤与方法.....	21
2.3.1 计算步骤.....	21
2.3.2 多项式插值方法.....	22
2.4 一维固定系数插值.....	23
2.4.1 Lagrange 插值	24
2.4.2 分段线性插值.....	25
2.5 高维固定系数插值.....	27
2.5.1 张量积 (Tensor Product)	27
2.5.2 全张量积法.....	28
2.5.3 稀疏网格插值法.....	29
2.5.4 两种高维插值方法的比较.....	31
2.6 本章小结.....	34
第 3 章 基于 GPC 法的金属板疲劳损伤预后不确定性分析.....	35
3.1 引言.....	35
3.2 断裂力学的基础知识.....	36

3.2.1 疲劳损伤过程.....	36
3.2.2 疲劳裂纹扩展速率模型.....	37
3.2.3 应力强度因子的计算方法.....	39
3.3 疲劳裂纹扩展实验数据和材料参数评估.....	41
3.3.1 疲劳裂纹扩展实验.....	41
3.3.2 材料参数的实验值.....	42
3.3.3 疲劳裂纹扩展曲线重建.....	43
3.3.4 材料参数交叉验证.....	44
3.3.5 材料参数分布类型假定.....	46
3.4 金属板疲劳损伤预后不确定性分析.....	47
3.4.1 金属板疲劳损伤预后模型.....	47
3.4.2 剩余疲劳寿命代理多项式.....	48
3.4.3 正态分布参数假定下剩余疲劳寿命评估.....	51
3.4.4 均匀分布参数假定下剩余疲劳寿命评估.....	53
3.4.5 两种参数分布类型下剩余疲劳寿命比较.....	56
3.5 本章小结.....	58
第 4 章 GPC 法与其他不确定性分析方法的比较.....	59
4.1 引言.....	59
4.2 基于 Monte Carlo 法的损伤预后不确定性分析.....	59
4.2.1 正态分布参数假定.....	60
4.2.2 与 GPC 法比较.....	62
4.3 基于随机 Galerkin 法的损伤预后不确定性分析.....	64
4.3.1 正态分布参数假定.....	65
4.3.2 与 GPC 法比较.....	68
4.4 本章小结.....	71
第五章 结论与展望.....	73
5.1 结论.....	73
5.2 进一步的研究工作.....	74
致谢.....	75
参考文献.....	77
个人简历、在读期间发表的学术论文与研究成果.....	83

第 1 章 绪论

1.1 引言

近年,随着我国城市化进程不断加深,大量土工结构如雨后春笋般拔地而起,异型、超高层、特大型地标性建筑已然成为城市形象的代言,对这些特型建筑结构健康监测的研究也逐渐引起了科研工作者的注意。其中,结构耐久性问题越发得到人们的关注。工程的生命周期包括工程建造过程、使用过程和老化过程。以往的工程设计阶段仅考虑使用过程的安全性,而事实上使用阶段的平均风险率是最低的^[1]。在老化过程中,材料性能在长时间的环境作用中逐渐退化,结构功能不能继续满足人们的使用要求,安全性也随之降低。由此,人们每年需要投入大量资金用于结构的维护和修缮。于是,在工程设计阶段除了应考虑使用过程的安全,还应最大限度地增加结构的耐久性。而损伤预后是工程耐久性问题中所需研究的最基本问题。损伤预后是指根据结构当前损伤状态的精确信息及结构未来服役环境的预测信息,以结构损伤演化模型为基础,预测结构的剩余使用寿命^[2,3]。

目前,我国工程建设的规模公认世界第一,每年用于工程建设领域的投资占到 GDP (国内生产总值) 的 15% 左右^[1]。随着工程技术和国民经济的飞速发展,土木结构正朝着高层次、大柔度方向迈进^[4],其中大型土木结构的数量已稳居世界前列。大型土木结构包括特超高层建筑、大跨桥梁和大型体育场馆等重要的土木基础设施^[5]。在全球前十的超高层建筑中,有六座出自我国,平均高度为 590 米。而我国已建和在建的跨海大桥已达到 31 座,容纳观众数在 1 万以上的大型体育场馆已超过 200 座。这些结构通常构形复杂、施工难度大且耗时长,建成后不可避免地存在先天性细观缺陷,简称初始缺陷或初始损伤。初始缺陷,在结构服役期内受到环境侵蚀、材料性能退化、荷载的长期疲劳效应等因素的综合作用,逐步演化发展,导致结构损伤累积和抗力衰减,如不及时制定有效的维修策略,最终会引起结构失效。而且,大型土木结构一般是所在地的地标性建筑,一旦发生破坏,不仅会造成重大人员伤亡和巨大经济损失,而且会产生极坏的社会影响^[5]。因此,解决大型土木结构的安全服役问题,在我国具有重大的现实意义。损伤预后,是基于结构的损伤演化规律,得到大型土木结构的剩余使用寿命的预测值,为制定合理的维修措施提供理论依据,进而防止结构在正常使用条件下发生突然倒塌。

众所周知,砖、石、木材、混凝土和钢筋混凝土等土木工程中常用的建筑材料,绝大部分是非均质的。由于制作工艺、材料配比和养护等因素的影响,材料

物性能参数具有不确定性，例如：如弹性模量、泊松比、断裂韧性等。而且，在不同构件上的测量值或在同一构件不同部位上的测量值也是不同的。在土木结构的施工和建造过程中由于人员素质、施工机械设备、施工工艺和施工环境的差异，材料和构件初始缺陷的分布和尺寸具有不确定性。结构在服役过程中又可能会受到地震、降雨、风、雪等自然现象的作用，导致荷载也具有不确定性^[6]。此外，损伤演化跨越微观、细观和宏观，是一种多尺度、跨层次和非线性的演化过程^[5]。人们对于损伤演化规律的认知具有差异性，导致数学计算的“物理模型”具有不确定性。由于在土木工程实践的设计、施工和使用等环节中存在大量的不确定性因素，将不确定性分析引入疲劳损伤预后中是自然而合理的选择。

不确定性分析在原确定性问题的基础上增加了不确定性因素的影响，使得原问题的求解更为复杂，但更符合工程实际。早期人们一般采用基于随机分析理论的方法求解不确定性问题的解析解，其中比较著名的方法有 Ito 积分、Stratonovich 积分和 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程。事实上，很多工程实际问题的解析解是很难找到或根本不存在。因此，这些方法只适用于求解某些特定的工程问题。目前，随着计算机技术的飞速发展，数值计算方法被广泛用于不确定性问题的求解中，比较常用的方法有蒙特卡洛 (Monte Carlo) 法、区间法和广义多项式混沌 (Generalize Polynomial Chaos, GPC) 法等。高效数值计算方法的开发使复杂系统的不确定性分析得以实现，如高层结构抗震、桥梁抗风、结构的稳定性及失效等。

1.2 损伤预后

1.2.1 基本概念

随着结构健康监测 (Structural Health Monitoring, SHM) 技术的发展和成熟，工程领域将迎来一个更全面、更综合的研究课题——损伤预后 (Damage Prognosis, DP)^[3]。损伤预后即预测结构的剩余使用寿命，同结构健康监测一样，对损伤预后研究的目的主要在于这项技术带来的潜在生命安全保障和经济利益。损伤预后几乎在所有的工程结构和医学系统中有所应用，以及军事装备、民用基础设施、制造设备和商用航空系统。它需耦合多种信息，包括：使用监测信息，结构健康监测信息，过去、现在及未来的服役环境和操作条件，初始设计时的荷载和操作条件假定，构件和系统历史的检测和维护信息。在此需区别“使用监测”和“健康监测”的概念。

使用监测是指获得结构或系统的荷载条件和响应信息的过程，侧重于测量外

部环境变量（如温度和湿度）和操作变量（如质量和速度）。

结构健康监测是指结构或系统的损伤检测和识别过程。它利用现场无损检测技术,通过分析包括结构响应在内的结构整体特性,识别结构损伤的位置和程度,实时监控结构的运行状态^[7]。结构健康监测系统通常包括四部分:传感器系统,数据采集与处理系统,损伤识别和安全评定系统,数据管理子系统。当结构受到突发性荷载的作用,如地震、爆炸性荷载等,结构健康监测系统可对结构的可靠性做出迅速评估。对于长期的结构健康监测过程,由于结构在荷载的长期作用下逐渐老化、功能衰退,其输出信息是定期修正的。

结构的寿命预测是荷载和结构当前损伤性能的函数,因此使用监测和结构健康监测都是损伤预后中不可缺失的部分,它们三者之间的关系如图 1.1 所示。

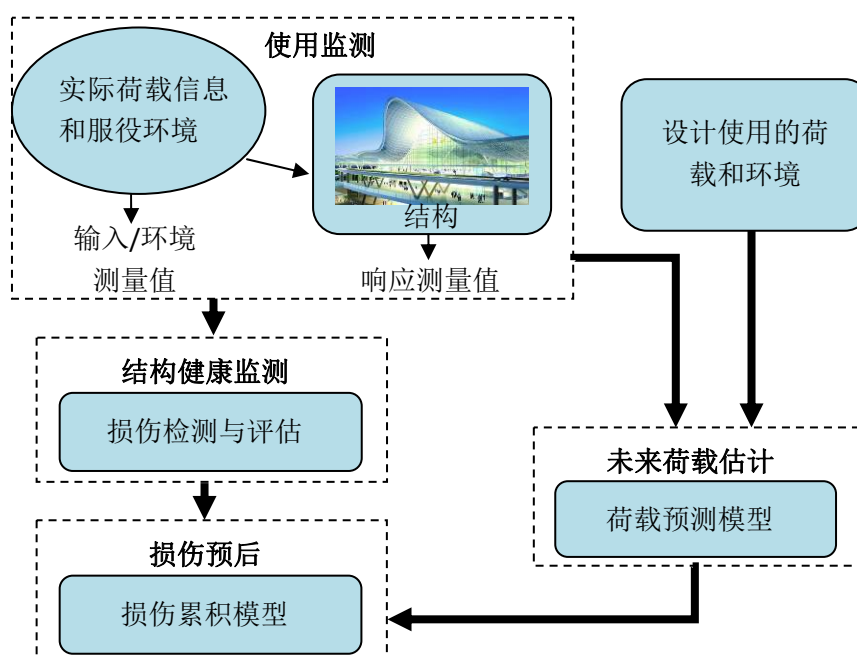


图 1.1 使用监测、结构健康监测和损伤预后三者之间的关系

1.2.2 基本步骤

这里将介绍损伤预后的一般过程,尽管损伤预后的实际应用过程因工程结构的不同而存在着差异,但基本组成部分或基本要素是相同的。图 1.2 对这些基本要素进行了罗列,其中阴影部分表示因结构而异的要素,包括结构设计要求、结构性能参数和未来荷载估计,这部分要素决定着其他三部分要素(预测模型、数据审查及仪器和数据处理硬件)在损伤预后过程中的作用方式。

损伤预后的首要工作是对预后问题进行分类。损伤预后问题涉及到以下三个方面的内容:损伤来源、损伤评估类型以及预后目的。下面将对这三方面内容进

行介绍。

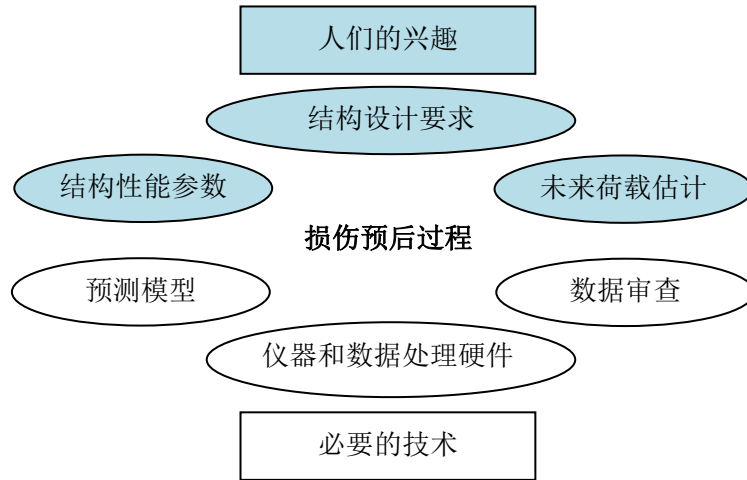


图 1.2 损伤预后过程的基本要素

(1) 损伤来源的类型有三种：渐变损伤、可预测的突发事件和不可预测的突发事件。渐变损伤（gradual wear）为微观尺度上的损伤，且损伤累积的速度十分缓慢，例如疲劳开裂和腐蚀。可预测突发事件引起的损伤一般起源于微观尺度，但损伤累积的速度非常快，且一般具有先验性。最后一种损伤来源主要是指未知的荷载作用，例如地震、海啸和强风等。通常，在一种失效方案中，只考虑一种损伤来源的影响。

(2) 损伤评估类型包含损伤评估方式和损伤评估技术。其中损伤评估的方式有：在线评估/实时评估，离线评估/间断评估。不同的评估方式对数据处理的要求不一样，进而对预后技术的要求也不一样。损伤来源对评估方式的选取有一定的限制作用。对于不可预测的突发事件，评估方式应该选择在线评估。而对于渐变损伤，两种评估方式都可以选择。损伤评估技术通常有两种：基于物理的和基于数据的。在实际应用时，一般将两种技术结合使用。基于物理的损伤技术，顾名思义，是以控制系统输出量的数学方程为基础，利用数值方法模拟实际物理损伤过程，从理论上预测系统的行为。该技术尤其适用于预测新的荷载作用或新的损伤状态下的系统输出量，但该方法的计算量十分巨大。而基于数据的评估技术依赖于结构先前的监测数据，利用损伤识别方法（例如神经网络法）评估结构当前的损伤状态。基于数据的评估技术可以反映出新荷载条件下和新结构构件中的损伤，但识别的精度很低。由于实验室中没有这种新的损伤情形的实验数据，所以通常不能直接用基于物理的模型来“训练”基于数据的评估技术，两者之间的平衡主要依赖于相关数据的数量和基于物理的模型的置信水平。

(3) 预后目的有两种：失效时间和完成预定功能的概率。大部分预后是为

得到结构在维修之前的继续使用时间，即失效时间，也称使用寿命。使用寿命的预测在损伤为逐步累积且累积的速率可被预测时具有较高的价值，而在突发事件引起的损伤中价值较低，例如地震中人们更关心房屋是否能完成预定功能——不发生倒塌或者在人们逃生后倒塌。

对损伤预后问题进行分类是为了确定合适的测量、评估和预后技术，预后过程的一般步骤如图 1.3 所示，图中对基于物理的损伤评估、基于数据的损伤评估以及预测值之间的关系进行了表述。预后过程始于大量收集结构的初始状态信息，主要用于建立结构初始的基于物理的数学模型（简称物理模型）和布置损伤状态评估所需的传感系统。物理模型也可作为传感系统的布置提供必要信息，例如传感器的位置、带宽和灵敏度等。而从传感系统获得的数据又可用于物理模型的验证和更新。这些数据和物理模型一起，可用于评估结构当前的损伤状态，包括损伤的位置、类型和程度。同时，不断随时间更新的结构特性和损伤状态的识别信息也可用于更新物理模型。由操作和环境传感器提供的数据可用于建立基于数据的模型，简称数据模型，可预测结构未来的荷载信息。最后，将未来荷载的预测模型、结构状态评估模型和更新的物理模型三者的输出量一起作为基于可靠性的预测工具的输入量，可获得结构剩余寿命的估计值。

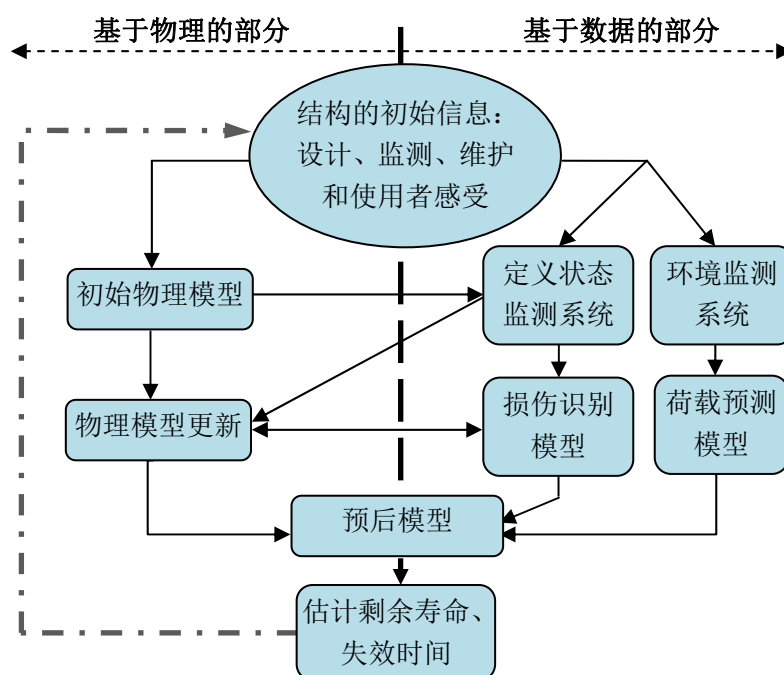


图 1.3 损伤预后求解的一般步骤

1.2.3 研究现状

损伤预后领域中早期发表的论文主要关注工程系统中的损伤识别问题^[8]、裂

纹扩展问题和健康监测问题。随着各部分研究的深入进行，一个综合性强的研究方向——损伤预后，逐渐引起人们的关注。且近年来损伤检测技术的极大提高，实现了损伤预后从理论研究到实际工程应用的飞跃。

目前，损伤预后的应用主要集中在航空和机械领域。Adams 和 Purdue^[9]通过耦合低阶的损伤模型和结构动力学方程，建立了一种非线性的、动态的损伤诊断和预后框架。随后，两人通过飞行器的实验对该研究成果进行了验证^[10]。Ling 和 Mahadevan^[11]利用贝叶斯概率方法，耦合疲劳损伤预后（Fatigue Damage Prognosis, FDP）和结构健康监测数据，并对旋翼机桅杆的表面裂纹进行了数值模拟。Zhao 等^[12]基于随机配点法，提出了一种高效的综合损伤和健康监测的方法，利用贝叶斯干涉有效整合实时状态监测数据和物理模型，并预测了开裂齿轮的剩余寿命。而土木工程领域首次提出结构损伤预后的概念是在 2003 年美国 Los Alamos 国家实验室举办的专题研讨会报告上^[13]。Lynch 等^[14]利用无线传感器，研究一种新型土木工程材料——高性能的纤维增强胶结复合材料的（HPFRCC）在地震荷载作用下的实时损伤预后问题。李兆霞^[5]主要针对大型土木结构的安全服役问题，提出了多尺度损伤预后的概念。显然，土木工程中的损伤预后研究仍处于起步阶段。

1.3 不确定性分类及分析理论

1.3.1 不确定性分类

不确定性分析需建立在不确定性合理表达的基础之上，而对不确定性的合理表达则首先需要对不确定性进行正确的理解和分类。不确定性的分类方法有很多，工程中常根据不确定性的本质，将其分为偶然不确定性和认知不确定性^[15-18]。偶然不确定性，也称不可约不确定性、随机不确定性或变异性^[19]，是指数量变化遵循一定规律的不确定性。当样本数量足够时，偶然不确定性可用概率密度函数或累积分布函数进行表征。其中，累积分布函数是概率密度函数的简单积分。认知不确定性，也称可约不确定性或无知不确定性，是指人们在建模和仿真时由于缺乏知识而产生的不确定性。如果增加知识（通过实验、数值逼近的改进、专家意见和逼真度更高的物理建模等），则可减少甚至消除这种不确定性。通常，认知不确定性可用不相关的置信区间或信任函数进行表征。

工程实践中存在很多的不确定性来源，如材料物理性能、几何尺寸、初始缺陷、边界条件、荷载条件等，同时科学计算中也存在许多不确定性来源，如离散误差、迭代收敛误差、舍入误差、由计算机编码错误引起的误差、模型形式的误

差等。这些不确定性来源最终可归类为：纯偶然不确定性、纯认知不确定性或混合偶然-认知不确定性。但这种分类不是绝对的，随着人的认知水平的提高或采集的信息量的增加，认知不确定性来源将不断减少，而混合偶然-认知不确定性将转化为偶然不确定性。工程实际中，应尽量减少认知不确定性的影响。对于偶然不确定性，工程中有成熟的概率理论进行分析；而对于认知不确定性，则应根据具体的情况选择合适的 uncertainty 理论对不确定性进行表达或量化，这对工程结构的计算和设计具有重要意义。

1.3.2 不确定性分析理论

目前，工程领域中应用较为广泛的不确定性理论有概率论和模糊集理论，但二者均需知道大量不确定性参量的信息以确定其概率密度函数或模糊隶属度函数。当可获知的信息量不足以确定不确定性参量的分布时，人为假定将引入较大的分析误差^[20]。为此，区间理论、证据理论、粗糙集理论、凸集模型理论等适用于信息量不充分的不确定性分析理论逐渐新兴起来。不确定性分析理论逐渐从单一的经典概率理论过渡到多元化的发展，人们对工程中的不确定性的认识与了解也将更深入^[21]。

(1) 概率论

概率论 (Probability Theory) 起源于机会游戏，是不确定性分析中的经典理论，主要用于研究随机现象。概率论用区间 $[0,1]$ 中的一个实数表示事件发生的可能性大小，0 表示不可能事件，1 表示必然事件。事件的发生概率需满足概率公理 (Kolmogoro 公理)：概率具有非负性；所有可能事件发生的概率之和为 1；不相关事件的发生概率可以叠加。概率论需要建立在大量随机试验的基础上，利用数理统计工具，找出随机现象的数量变化规律，获得相应的概率分布特征。工程中常用的概率分布类型有：高斯分布 (亦称正态分布)、对数正态分布、均匀分布、泊松分布和指数分布等。

(2) 贝叶斯概率理论

贝叶斯概率理论 (Bayesian Probability Theory, BPT) 定义了一种新的概率测度——信任程度，采用似然函数而不是频率来描述概率。在基于贝叶斯概率理论评估一种假设的概率时，人们首先需要提出具体的先验概率，然后根据新的数据，修正先验概率。BPT 的基础早在 200 年由 Bernoulli、Bayes 和 Laplace 建立，但在当时没有得到人们的认可，直到最近的几十年才开始了一场“贝叶斯革命”^[22]。现在，BPT 普遍应用于自然学科中。它常用来判断在噪声、稀疏数据或不确定性数据存在的情况下假设的相对有效性，也可用于模型中参数的调整。

(3) 区间概率理论

区间概率理论 (Interval Probability Theory, IPT) 基于概率公理, 可用于描述信息的模糊性和不完备性。区间概率用区间数 $[a, b]$ 表达事件发生的概率, 可认为是一种信任测度^[23]。区间数的下界 a 表示相信事件发生或可靠的程度, 而 $1-b$ 表示不相信事件发生或事件不可靠的程度, 区间数的范围 $b-a$ 表示信息的完备程度。当信息足够多时, 区间的上下界数值相等时, 区间概率实为点概率——经典概率理论描述的情形。

(4) 模糊集理论

模糊集理论 (Fuzzy Set Theory, FST) 自 1965 年首先由美国自动控制专家 Zadeh 教授在他发表的论文《模糊集》(Fuzzy Sets)^[24]中提出之后, 发展十分迅速, 已应用于工程实际的各个领域中。与经典的集合论不同, FST 引入不确定性程度, 承认差异的中间过渡状态, 用介于 $[0,1]$ 之间的隶属度描述元素与集合之间的关系, 将逻辑真值域由二元域 $\{0,1\}$ 拓展到区间域 $[0,1]$ 。基于 FST 的不确定性分析, 关键在于构造不确定性参量的隶属函数, 常用的方法包括 Fuzzy 统计、三分法等。模糊集隶属函数的建立引入了人的心理测量, 具有较大的主观经验性。

(5) 粗糙集理论

粗糙集理论 (Rough Set Theory, RST) 于 1982 年由波兰学者 Pawlak 提出, 类似于模糊集和证据理论, 是一种表达不完备、模糊性知识的数学方法。RST 采用上、下近似两个集合对事件进行描述。下近似是事件所有确定性信息的集合; 而上近似是事件所有可能性信息的集合。上、下近似之间相异的信息称为边界区域。集合的近似是 RST 中最基本的操作, 也是处理模糊性、不确定性数据的主要手段^[25]。

(6) 凸集模型理论

凸集模型理论, 顾名思义, 采用凸集描述不确定性信息。所谓凸集, 是指在向量空间中集合内部任意两点的连线全部包含在该集合内。严格地说, 模糊集也属于凸集。模糊集可看作是所有模糊截集的并集, 而每一个上下有界的模糊截集本质上是区间 (套), 这些区间同样属于凸集。凸集模型理论将不确定性参量的取值限定在凸集范围内, 并在凸集内分析结构功能函数不确定性输出的“最不利情形”^[26]。凸集的不确定性表达较符合工程实际所遭遇的情况, 分析结果也符合工程习惯, 为大多数工程人员所广泛接受。

(7) 证据理论

上个世纪 60 年代 Dempster 在发表的一系列文章中提出了证据理论的基本概念^[27]。此后, Shafer 进一步发展了该理论, 并在著作《证据的数学理论》(mathematical theory of evidence)中明确了相关术语和提法^[28]。由于 Dempster 和

Shafer 为该理论的发展做出了重要贡献，故证据理论又称 D-S 理论。证据理论引入数学似然率处理人的主观判断，是主观贝叶斯理论的推广，同时具备对“不知道”和“不确定”的表达能力。其中对“不知道”的表达能力是人对真实世界主观认知不确定性的数值量化。概率理论需对每一种可能的结果赋予相应的概率值，即基本事件的概率描述必须是完备的。而证据理论则提供了一种更为灵活的方式，它由互不相容的基本命题（假定）组成完备集合，给各命题分配信任程度，亦称基本概率分配（BPA 或 mass 函数）。证据理论可看作是对概率理论的推广，而贝叶斯的条件概率公式则可认为是 Dempster 证据组合规则的特例。

1.4 不确定性数值计算方法

数学上习惯用一系列的数学方程组表征工程实际问题，则求解不确定性工程问题归根结底为求解具有不确定性参数、不确定性输入或不确定性边界条件的偏/常微分方程，简称不确定性微分方程。不确定性微分方程的数值解法有很多，大致可分为两类：采样法和非采样法。采样法的基本思想是：在不确定性参数的值域空间中选取一些节点，计算选定节点上确定性的系统输出量，最后根据这些系统输出量的确定值计算得到系统输出量的统计特性。采样法的特点是对数学模型的要求低，适用范围广，但收敛速度慢，达到理想精度需要耗费大量的计算时间。非采样法利用优化算法或谱分解法直接得到系统不确定性输出量的统计值。非采样法的特点是收敛速度快，但对数学模型的要求高，适用范围比较窄。本节将介绍几种常用的求解不确定性问题的数值方法：蒙特卡洛法、摄动法、区间法、随机有限元法和广义多项式混沌法。其中，蒙特卡洛法是典型的采样法，而摄动法、区间法和随机有限元法是非采样方法。广义多项式混沌法中的随机 Galerkin 法属于非采样法，而随机配点在此被纳入采样法的范畴。

1.4.1 蒙特卡洛法

蒙特卡洛（Monte Carlo）法，又称随机模拟法，是工程计算中最常用的方法。该方法基于大数定律和随机取样实验，是一种经典的、随机采样方法。蒙特卡洛需严格根据随机参数的概率分布特征，利用计算机模拟随机采样过程，获得一系列的样本点，并求解生成的每个样本点上的系统输出，最后利用数理统计原理得到系统输出的概率特征，如概率密度函数、均值、方差等。蒙特卡洛法的原理简单，易于编程实现，不仅可用于求解随机微分方程，还能用于求积分运算。但蒙特卡洛法的收敛速度慢且对不确定性变量要求高，限制了它的应用范围。蒙特卡

洛法只能用在基于概率理论描述的不确定性问题中，它在求解之前需明确随机参数的概率分布类型。此外，蒙特卡洛法的精度依赖于样本点的数目。对于复杂的工程问题，一次确定性问题的求解已十分耗时，而蒙特卡洛法需反复多次进行确定性问题的求解。已有研究表明：当随机参数的数目大于 5 时，基于蒙特卡洛法的求解是非常耗时且困难的。因此，高阶随机问题或信息不完备的不确定性问题的求解，需借助于其他数值方法，如区间法、随机伽辽金法和随机配点法等。

1.4.2 摄动法

摄动法 (Perturbation Method)，又称小参数展开法，基于小参数假定，认为受到微小扰动的系统输出函数可近似展开成小参数的幂级数的形式。目前，对于求解基于摄动法的不确定性问题，有两种求解方案。第一种求解方案是将所有随机变量在其均值附近展开成 Taylor 级数。该方案仅适用于小扰动或随机变量方差很小的情况，并且不能获得系统输出的高阶统计量。同时，当随机变量的展开阶数高于二阶时，基于该方案的系统控制方程的展开式将变得非常复杂。第二种求解方案是将随机算子的逆运算展开成 Neumann 级数，该方案同样仅适用于小扰动的情况。小参数的假定极大地限制了摄动法的应用范围。1997 年 Liu^[29]提出了一种新的摄动方法，在系统的控制方程中嵌入人工参数，并假定人工参数为小参数。然而由于人工参数的选取具有一定的主观性，该方法在大多数情况下不能获得一致逼近的近似解。于是，He 在此基础上提出同伦摄动法，即将摄动法与同伦方法结合起来，用于解决非线性问题^[30]。该方法通过规定嵌入参数的取值范围为 $[0,1]$ ，充分利用传统摄动法的优势，将摄动法推广到大参数问题。

1.4.3 区间法

区间法 (Interval Analysis) 是一种求解非概率建模问题的方法，利用区间描述不确定性参数，适用于基于区间概率理论和凸集模型理论的不确定性问题。该方法只需利用较少的信息，获取不确定性变量的上下界，求解得到不确定性系统输出的上下界。区间法最初用于研究计算机运算中的浮点舍入误差。自 1966 年 Moore 发表了第一部关于区间法的专著以来^[31]，该方法已迅速发展成为数学研究领域的一个新的分支，且逐渐应用到诸多工程领域中。按照具体的求解方法，区间法可分为三类：区间有限元法、区间迭代法和区间优化方法。

区间有限元法，类似于确定性有限元法，计算程序中包含单元离散、单刚集成、单元组装、边界条件和荷载离散化以及结构方程求解等功能模块；不同的是，区间有限元中含有以区间参数表示的不确定性变量。区间参数的相关性会引起模

型输出区间的放大,为获得足够精确的模型输出区间,确定性有限元的集成方式将不再适用于区间有限元法。Hughes 等人提出了一种单元接单元技术 (EBE)^[32],将有限元分析中的一部分数值计算转移到单元上进行,可避免单元集成总体刚度矩阵时的重叠。

区间迭代法是 Moore 于 1979 提出的一种新型迭代法^[33],具有全局收敛性,在给定非线性方程组右端项时能自动搜索全部重根。仝宗凯等人^[34]利用区间迭代法的这一性质,将其应用在结构后屈曲分析中。

区间优化方法是将不确定性问题的求解转化为含约束条件的最值问题,并利用最优化算法找寻系统随机输出的最大值和最小值。常用的优化算法有:模拟退火算法、遗传算法、粒子群优化算法、蚁群算法和微分演化算法。区间优化方法的计算效率高,在工程应用体现了很好的经济性。李方义等^[35]将该方法与基于拉丁方试验设计的近似模型结合,提出了一种高效的不确定多目标优化方法,应用在复杂工程优化问题中。

1.4.4 随机有限元法

随机有限元法 (Stochastic Finite Element Method) 是随机分析理论与有限元方法的结合,是在传统有限元分析的基础上发展起来的随机数值计算方法^[36]。随机分析是概率论的一个分支,因此随机有限元法适用于求解以概率论描述不确定性参量的问题。早期随机有限元方法将 Monte Carlo 仿真方法与有限元直接结合^[37],利用传统的有限元程序计算大量随机样本点处的系统输出,属于采样法的范畴,计算效率低,计算成本高。为了克服采样法的上述缺陷,Cornel 提出将一次二阶矩法与有限元法相结合的非采样思想,用于土壤基础或堤防的变形及稳定性分析中^[38]。该思想随后发展形成了 Taylor 展开随机有限元法 (TSFEM)。在此框架下,Hisada 和 Nakagiri 提出了基于摄动技术的随机有限元法^[39],将随机参数或随机方程的摄动展开式直接与有限元法结合,显式处理随机参数,定量得到系统输出的统计矩,简单易行。摄动有限元法 (PSEFM),现已成功用于多种复杂结构应力、位移等非线性随机问题中。由于受摄动法小参数假定的影响,该方法仅适合用于随机性不强的问题。近年来,随机有限元法得到了进一步的发展和應用。研究人员发展了其他非采样方法,例如、Neumann 展开随机有限元 (NSFEM)、谱随机有限元法、直接积分法和最大熵随机有限元法。其中谱随机有限元法起源于 Wiener 提出的齐次混沌理论^[40],将随机变量进行多项式展开。Ghanem 和 Spanos^[41]对该方法进行了详细的描述。随机有限元法已广泛用于计算结构的动力学问题、结构可靠度、复合材料力学及非线性问题等方面^[42]。

1.4.5 广义多项式混沌法（GPC 法）

广义多项式混沌（GPC）法与谱随机有限元法类似，均是基于多项式展开理论，即将不确定性问题的解用随机空间的多项式基底表示。谱随机有限元法通常采用 Hermite 多项式（13 种 Wiener-Askey 多项式混沌之一）作为基底。而基于 Hermite 多项式的谱分解法在求解湍流问题^[43, 44]时，收敛速度慢，因此长期没有受到研究人员的关注。直到本世纪初，Xiu 等人^[45]提出基于广义多项式混沌的谱分解法，高效地解决了流场问题。多项式展开理论才引起人们的重视。所谓“广义”是指采用的多项式基底不局限于 Hermite 多项式，可以是其他 Wiener-Askey 多项式混沌和分段多项式等^[46]。Witteveen 等人^[47]提出任意多项式混沌，用于求解涡轮叶片失速颤振中考虑物理不确定性的非线性动力学问题。该方法基于正交化技术，将任意多项式基底正交化成适用于随机输入类型的正交化基底，本质上是广义多项式混沌的推广。广义多项式混沌法按照求解途径的不同可分为随机 Galerkin 法和随机配点法。

（1）随机 Galerkin 法

最初，GPC 法主要基于随机正交多项式理论，将随机问题的解展开成随机正交多项式的表达式。随机正交多项式是关于随机变量的多项式，在随机空间中满足正交性。此时的 GPC 法也称为随机伽辽金法（Stochastic Galerkin Method, SGM），收敛速度快。SGM 利用随机正交多项式的正交性，将系统控制方程离散成多个微分方程。这些微分方程通常是相互耦合的，求解十分困难，故对于比较复杂的系统，基于 SGM 的求解是非常费时的且有时是不可行的。此外，不同工程问题中随机参量的分布类型一般是不同的，而随机正交多项式的选取主要由随机参量的分布类型决定的，例如服从 Gauss 分布的随机参量对应的是 Hermite 多项式基底，而服从均匀分布的随机参量则对应 Legendre 多项式。因此，基于 SGM 的求解程序需依据具体的工程问题而编写，程序的通用性较差。

（2）随机配点法

近年来，配点法的引入使得 GPC 出现了新的发展，出现了另一种求解随机问题解的多项式展开式的方法——随机配点法。配点法起源于数值积分方法，如 Newton-Cotes 公式、高斯求积法和 Clenshaw-Curtis 法。这些数值积分方法通过选取合适的积分节点和积分权重，将数值积分的解表示成积分节点处的函数值与相应积分权重的乘积之和。其中，积分节点就是配置点。Novak 和 Ritter^[48]基于 Clenshaw-Curtis 法则，利用 Smolyak 算法^[49]构造多维配置点，提出了一种适用于高维等边域上光滑函数的积分法。类似于数值积分方法，数值插值则利用插值节点处的函数与插值权重的乘积之和，计算待求点处的函数值。其中，插值节点

类似积分节点,亦可称为配置点;而插值多项式在待求点上的数值则类似权函数。Barthlmann 等人^[50]将 Chebyshev 多项式的极值点作为插值节点,同样利用 Smolyak 算法构造多维稀疏网格上的配置点,用于高维等边域上的多项式插值。在该高维插值算法的基础上,Xiu 和 Hesthaven^[46]首次提出随机配点法的概念,用于具有随机输入的微分方程的求解。随机配点法(Stochastic Collocation Method, SCM)通过在随机空间域中选取一系列的配置点,构造系统随机输出的插值多项式,并在此基础上利用 Monte Carlo 法计算系统输出的概率特征。

SCM 结合了 Monte Carlo 法和随机 Galerkin 法的优点,避免反复求解控制方程,计算精度高,收敛速度快,受到国内外不少学者的青睐。Foo 等人^[51]利用随机配点法求解了考虑荷载和材料特性具有随机性的固体力学中的三维问题。Babuška 等人^[52]将配点法与 Galerkin 近似法相结合,采用随机空间中的 Gauss 节点求解具有随机系数和随机输入的椭圆偏微分方程。该随机配点法是随机 Galerkin 法的推广,可高效处理非线性相关的随机变量。随后,Jakeman 等人^[53]进一步拓展了随机配点法理论,将其应用在具有认知不确定性的问题中。该研究表明,只需给定一个囊括不确定性参数所有可能取值的有界区间,随机配点法可得到系统输出在此随机域上的近似多项式,并在后处理中统计系统输出的概率特征。史良胜等人^[54]将随机配点法应用在地下水污染的风险评估中。唐云卿等人^[55]利用随机配点法求解土壤水分运动的不确定性问题,并建立了饱和-非饱和水分运动的随机模型。陈海军^[56]利用概率配点法,进行了岩石破坏行为的随机分析。Zhao 等人^[12]将随机配点法应用在齿轮的综合健康预后中。

1.5 本文的主要研究内容

损伤预后是一个综合性强的庞大系统,本文将主要研究常幅疲劳荷载作用的损伤预后问题,并考虑材料参数为不确定性变量。GPC 法较 Monte Carlo 法、区间法、随机有限元法等具有计算精度高,收敛速度快等优点。GPC-随机配点法是最新发展的一种广义多项式混沌法,可有效解决复杂不确定性问题。因此本文将主要采用 GPC-随机配点法,进行疲劳损伤预后的不确定性分析。本文的主要内容安排如下:

(1) 阐明在土木工程领域中进行损伤预后不确定性分析的必要性,介绍损伤预后的基本概念、基本步骤和研究现状,并对不确定性表达的基本理论和求解不确定性问题数值方法进行介绍,分析这些方法的优缺点,重点介绍适用范围广的 GPC 法。

(2) 介绍 GPC 法求解不确定性问题基本思想、基本步骤和求解途径,重

点介绍 GPC-随机配点法的基本概念，并对随机配点法的核心技术——多项式插值技术进行详细的说明，重点介绍基于 Smolyak 的稀疏网格插值法。

(3)应用 GPC-随机配点法分析工程实际中最简单的损伤预后问题——金属板疲劳损伤预后不确定性问题。以 Virkler 的 2024-T3 铝合金板疲劳裂纹扩展实验数据为基础，基于断裂力学原理，拟合裂纹扩展速率 Paris 公式中的材料参数，分析材料参数的相关性和不确定性，合理假定材料参数可能的统计分布类型，利用 GPC-随机配点法分析材料参数各种可能分布类型假定下的金属板剩余疲劳寿命的统计特征，并与实验结果比较，确定材料参数合理的分布类型，并以此验证 GPC-随机配点法计算的可靠性。

(4) GPC-随机配点法兼具采样法和非采样法的特点，分别利用 Monte Carlo 法（采样法）和随机 Galerkin 法（非采样法）预后 2024-T3 铝合金板的剩余疲劳寿命，与 GPC-随机配点法的计算结果比较，从计算效率和计算精度两方面分析这三种数值计算方法在金属板疲劳损伤不确定性分析中的特点。

第 2 章 广义多项式混沌 (GPC) 法

2.1 引言

广义多项式混沌 (GPC) 法基于多项式展开理论, 将不确定性问题的解展开成由不确定性变量表示的多项式, 是一种高效求解具有不确定性参数和不确定性输入的微分方程组的不确定性传播的数值计算方法。GPC 法按照求解途径的不同, 可分为随机 Galerkin 法和随机配点法。

随机 Galerkin 法基于正交多项式展开理论, 依据随机变量的分布类型, 将系统的随机输出用随机空间中的正交多项式基底表示, 利用多项式混沌的正交性将原系统控制方程离散成多个相互耦合的微分方程, 通过求解离散后的微分方程组, 得到系统输出的展开系数, 从而获得系统输出的概率特征。该方法求解之前需明确随机变量的分布类型, 主要用于求解纯偶然不确定性问题,

随机配点法的适用范围较广, 既能求解偶然不确定性问题, 也能求解认知不确定性问题。该方法在仅给出不确定性变量取值区间的情况下, 利用高维多项式插值技术, 构建不确定性空间中近似系统输出的代理多项式, 在后处理中基于该代理多项式取代原系统控制方程, 依据不确定性变量的表达方式, 采用相应的不确定性求解方法计算系统输出的统计特征。例如, 对于基于概率理论表达的随机变量, 后处理中将采用 Monte Carlo 法进行求解, 而对于基于区间概率表达的不确定性变量, 后处理可采用区间法进行求解。随机配点法是 Galerkin 法和其他不确定性求解方法的结合, 具有求解精度高、计算速度快等优点。

GPC 法的这两种求解途径因具体的操作过程不同而具有不同应用范围。因随机配点法的使用范围更广, 可综合处理各类不确定性问题, 本文将主要采用该方法进行土木工程领域中疲劳损伤预后的不确定性分析。随机配点法和随机 Galerkin 法的基本思想都是基于 GPC 法的多项式混沌展开, 因此下文将首先介绍 GPC 法的基本概念

2.2 GPC 法的基本概念

2.2.1 不确定性问题的描述

大部分工程问题的数学模型可抽象为一系列相互耦合的微分方程, 例如结构

动力学问题可抽象成二阶微分方程组，裂纹扩展过程则用一阶微分方程表达。这些微分方程组统称为系统控制方程。工程中的不确定性因素（模型参数、边界条件或初始条件）对系统控制方程的影响。例如材料不确定性一般影响模型参数的不确定性，测量误差影响初始条件的不确定性，荷载激励不确定性和环境噪声则影响模型输入的不确定性。考虑了不确定性因素影响的系统控制方程实质为不确定性微分方程组，为便于后文对 GPC 法进行阐述，这里将介绍用于描述不确定性问题的一般数学模型。

记系统的空间域（亦称物理域）为 $D \subset \mathbb{R}^\ell$ ($\ell=1,2,3$)，空间坐标或者物理坐标为 $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_\ell)$ ，时间域为 $[0, T]$ ， $T > 0$ 为实数。系统控制方程的一般形式如公式 (2.1) 所示。

$$\begin{cases} u_t(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}) = \mathcal{L}(u), & D \times (0, T) \times I_z, \\ \mathcal{B}(u) = 0, & \partial D \times [0, T] \times I_z, \\ u = u_0, & D \times \{t = 0\} \times I_z, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中， \mathcal{L} 是微分算子， \mathcal{B} 是边界条件算子， u_0 是初始条件， $\mathbf{z}=(z_1, \dots, z_d) \in I_z \subset \mathbb{R}^d$ 是不确定性空间 I_z 中一组不确定性变量， $d \geq 1$ 是不确定性变量的个数或不确定性空间的维数。受控制方程中不确定性变量的影响，控制方程的解（或系统的输出）也具有不确定性，记为 $u(x, t, \mathbf{z})$ ，如公式 (2.2) 所示。

$$u(x, t, \mathbf{z}): \bar{D} \times [0, T] \times I_z \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}. \quad (2.2)$$

为不失一般性，假定系统为标量系统，即系统仅有一个输出量，则 $n_u = 1$ 。同时认为系统是适定的，即控制方程的解是存在的、惟一的且连续依赖于定解条件（边界条件和初始条件）。

2.2.2 不确定性的量化

控制方程中的不确定性变量 $\mathbf{z}=(z_1, \dots, z_d)$ 可以全部是偶然不确定性或全部是认知不确定性，也可以是部分偶然不确定性和部分认知不确定性。大部分的研究通常采用概率理论量化偶然不确定性，此时需给出随机变量的 z_i 的边际分布且假定各随机变量 z_i 之间相互独立。本文考虑在未知 z_i 确切概率分布条件下，采用 GPC 法求解含有认知不确定性问题，但需事先给出不确定性变量的取值区间，本小节将着重介绍适用于 GPC 法的认知不确定性量化方法。

不确定性量化的目标在于得到一个范围足够大的有界区间，可以包含不确定性变量的大部分可能取值。如果不确定性变量是有界的，则量化的区间需包含不确定性变量的全部取值。反之，则量化的区间需包含不确定性变量的大概率取值。这里将用数学语言更准确的表达这一思想。对每一个不确定性变量 z_i ($i=1, \dots, d$)

记其取值范围为

$$I_{z_i} = [\alpha_i, \beta_i], \quad \alpha_i < \beta_i, \quad (2.3)$$

存在以下两种情况:

(1) 范围有界, 则

$$-\infty < \alpha_i < \beta_i < \infty. \quad (2.4)$$

(2) 范围无界, 则

$$\alpha_i = -\infty \quad \text{且/或} \quad \beta_i = \infty. \quad (2.5)$$

记不确定性变量量化后的有界区间为

$$I_{\varpi_i} = [a_i, b_i], \quad -\infty < a_i < b_i < \infty, \quad (2.6)$$

则 I_{ϖ_i} 与 I_{z_i} 相互重叠的部分应具有足够大的概率值。对 I_{ϖ_i} 和 I_{z_i} 作对称差, 找出属于 I_{ϖ_i} 但不属于 I_{z_i} 和不属于 I_{ϖ_i} 但属于 I_{z_i} 的元素, 如公式 (2.7) 所示。

$$I_i^- = I_{z_i} \Delta I_{\varpi_i} = (I_{z_i} \cup I_{\varpi_i}) - (I_{z_i} \cap I_{\varpi_i}). \quad (2.7)$$

这样, 区间 I_{ϖ_i} 的范围应满足: 对于给定的微小实数 $\delta_i \geq 0$,

$$P(z_i \in I_i^-) \leq \delta_i. \quad (2.8)$$

从理论上分析, I_{ϖ_i} 的范围越广, 舍弃的不确定性变量 z_i 样本的概率就越小, 则计算的结果将越精确, 但计算的效率也将随之下降。因此在具体的工程问题分析中, 认知不确定性变量由于实际获得的信息有限, 一般将已知信息的最大值、最小值作为其量化区间的上、下界。

值得一提的是, 尽管偶然不确定性变量的概率分布特征是已知的, 但这里仍将其作为认知不确定性变量进行量化。偶然不确定性具体可分为随机场和随机变量。目前, 对于随机场的处理, 通常采用 Karhunen-Loeve (KL) 分解, 将其离散成有限个相互独立的随机变量。因此, 偶然不确定性的量化归根结底为随机变量的量化。有关 KL 分解的知识可参考文献[57]和文献[58], 这里不再赘述。下面将介绍两种常用分布的随机变量的量化。

(1) 均匀分布: $z \sim U[a, b]$, 随机变量有界, 则量化后的区间就是随机变量的取值区间 $[a, b]$ 。

(2) 正态分布: $z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 随机变量无界。正态分布随机变量的三种取值区间和相应概率的情况如表 2.1 所示。从表中的数值可以看出, 当量化区间为 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 时, 随机变量落入区间外的概率不到千分之三, 是一个小概率事件, 在实践中常认为小概率事件不可能发生, 因此采用此区间量化正态分布随

机变量是合理的。

表 2.1 正态分布随机变量的三种取值区间和相应概率值情况

z 的取值区间	区间内概率	区间外概率
$[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$	0.6826	<0.32
$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$	0.9544	<0.05
$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$	0.9974	<0.003

2.2.3 不确定性问题的解

量化后的不确定性变量的取值空间将由 I_z 变换为 I_σ ，故不确定性问题的数学模型不再形如公式 (2.1)，新的数学模型应定义的新的不确定性空间 I_σ 上，具体形式如公式 (2.9) 所示。

$$\begin{cases} u_t(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{L}(u), & D \times (0, T] \times I_\sigma, \\ \mathcal{B}(u) = 0, & \partial D \times [0, T] \times I_\sigma, \\ u = u_0, & D \times \{t = 0\} \times I_\sigma, \end{cases} \quad (2.9)$$

其中， $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in I_\sigma \subset \mathbb{R}^d$ 表示 I_σ 中量化后的不确定性变量。 I_σ 是有界的超立方体，可由公式 (2.6) 的笛卡尔积运算得到，如公式 (2.10) 所示。

$$I_\sigma = \times_{i=1}^d I_{\sigma_i} = \times_{i=1}^d [a_i, b_i]. \quad (2.10)$$

考虑到计算效率随量化区间的增大而降低，本文在量化不确定性变量时，尽量选择小范围的量化区间 I_σ ，故 I_σ 与 I_z 之间存在如下关系式：

$$I_\sigma \subseteq I_z. \quad (2.11)$$

记 $v(x, t, \boldsymbol{\omega})$ 为新的数学模型的解，即公式 (2.9) 的解。在不确定性空间 I_σ 上， $v(x, t, \boldsymbol{\omega})$ 与原问题的解 $u(x, t, \mathbf{z})$ 之间满足公式 (2.12)。因此，文中将继续沿用 $u(x, t, \boldsymbol{\omega})$ 表示公式 (2.9) 的解，该解是未知的、待求的。

$$u(\cdot, \xi) = v(\cdot, \xi), \quad \forall \xi \in I_\sigma \quad (2.12)$$

本文主要关注公式 (2.9) 在不确定性空间里的解，故简记该解为 $u(\boldsymbol{\omega})$ 。对任意固定的物理坐标 \mathbf{x} 和时间 t ， $u(\boldsymbol{\omega})$ 是不确定性空间 $I_\sigma \subset \mathbb{R}^d$ 到实数域的映射，如公式 (2.13) 所示。

$$u(\boldsymbol{\omega}): I_\sigma \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

GPC 法的中心思想是用不确定性空间的多项式混沌 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 近似 $u(\boldsymbol{\omega})$ ， $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 的表达式如下：

$$u_N(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^N w_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}) \Phi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}), \quad (2.14)$$

其中, N 为多项式的展开阶数; $\Phi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ 是定义在 $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 上的多项式混沌展开基底; $w_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ 是多项式混沌展开系数; 下标 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$ 是多项式混沌的次数向量, 向量中各分量的大小分别表示相应维度上不确定性变量的次数; $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_d$ 表示多项式混沌的阶数。当解空间 $u(\boldsymbol{\omega})$ 足够光滑时, 总能在 $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 中找到合适的 $u_N(\boldsymbol{\omega})$, 使得逼近误差 ε_N 满足公式 (2.15)。

$$\varepsilon_N \triangleq \|u - u_N\|_{L^\infty} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

其中, 算子 $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 是 L^∞ -范数, 定义如下:

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{\boldsymbol{\omega} \in I_{\boldsymbol{\omega}}} |u(\boldsymbol{\omega})|. \quad (2.16)$$

在得到足够近似精度的 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 之后, 系统不确定性输出的概率特征可基于此进行计算。记 $\rho_z(s), s \in I_z$ 表示不确定性变量 \mathbf{z} 的概率密度函数, 此函数在求解之前是未知的, 求解之后可通过更新信息得到。关于认知不确定性变量 $\rho_z(s)$ 的确定方法, 应依据具体的工程问题而定, 这部分内容将在后一章节的计算中给出详细说明。根据公式 (2.17) 和公式 (2.18) 可近似得到 $u(\mathbf{z})$ 的均值和方差。

$$\mu_N \triangleq \int_{I_{\boldsymbol{\omega}}} u_N(s) \rho_z(s) ds. \quad (2.17)$$

$$\sigma_N^2 \triangleq \int_{I_{\boldsymbol{\omega}}} (u_N(s) - \mu_N)^2 \rho_z(s) ds. \quad (2.18)$$

2.2.4 求解途径

由上文的分析可知, 基于 GPC 法的数值计算方法关键在于求解多项式混沌展开式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 。目前, 在具体求解 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 时存在求解途径有两种: 随机 Galerkin 法和随机配点法, 下面将简要介绍这两种方法。

(1) 随机 Galerkin 法

随机 Galerkin 法, 也称 GPC-Galerkin 法。该方法基于全局正交多项式展开理论, 采用正交基底 $\Psi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ 作为 GPC 的展开基底。 $\Psi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ 满足:

$$\int_{I_{\boldsymbol{\omega}}} \Psi_i(s) \Psi_j(s) \rho_z(s) ds = \delta_{ij} \gamma_i. \quad (2.19)$$

其中, $\rho_z(s)$ 为随机变量的概率密度函数, 与上文提到的不同, 这里的 $\rho_z(s)$ 需在求解之前根据不确定性变量的大量信息确定。由此可知, 随机 Galerkin 法主要用于求解偶然不确定性的传播。这里偶然不确定性量化方法不同于上文提出的区间量化法, 而是将偶然不确定性变量尽可能用相互独立的标准不确定性变量表征。

所谓标准不确定性变量是指基于该变量的正交多项式是大家较为熟知的，例如标准正态分布和均匀分布。这两种分布对应的正交多项式基底分别为 Hermite 多项式和 Legendre 多项式。利用基底的正交性，公式 (2.14) 可写成如下形式：

$$u_N(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{|k|=0}^N \hat{u}_k \Psi_k(\boldsymbol{\omega}), \quad \hat{u}_k = \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E}[u_N(\boldsymbol{\omega}) \Psi_k(\boldsymbol{\omega})]. \quad (2.20)$$

利用公式 (2.19) 和公式 (2.20)，在系统控制方程 (2.9) 的等号两端乘上正交基底 $\Psi_k(\boldsymbol{\omega})$ 并取期望，可将该控制方程转化为一组常微分方程：

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\partial_t u_N(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{\omega}) \Psi_k(\boldsymbol{\omega})] = \mathbb{E}[\mathcal{L}(u) \Psi_k(\boldsymbol{\omega})], & D \times (0, T], \\ \mathbb{E}[\mathcal{B}(u_N) \Psi_k(\boldsymbol{\omega})] = 0, & \partial D \times [0, T], \\ \hat{u}_k = \hat{u}_{0,k}, & D \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (2.21)$$

其中， $\hat{u}_{0,k} = \mathbb{E}[u_0 \Psi_k(\boldsymbol{\omega})] / \gamma_k$ 。通过利用确定性的算法求解方程 (2.21)，可获得随机 Galerkin 法的展开系数 \hat{u}_k ，进而由公式 (2.20) 获得系统随机输出的展开式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 。

随机 Galerkin 法求解的 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 与系统不确定性输出 $u(\boldsymbol{\omega})$ 在不确定性空间上是积分意义下的等价，即 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 与 $u(\boldsymbol{\omega})$ 之间满足：

$$\int_{I_{\boldsymbol{\omega}}} u(s) \Psi_k(s) \rho_z(s) ds = \int_{I_{\boldsymbol{\omega}}} u_N(s) \Psi_k(s) \rho_z(s) ds. \quad (2.22)$$

因此，随机 Galerkin 法是一种弱测度收敛方法，求解的精度依赖于统计量（如矩）的收敛。

(2) 随机配点法

随机配点法，也称 GPC-随机配点法。该方法通过在不确定性空间中选取合适的配置点，巧妙地将复杂不确定性问题离散为各配置点上相互独立的确定性问题的。记 $\Theta_M^d = \{\boldsymbol{\omega}^{(j)}\}_{j=1}^M \subset I_{\boldsymbol{\omega}}$ 为选取的一组不确定性空间中的离散节点或配置点，其中 $M \geq 1$ 是节点数或配置点数。对于任意配置点 $j = 1, \dots, M$ ，方程 (2.9) 表示的不确定性问题的确定性问题的，如公式 (2.23) 所示。

$$\begin{cases} u_j(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{\omega}^{(j)}) = \mathcal{L}(u), & D \times (0, T], \\ \mathcal{B}(u) = 0, & \partial D \times [0, T], \\ u = u_0, & D \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2.23)$$

求解确定性的微分方程 (2.23)，可获得系统在配置点集上的解 $u^{(j)} = u(\boldsymbol{\cdot}, \boldsymbol{\omega}^{(j)})$ ， $j = 1, \dots, M$ ，简记为解集 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^M$ 。随机配点法此后进行操作，如构造代理多项式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 和评估系统不确定性输出 $u(\boldsymbol{\omega})$ 的统计特征，都是基于此解集进行的。

从这一角度出发，所有经典采样方法都应属于配点法的范畴，例如 Monte Carlo 随机采样法。该方法根据随机变量 $\boldsymbol{\omega}$ 的分布，随机生成离散节点集 Θ_M^d ，并将解集 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^M$ 的平均值和方差等作为系统随机输出量的统计值。Monte Carlo

法为达到较高的精度，需生成大量的配置点，而随机配点法只需少量的配置点就能达到与之相当的精度。此外，某些确定性的采样方法将随机空间 I_z 中经典的求容积法 (cubature or quadrature rules) 节点^[59, 60]作为节点集 Θ_M^d ，并利用相应的求积分法则，估计系统随机输出的统计值。与随机 Galerkin 法类似，这些确定性采样法亦属于弱测度 (如分布函数) 范畴内的收敛。

本文考虑的随机配点法属于强收敛 (如均方收敛) 范畴。随机配点法采用插值方法构造展开式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ ，在配置点上精确等于系统输出，即

$$u_N(\boldsymbol{\omega}^{(j)}) = u(\boldsymbol{\omega}^{(j)}), \quad j = 1, \dots, M. \quad (2.24)$$

此外，随机配点法所需的不确定性量的信息远少于随机 Galerkin 法，因此本文将采用随机配点法求解 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ ，并基于 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 评估的 $u(\boldsymbol{\omega})$ 统计特征。后文将详细介绍这一方法。

2.3 随机配点法的计算步骤与方法

2.3.1 计算步骤

随机配点法有效地实现了微分方程组求解和不确定性分析的分离，可分为两部分：代理多项式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 的构建 (前处理) 和统计特征评估 (后处理)。随机配点法在具体求解时可分为四个步骤，如图 2.1 所示。

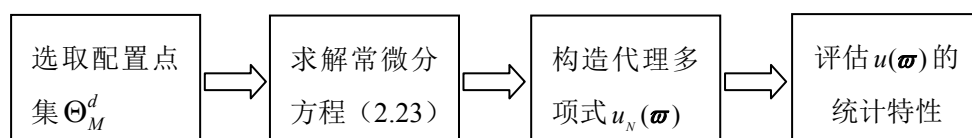


图 2.1 GPC-随机配点法的计算步骤

随机配点法的第一个步骤是在不确定性空间中选取配置点集 Θ_M^d 。随机配点法的计算精度在很大程度上依赖于配置点的选取。目前，常用的配置点集是 Chebyshev 极值点集。

随机配点法的第二个步骤是求解配置点上的确定性微分方程 (2.23)，获得解集 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^M$ 。目前，确定性微分方程的求解技术已十分成熟，常用的数值计算方法有欧拉法、龙格-库塔法、谱分解法和有限元法，这些算法已在 Matlab 等数学软件上有比较完善的程序，可直接用于计算。关于确定性微分方程求解的详细内容，请参考文献[61]和文献[62]。

随机配点法的第三个步骤是基于配置点集 Θ_M^d 和解集 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^M$ 构建代理多项

式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 。随机配点法中代理多项式与 GPC 法中的多项式混沌展开式实为同一概念。构造代理多项式的方法常采用不确定性空间上的多项式插值技术，故代理多项式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 也可称为插值多项式。目前，多项式插值技术已成功应用在一维插值问题。高维插值多项式通常是基于张量积运算的一维插值多项式的推广。

随机配点法的第四个步骤，也即最后一个步骤，是获得 $u(\boldsymbol{\omega})$ 的概率特征。常用 Monte Carlo 法对不确定性变量进行采样，并计算每个样本点上 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ ，最后利用数理统计方法，估计 $u(\boldsymbol{\omega})$ 的均值、方差和概率密度等。在利用 Monte Carlo 法之前，需利用现有的有限数据，给不确定性变量设定先验分布。

从上述分析中可以看出，前三个步骤属于前处理部分，最后一个步骤属于后处理部分。其中第三个步骤是前处理的核心，也是整个配点法核心。因此，随机配点法的关键在于构建满足公式 (2.24) 的代理多项式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 。

2.3.2 多项式插值方法

多项式插值方法是随机配点法中构造代理多项式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 最常用的方法。虽然 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 是系统输出关于不确定性变量的表达，但在具体求解时可将不确定性变量当作普通变量处理。在已知配置点集 Θ_M^d 和对应解集 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^M$ 的前提下，多项式插值方法的有两种求解思路：矩阵求逆法和固定系数插值法。

(1) 矩阵求逆法

该方法的求解思路是先选定插值基底 $\Phi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ ，然后求解插值系数 $w_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ 。矩阵求逆法常采用正交多项式作为基底 $\Phi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ ，并利用随机配点法的插值条件公式 (2.24) 构造插值系数方程组公式 (2.21)，通过求解该线性方程组获得展开系数。

$$\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{u}, \quad (2.25)$$

其中，系数矩阵 $\mathbf{A} = (\Phi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}^{(j)}))$ ， $0 \leq |\mathbf{k}| \leq N$ ， $1 \leq j \leq M$ ，类似范德蒙矩阵； $\hat{\mathbf{w}}$ 是展开系数构成的向量； $\mathbf{u} = (u(\boldsymbol{\omega}^{(1)}), \dots, u(\boldsymbol{\omega}^{(M)}))^T$ 是配置点上的系统输出向量。为使公式 (2.25) 的解存在且唯一，配置点的数目不应小于正交基函数的数目，即

$$M \geq \binom{N+d}{N}. \quad (2.26)$$

矩阵求逆法虽然求解思路简单、计算机编程难度低，但由于得到的系数矩阵 \mathbf{A} 类似于范德蒙矩阵，在高维插值问题中，对其进行求逆运算误差大、计算效率低，且插值基底的选取一般需依据随机变量的分布类型。

(2) 固定系数插值法

该方法的求解思路与矩阵求逆法相反，先确定 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 的系数项 $w_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ ，然后

构造插值基底 $\Phi_k(\boldsymbol{\omega})$ 。通常, 固定系数插值法采用解集 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^M$ 作为多项式混沌的展开系数 $w_k(\boldsymbol{\omega})$, 然后根据随机配点法的插值条件公式 (2.24) 构造 $\Phi_k(\boldsymbol{\omega})$ 。确定了插值系数的 GPC 法的多项式展开式公式 (2.14) 将转化为公式 (2.27)。

$$u_N(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^M u^{(j)} \Phi_j(\boldsymbol{\omega}), \quad (2.27)$$

固定系数插值法有其特定的构造插值基底方法。对于一维插值问题, 常用的插值基底有 Lagrange 基底和分段线性基底等。高维插值基底的构造往往利用张量积的运算规则, 将单个维度上一维插值基底整合到多维空间。

固定系数插值法和矩阵求逆法虽是两种求解思路完全不同的计算方法, 但在本质上都属于插值方法。插值方法具有的一些弊端, 这两种方法都不能避免。插值方法的误差主要来源于配置点 (或插值节点) 和插值基底的选取。采用不同的配置点集和插值基底, 计算得到的结果可能千差万别。目前, 在配置点的选取问题上, 还没有严格的理论分析存在, 也没有普适的选点原则存在。本文将根据已有文献的介绍, 选取常用的配置点集和插值基底。

尽管矩阵求逆法和固定系数插值法都存在一些弊端, 但固定系数插值法与矩阵求逆法相比, 在求解高维问题时不存在由矩阵求逆运算而引入的误差, 仅需进行少量的加法和乘法运算, 运算规则简单, 且插值基底的选取与不确定性变量的分布类型无关。因此, 本文将选用固定系数插值法构造代理多项式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 。固定系数插值法在具体问题上可分为一维固定系数插值和高维固定系数插值。

2.4 一维固定系数插值

一维固定系数插值是一维多项式插值技术的一种, 因此在介绍该方法之前, 先介绍一维多项式插值技术, 简称多项式插值。此时, $d=1$, $z \in \mathbb{R}$ 。记 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为待插值函数; $(z^{(1)}, \dots, z^{(N+1)})$ 为一套离散节点集, 且满足 $a \leq z^{(1)} < \dots < z^{(N+1)} \leq b$; $(u^{(1)}, \dots, u^{(N+1)})$ 为对应编号的离散节点上的解。多项式插值的目的在于寻找次数不超过 N 的多项式 $\Pi_N(f)(z)$, 形如公式 (2.28)。

$$\Pi_N(f)(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0. \quad (2.28)$$

插值多项式需满足:

$$\Pi_N(f)(z^{(j)}) = u^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N+1. \quad (2.29)$$

一维多项式插值问题的研究已十分成熟, 构造一维插值多项式的方法有很多, 例如 Lagrange 插值、分段低次插值、牛顿插值和样条插值等。每种插值方

法都有各自的适用范围和优缺点，其中最为常用的插值方法是 Lagrange 插值。本文仅讨论两种适用于固定系数插值法的多项式插值技术：Lagrange 插值和分段线性插值。

2.4.1 Lagrange 插值

Lagrange 插值是十分常用的一种插值方法，对应的插值基底为 Lagrange 插值基底，形如公式 (2.30)。

$$l^{(j)}(z) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N+1} \frac{(z - z^{(k)})}{(z^{(j)} - z^{(k)})}, \quad j = 1, \dots, N+1. \quad (2.30)$$

$l^{(j)}(z)$ 满足在节点 $z^{(j)}$ 上的值为 1，在其他 N 个节点 $z^{(k)}$ ($k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N+1$) 上的值为 0，即

$$l^{(j)}(z^{(k)}) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (2.31)$$

则拉格朗日插值的基本公式为

$$\Pi_N(f)(z) = \sum_{j=1}^{N+1} u^{(j)} l^{(j)}(z). \quad (2.32)$$

若 $f(z)$ 在含节点 $z^{(1)}, \dots, z^{(N+1)}$ 的区间 I_z 上具有 $N+1$ 次导数，则 Lagrange 插值误差

$$\varepsilon_N(z) = f(z) - \Pi_N(f)(z) = \frac{f^{(N+1)}(x)}{(N+1)!} \prod_{j=1}^{N+1} (z - z^{(j)}), \quad z \in I_z. \quad (2.33)$$

人们通常的理解是插值节点数目越多、插值的阶数越高，则插值的误差越小。龙格通过研究发现在等距节点条件下，高阶 Lagrange 插值将发生振荡现象，在某些区域内极大地偏离真实值公式。人们称这种插值多项式不收敛的现象为龙格现象。

为避免龙格现象，常用的一种做法是采用非等间距节点。文献[63]总结了儿种插值精度较高的节点集，其中 Chebyshev 极值点(也称 Chebyshev Gauss-Lobatto 节点)因其生成方式简单，被广泛用作 Lagrange 插值的节点集。该节点集可记为

$$T_N = \left\{ z^{(j)} \mid z^{(j)} = -\cos \frac{\pi(j-1)}{N}; \quad j = 1, \dots, N+1; N = 1, 2, \dots \right\}. \quad (2.34)$$

利用最新的有关质心 Lagrange 插值^[64]的研究，基于该节点集的质心 Lagrange 插值可实现高效、稳定的计算。质心 Lagrange 插值的基本思想是将传统的 Lagrange

插值基底公式 (2.30), 改写为

$$l^{(j)}(z) = \frac{1}{\underbrace{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N+1} (z^{(j)} - z^{(k)})}_{\widehat{w}_j}} \cdot \frac{1}{z - z^{(j)}} \underbrace{\prod_{k=1}^{N+1} (z - z^{(k)})}_{l(z)} = l(z) \frac{\widehat{w}_j}{z - z^{(j)}}, \quad (2.35)$$

则 Lagrange 插值可以写成

$$\Pi_N(f)(z) = l(z) \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\widehat{w}_j}{z - z^{(j)}} u^{(j)}, \quad (2.36)$$

此为质心 Lagrange 插值公式的第一种形式, 其中, \widehat{w}_j 是质心权重。现考虑插值函数 $f(z)=1$, 该函数可用 Lagrange 插值多项式精确表示, 即

$$1 = l(z) \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\widehat{w}_j}{z - z^{(j)}}. \quad (2.37)$$

从公式 (2.37) 中可得到用质心权重表示的 $l(z)$ 的表达式, 将此表达式代入公式 (2.36) 可得到质心插值公式的第二种形式:

$$\Pi_N(f)(z) = \frac{\sum_{j=1}^{N+1} \frac{\widehat{w}_j}{z - z^{(j)}} u^{(j)}}{\sum_{j=1}^{N+1} \frac{\widehat{w}_j}{z - z^{(j)}}} = \frac{\sum_{j=1}^{N+1} \frac{w_j}{z - z^{(j)}} u^{(j)}}{\sum_{j=1}^{N+1} \frac{w_j}{z - z^{(j)}}}, \quad (2.38)$$

其中, $w_j = \widehat{w}_j/C$, C 为非零常数。对于 Chebyshev 极值点集, w_j 的取值具有很强的规律性, 如公式 (2.39) 所示, 这将极大地改善了 Lagrange 插值的效率。

$$w_1 = \frac{1}{2}; \quad w_j = (-1)^j, \quad j = 2, \dots, N; \quad w_{N+1} = \frac{1}{2}(-1)^{N+1}. \quad (2.39)$$

另一种避免龙格现象的做法是采用分段低次插值, 基本思想是用分段多项式代替单个多项式。分段低次插值的收敛取决于相邻节点之间的最大间距, 与节点集是否为等距无关。实际工程中获取的很多信息, 如传感器采集的数据, 大都属于均匀采样, 此时基于非等距节点集的 Lagrange 插值便不适用了。因此, 分段线性插值具有很高的实际应用价值。

2.4.2 分段线性插值

分段线性插值是分段低次插值的一种, 它将整个插值区间分成若干个小区间, 在每个小区间上分别作线性插值。分段线性插值的节点集应包含整个区间的两个端点, 则节点集的形式为 $z^{(1)} = a < z^{(2)} < \dots < z^{(N)} < b = z^{(N+1)}$ 。对于区间 $[z^{(j)}, z^{(j+1)}]$, 线性插值是用直线连接点 $(z^{(j)}, u^{(j)})$ 和 $(z^{(j+1)}, u^{(j+1)})$ 。记 $\Pi_1^h(f)(z)$ 为

分段线性多项式， h 表示各小区间的最大间距值。 $\Pi_1^h(f)(z)$ 在区间 $[z^{(j)}, z^{(j+1)}]$ 的表达式为

$$\Pi_1^h(f)(z) = u^{(j)} + \frac{u^{(j+1)} - u^{(j)}}{z^{(j+1)} - z^{(j)}}(z - z^{(j)}), \quad z \in [z^{(j)}, z^{(j+1)}]. \quad (2.40)$$

若 $f(z) \in C^2([z^{(j)}, z^{(j+1)}])$, $j=1, \dots, N+1$, 则分段线性插值的误差限为

$$\|f - \Pi_1^h f\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \max_{\xi \in [a, b]} |f''(\xi)|. \quad (2.41)$$

公式 (2.40) 可以较方便的改写为

$$\Pi_1^h(f)(z) = \sum_{j=1}^{N+1} u^{(j)} q_j(z), \quad (2.42)$$

其中， $q_j(z)$ 为基函数，其表达式为

$$q_j(z) = \begin{cases} \frac{z - z^{(j-1)}}{z^j - z^{j-1}}, & \text{if } z \in [z^{(j-1)}, z^{(j)}], j = 2, \dots, N+1, \\ \frac{z^{(j+1)} - z}{z^{(j+1)} - z^{(j)}}, & \text{if } z \in [z^{(j)}, z^{(j+1)}], j = 1, \dots, N, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2.43)$$

若采用的是等距节点，则基函数 $q_j(z)$ 的另一种形式为

$$q_j(z) = \begin{cases} 1 - \frac{N|z - z^{(j)}|}{b-a}, & \text{if } |z - z^{(j)}| < (b-a)/N, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2.44)$$

与 Lagrange 插值基底的性质 (公式 (2.31)) 类似，分段线性插值基底 $q_j(z)$ 也满足

$$q_j(z^{(k)}) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (2.45)$$

分段线性插值具有公式简单、稳定性好、误差不会累积等优点，但该插值多项式在插值节点处的导数值不连续。分段线性插值的误差主要受相邻节点间距的最大值控制，因此采用等距节点插值可有效控制插值的误差。一般，分段线性插值的收敛速度比较慢，通常需要大量的插值节点才能达到理想的精度，因此对于复杂非线性系统的插值问题，分段线性插值的计算是非常耗时的。

综合上述分析，基于 Chebyshev 极值点集的 Lagrange 插值具有收敛速度快、稳定性高等特点，可适用于非线性系统的插值，因此本文将基于此一维插值方法，构造代理多项式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 。

2.5 高维固定系数插值

高维插值问题的描述：记不确定性变量 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d)$ ($d > 1$)；为不失一般性，假定不确定性变量的取值空间为 $[-1, 1]^d$ 。在实际应用中，该标准区间可通过简单的映射关系得到。记 $\Theta_M^d = \{\mathbf{z}^{(j)}\}_{j=1}^M$ 是一套事先设定的位于不确定性空间中的点集，其中 $M \geq 1$ ，是配置点的数目。目前，高维固定系数插值技术有两种：全张量积法和稀疏网格插值法，均是基于张量积，将一维插值多项式拓展到高维空间。为能更好的理解高维多项式插值，下面将简要介绍张量积的运算法则和性质。

2.5.1 张量积 (Tensor Product)

记 U 为函数的线性空间，定义在实数集 X ； V 是另一个定义在实数集 Y 上的函数的线性空间。对于单个 $u \in U$ 和 $v \in V$ ，计算法则^[65]

$$w(x, y) := u(x)v(y), \quad (x, y) \in X \times Y, \quad (2.46)$$

定义在集合 $X \times Y$ 上，称为函数 u 和函数 v 的张量积，简记为

$$u \otimes v. \quad (2.47)$$

更进一步，对于部分 $u \in U$ 和部分 $v \in V$ ，函数空间 U 和函数空间 V 的张量积为定义在 $X \times Y$ 上的 $u \otimes v$ 的线性组合，故

$$U \otimes V := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i (u_i \otimes v_i) : \alpha_i \in \mathbb{R}, u_i \in U, v_i \in V, i = 1, \dots, n \right\}. \quad (2.48)$$

$U \otimes V$ 是定义 $X \times Y$ 上的函数的线性空间。

依据上述定义，对两个不同变量表示的多项式进行张量积运算。记 $U = \Pi_{<n_1}$ 表示阶数为 n_1 的多项式线性空间，作为定义在 $X = \mathbb{R}$ 上的函数集；同样地，记 $V = \Pi_{<n_2}$ 作为定义在 $Y = \mathbb{R}$ 上的函数集。由公式 (2.48) 可以很容易的获得 $U \otimes V$ ，表示定义在平面 $X \times Y = \mathbb{R}^2$ 的多项式线性空间 $\Pi_{<n_1, n_2}$ ，其中第 1 个变量的次数小于 n_1 ，第 2 个变量的次数小于 n_2 。现在考虑用两个不同变量组表示的多项式的张量积运算。此时，记 $U = \mathbb{R}^{n_1}$ 表示定义在 $X := \{1, 2, \dots, n_1\}$ 上的 n_1 维函数线性空间，类似地， $V = \mathbb{R}^{n_2}$ 表示定义在 $Y := \{1, 2, \dots, n_2\}$ 上的 n_2 维函数线性空间。这样 $U \otimes V$ 是定义在 $X \times Y = \{(i, j) : i = 1, \dots, n_1; j = 1, \dots, n_2\}$ 上的 $n_1 \times n_2$ 维的函数线性空间。

张量积具有双线性，即映射

$$U \times V \rightarrow U \otimes V : (u, v) \rightarrow u \otimes v, \quad (2.49)$$

满足条件：

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \otimes v = \alpha_1 (u_1 \otimes v) + \alpha_2 (u_2 \otimes v), \quad (2.50)$$

$$u \otimes (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 (u \otimes v_1) + \beta_2 (u \otimes v_2). \quad (2.51)$$

因此，公式 (2.48) 可简写为

$$U \otimes V = \left\{ \sum_i u_i \otimes v_i : u_i \in U, v_i \in V, i \in \mathbb{N}^+ \right\}. \quad (2.52)$$

2.5.2 全张量积法

在每一个配置点 $\mathbf{z}^{(j)} (j=1, \dots, M)$ 上，原随机微分方程的解答记为 $u(\mathbf{z}^{(j)})$ 。先考虑单个维度上的插值问题，上文介绍的两种插值方法：Lagrange 插值和分段线性插值，可统一写成

$$Q_i(u)(z) = \sum_{j=1}^{m_i} u(z^{(j)}) \cdot a_i^j, \quad (2.53)$$

其中， $Q_i(u)$ 为一维插值算子； $i \in \mathbb{N}$ 为插值水平； $a_i^j \in C([0,1])$ 为插值基函数，满足： $a_i^j(z^{(j)})=1, a_i^j(z^{(k)})=0 (k \neq j)$ ； m_i 为插值节点数。记所用的节点集为 $\Theta_{m_i}^1 = \{z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(m_i)}\}$ 。

全张量积法将张量积运算规则直接作用在一维插值多项式上，基本计算公式如公式 (2.54) 所示。

$$\mathcal{W}(q, d) = Q_{i_1} \otimes \dots \otimes Q_{i_d}. \quad (2.54)$$

其中，一般取 $i_1 = \dots = i_d = k+1$ ， $k \in \mathbb{N}^0$ 表示插值多项式的阶数； $q = d + k$ 。根据张量积的性质公式 (2.50) 和 (2.51) 可得全张量积的具体计算式：

$$\mathcal{W}(q, d) = \sum_{j_1=1}^{m_{i_1}} \dots \sum_{j_d=1}^{m_{i_d}} (a_{i_1}^{j_1} \otimes \dots \otimes a_{i_d}^{j_d}) \cdot u(z_{i_1}^{j_1}, \dots, z_{i_d}^{j_d}). \quad (2.55)$$

其中， $m_{i_1} = \dots = m_{i_d} = m$ 为单一维度上的插值节点数。全张量积法的插值基底为：

$$a_{i_1}^{j_1} \otimes \dots \otimes a_{i_d}^{j_d} = a_{i_1}^{j_1}(z_1) \times \dots \times a_{i_d}^{j_d}(z_d). \quad (2.56)$$

相应的多维插值节点集为：

$$\Theta_M^d = \mathcal{M}(q, d) = \Theta_{m_{i_1}}^1 \times \dots \times \Theta_{m_{i_d}}^1. \quad (2.57)$$

则所需的配置点数如公式 (2.58) 所示。通常，全张量积法所用的配置点数随着维数的增加而急剧增加。

$$M = m_{i_1} \times \dots \times m_{i_d} = m^d. \quad (2.58)$$

下面将以二维不确定性空间 $[-1,1]^2$ ($d=2$) 中的插值问题为例, 介绍全张量积法的具体操作过程。记不确定性变量 z_1 和 z_2 对应的一维插值节点集分别为公式 (2.59) 和公式 (2.60)。

$$\Theta_{m_{i_1}}^1 = \{z_{i_1}^{(1)}, \dots, z_{i_1}^{(m_{i_1})}\}, \quad (2.59)$$

$$\Theta_{m_{i_2}}^1 = \{z_{i_2}^{(1)}, \dots, z_{i_2}^{(m_{i_2})}\}, \quad (2.60)$$

其中, i_1 和 i_2 为插值水平; m_{i_1} 和 m_{i_2} 为插值节点数。若一维插值基底选用 Lagrange 基底, 则 z_1 和 z_2 对应维度上的插值多项式分别为公式 (2.61) 和公式 (2.62)。

$$Q_{i_1}(u)(z_1) = \sum_{j_1=1}^{m_{i_1}} \prod_{\substack{k_1=1 \\ k_1 \neq j_1}}^{m_{i_1}} \frac{(z_1 - z_{i_1}^{(k_1)})}{(z_{i_1}^{(j_1)} - z_{i_1}^{(k_1)})} u(z_{i_1}^{(j_1)}), \quad (2.61)$$

$$Q_{i_2}(u)(z_2) = \sum_{j_2=1}^{m_{i_2}} \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq j_2}}^{m_{i_2}} \frac{(z_2 - z_{i_2}^{(k_2)})}{(z_{i_2}^{(j_2)} - z_{i_2}^{(k_2)})} u(z_{i_2}^{(j_2)}), \quad (2.62)$$

根据全张量积法具体计算式 (2.55) 得, 二维不确定性空间 $[-1,1]^2$ 上的 Lagrange 插值多项式为:

$$\mathcal{W}(2+k, 2) = \sum_{j_1=1}^{m_{i_1}} \sum_{j_2=1}^{m_{i_2}} \prod_{\substack{k_1=1 \\ k_1 \neq j_1}}^{m_{i_1}} \frac{(z_1 - z_{i_1}^{(k_1)})}{(z_{i_1}^{(j_1)} - z_{i_1}^{(k_1)})} \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq j_2}}^{m_{i_2}} \frac{(z_2 - z_{i_2}^{(k_2)})}{(z_{i_2}^{(j_2)} - z_{i_2}^{(k_2)})} u(z_{i_1}^{(j_1)}, z_{i_2}^{(j_2)}). \quad (2.63)$$

其中, $k \in \mathbb{N}^0$ 为插值的阶数, 所需的插值节点数为 m^2 。二维插值节点集为:

$$\mathcal{M}(2+k, 2) = \bigcup_{j_1=1, j_2=1}^{j_1=m_{i_1}, j_2=m_{i_2}} (z_{i_1}^{j_1}, z_{i_2}^{j_2}). \quad (2.64)$$

基于常规 Lagrange 插值技术的全张量积公式 (2.63) 涉及到大量的除法和乘法运算, 计算效率非常低。而上文介绍的基于 Chebyshev 极值点集的质心 Lagrange 插值技术可有效减少乘法运算, 基于该插值技术的二维插值多项式如公式 (2.65) 所示。

$$\mathcal{W}(2+k, 2) = \frac{\sum_{j_1=1}^{m_{i_1}} \sum_{j_2=1}^{m_{i_2}} \frac{w_{j_1}}{z_1 - z_{i_1}^{(j_1)}} \frac{w_{j_2}}{z_2 - z_{i_2}^{(j_2)}} u(z_{i_1}^{j_1}, z_{i_2}^{j_2})}{\sum_{j_1=1}^{m_{i_1}} \frac{w_{j_1}}{z_1 - z_{i_1}^{(j_1)}} \cdot \sum_{j_2=1}^{m_{i_2}} \frac{w_{j_2}}{z_2 - z_{i_2}^{(j_2)}}}. \quad (2.65)$$

2.5.3 稀疏网格插值法

稀疏网格插值法, 顾名思义, 是一种基于不确定性空间系数网格节点集的高

维插值方法。该方法利用 Smolyak 算法构造稀疏网格和插值多项式，可极大地节省了配置点的数目，提高运算速度。

Smolyak 算法的基本思想是基于于一维固定系数插值多项式的插值误差，利用张量积运算法则构造多维插值公式。记 Δ_i 为第 i 级插值水平与第 $i-1$ 级插值水平对应的一维插值多项式的误差算子。若定义 $Q_0 = 0$ ，则 Δ_i 具有如下形式：

$$\Delta_i = Q_i - Q_{i-1}. \quad (2.66)$$

则 Smolyak 算法的基本公式为

$$\mathcal{A}(q, d) = \sum_{|\mathbf{i}| \leq q} (\Delta_{i_1} \otimes \dots \otimes \Delta_{i_d}), \quad (2.67)$$

其中 $|\mathbf{i}| = i_1 + \dots + i_d$ ； $q = d + k$ ， $k \in \mathbb{N}^0$ 表示插值多项式的阶数； $|\mathbf{i}| \leq q$ 对应的 (i_1, \dots, i_d) 取值共有 C_{k+d}^k 。若令 $\mathcal{A}(d-1, d) = 0$ ，则公式 (2.67) 可改写成如下递推公式：

$$\mathcal{A}(q, d) = \mathcal{A}(q-1, d) + \sum_{|\mathbf{i}|=q} (\Delta_{i_1} \otimes \dots \otimes \Delta_{i_d}). \quad (2.68)$$

其中， $|\mathbf{i}| = q = d + k$ 对应的 (i_1, \dots, i_d) 取值共有 C_{k+d-1}^k 种情形。

Smolyak 算法的另一种表达形式为：

$$\mathcal{A}(q, d) = \sum_{q-d+1 \leq |\mathbf{i}| \leq q} (-1)^{q-|\mathbf{i}|} \binom{d-1}{q-|\mathbf{i}|} (Q_{i_1} \otimes \dots \otimes Q_{i_d}). \quad (2.69)$$

Smolyak 算法所需的多维节点集为：

$$\Theta_M^d = \mathcal{H}(q, d) = \sum_{|\mathbf{i}| \leq q} (\Delta \Theta_{m_{i_1}}^1 \otimes \dots \otimes \Delta \Theta_{m_{i_d}}^1). \quad (2.70)$$

与公式 (2.68) 类似，公式 (2.70) 也可写成如下递推形式：

$$\mathcal{H}(q, d) = \mathcal{H}(q-1, d) + \sum_{|\mathbf{i}|=q} (\Delta \Theta_{m_{i_1}}^1 \otimes \dots \otimes \Delta \Theta_{m_{i_d}}^1). \quad (2.71)$$

其中， $\Delta \Theta_{m_i}^1$ 为一维插值问题中第 i 级插值水平与第 $i-1$ 级插值水平对应的插值节点集的差集。若规定 $\Theta_{m_0}^1 = 0$ ，则 $\Delta \Theta_{m_i}^1$ 具有如下形式：

$$\Delta \Theta_{m_i}^1 = \Theta_{m_i}^1 - \Theta_{m_{i-1}}^1. \quad (2.72)$$

由公式 (2.71) 和 (2.72) 可知，稀疏网格插值的节点集需满足嵌套关系，即

$$\Theta_{m_i}^1 \subset \Theta_{m_{i+1}}^1, \quad \mathcal{H}(q, d) \subset \mathcal{H}(q+1, d). \quad (2.73)$$

下面以二维不确定性空间 $[-1, 1]^2$ ($d = 2$) 中的插值问题为例，介绍 Smolyak 算法的基本操作过程。插值基底仍选用 Lagrange 基底，不确定性变量 z_1 和 z_2 单一维度上的插值节点集如公式 (2.58) 和公式 (2.59) 所示。由于 Smolyak 算法满足递推公式 (2.68)，故计算的关键在于求解表达式：

$$\Delta\mathcal{A}(2+k, 2) = \sum_{|\mathbf{i}|=2+k} (\Delta_{i_1} \otimes \Delta_{i_2}). \quad (2.74)$$

其中, $|\mathbf{i}|=i_1+i_2$, $k \in \mathbb{N}^0$ 为插值多项式的阶数。在公式 (2.66) 中, 因多项式插值算子 Q_{i-1} 的阶数小于 Q_i 的阶数, 故根据插值多项式存在且唯一的定理^[1], 存在 $Q_{i-1} = Q_i(Q_{i-1})$, 则 Δ_i 的具体计算式为:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{\Delta m_i} \sum_{z^{(j)} \in \Delta\Theta_{m_i}^1} a_i^j (u(z^{(j)}) - Q_{i-1}(u)(z^{(j)})). \quad (2.75)$$

由此可知, 多项式插值误差算子 Δ_{i_1} 和 Δ_{i_2} 具有如下表达式:

$$\Delta_{i_1} = \sum_{j_1=1}^{\Delta m_{i_1}} \sum_{z_{i_1}^{(j_1)} \in \Delta\Theta_{m_{i_1}}^1} \prod_{\substack{k_1=1 \\ k_1 \neq j_1}}^{m_{i_1}} \frac{(z_1 - z_{i_1}^{(k_1)})}{(z_{i_1}^{(j_1)} - z_{i_1}^{(k_1)})} \left(u(z_{i_1}^{(j_1)}) - \sum_{j_{-1}=1}^{m_{i_1}-1} \prod_{\substack{k_{-1}=1 \\ k_{-1} \neq j_{-1}}}^{m_{i_1}-1} \frac{(z_{i_1}^{(j_1)} - z_{i_1}^{(k_{-1})})}{(z_{i_1}^{(j_1)} - z_{i_1}^{(k_{-1})})} u(z_{i_1}^{(j_{-1})}) \right), \quad (2.76)$$

$$\Delta_{i_2} = \sum_{j_2=1}^{\Delta m_{i_2}} \sum_{z_{i_2}^{(j_2)} \in \Delta\Theta_{m_{i_2}}^1} \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq j_2}}^{m_{i_2}} \frac{(z_2 - z_{i_2}^{(k_2)})}{(z_{i_2}^{(j_2)} - z_{i_2}^{(k_2)})} \left(u(z_{i_2}^{(j_2)}) - \sum_{j_{-2}=1}^{m_{i_2}-1} \prod_{\substack{k_{-2}=1 \\ k_{-2} \neq j_{-2}}}^{m_{i_2}-1} \frac{(z_{i_2}^{(j_2)} - z_{i_2}^{(k_{-2})})}{(z_{i_2}^{(j_2)} - z_{i_2}^{(k_{-2})})} u(z_{i_2}^{(j_{-2})}) \right). \quad (2.77)$$

在得到 Δ_{i_1} 和 Δ_{i_2} 的表达式之后, 可利用张量积运算法则得到 $\Delta\mathcal{A}(2+k, 2)$ 。这部分运算与全张量积法中 $\mathcal{W}(q, d)$ 的计算类似, 上文已给出详细的介绍, 这里便不再赘述。

2.5.4 两种高维插值方法的比较

虽然全张量积法和稀疏网格插值法都是基于张量积法, 但两者直接用于张量积运算的对象是不同的。全张量积法的运算对象为一维插值多项式, 而稀疏网格插值法的运算对象为一维插值多项式的插值误差。二者在多维插值网络的构造上存在很大差别, 该差异将直接导致插值节点数目的不同。对于高维问题, 插值节点数目的多少将直接影响算法的效率。因此, 这里将主要比较二者在插值网络构造上的不同。

(1) 一维插值节点构造

为便于比较, 现认为二者在单一维度上的具有相同的节点构造方式。目前, 常用的单一维度上的节点构造方式有三种: ①经典最值稀疏网格 H^M , ②最值稀疏网格 H^{NB} 和 ③Clenshaw-Curtis 稀疏网格 H^{CC} 。与前文保持一致, 考虑单一维度上不确定性变量的取值区间为 $[-1, 1]$, 则这三种稀疏网络的具体表达式分别如公式 (2.78) - (2.80) 所示。其中, m_i 为第 i 级插值水平下的节点数, $z_i^{(j)} (j=1, \dots, m_i)$ 为节点取值。

① 经典最值稀疏网格 H^M , 网络起点包含区间的两个端点, 具体定义为:

$$\begin{aligned}
 m_i &= 2^i + 1, \\
 z_i^{(j)} &= 2 \frac{j-1}{m_i-1} - 1, \quad j=1, \dots, m_i \text{ 且 } i \geq 1.
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

② 最值稀疏网格 H^{NB} ，网格起点包含区间的一侧端点，具体定义为：

$$\begin{aligned}
 m_i &= 2^i - 1, \\
 z_i^{(j)} &= 2 \frac{j-1}{m_i+1} - 1, \quad j=1, \dots, m_i \text{ 且 } i \geq 1.
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

③ Clenshaw-Curtis 稀疏网格 H^{CC} ，网格起点为不包含区间的端点，起点为区间的中点，具体定义为：

$$\begin{aligned}
 m_i &= \begin{cases} 1, & i=1, \\ 2^{i-1} + 1, & i > 1, \end{cases} \\
 z_i^{(j)} &= \begin{cases} 0, & i=1, j=1, \\ 2 \frac{j-1}{m_i-1} - 1, & i > 1, j=1, \dots, m_i. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

表 2.2 给出了上述三种稀疏网格在不同插值水平下的节点数和节点取值。从表中可以看出，Clenshaw-Curtis 稀疏网格 H^{CC} 所用的节点数最少。因此，本文将采用此网格形式构造高维配置点集。

表 2.2 三种稀疏网格在不同插值水平下的节点数和节点取值

i	经典最值稀疏网格 H^M		最值稀疏网格 H^{NB}		Clenshaw-Curtis 网格 H^{CC}	
	m_i	$z_i^{(j)}$	m_i	$z_i^{(j)}$	m_i	$z_i^{(j)}$
1	3		1		1	
2	5		3		3	
3	9		7		5	
4	17		15		9	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(2) 多维插值网格

这里仍以等距节点为例，介绍全张量积法和稀疏网格法的多维插值网格。其中，一维插值节点的构造方式采用 Clenshaw-Curtis 稀疏网格 H^{CC} 。表 2.3 给出了不同插值空间维度数 d 和不同插值阶数 k 下全张量积法的插值节点数 $\mathcal{M}(q, d)$ 和稀疏网格法的插值节点数 $\mathcal{H}(q, d)$ 的取值情况。从表中可看出，基于全张量积法

的 $\mathcal{M}(q, d)$ 和基于稀疏网格法的 $\mathcal{H}(q, d)$ 均随着插值空间的维度数 d 或插值阶数 k 的增加而增长, 但 $\mathcal{M}(q, d)$ 的增长幅度明显高于 $\mathcal{H}(q, d)$, 尤其在 d 或 k 的值较大时, 这种差距更加明显。为更形象的展现这两种插值方法所用插值网格的不同, 图 2.2 给出了基于等距节点的全张量积法 (左图) 和稀疏网格法 (右图) 在二维不确定性空间中的四阶插值网格。从图中可以看出, 全张量积法的节点均匀铺满整个插值空间, 而稀疏网格法则零星的在插值空间中采点。

表 2.3 全张量积法和稀疏网格法的插值节点数目

d	k	$\mathcal{M}(q, d)$	$\mathcal{H}(q, d)$
2	0	1	1
	1	9	5
	2	25	13
	3	81	29
	4	289	65
5	1	243	11
	2	3125	61
	3	59049	241
10	1	59049	21
	2	9765625	221
	3	3.49E+09	1581

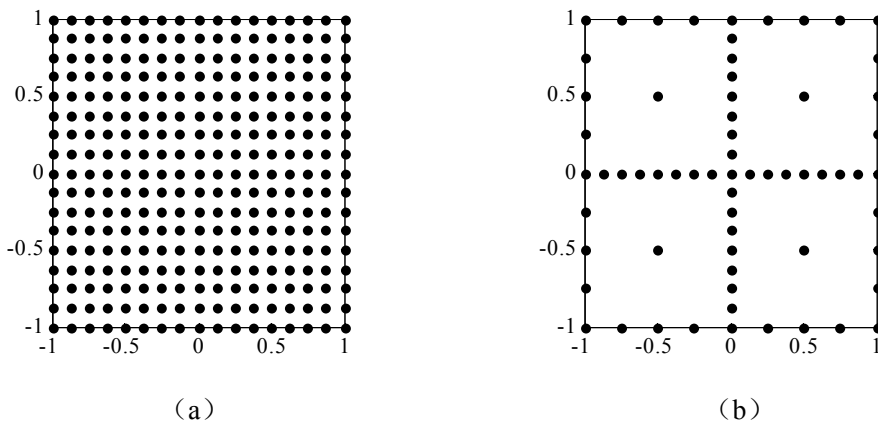


图 2.2 基于等距节点的二维插值空间($d=2$)中四阶插值多项式的插值网格, 其中 (a) 图表示全张量积法插值节点, (b) 图表示稀疏网格法插值节点。

综上所述, 鉴于稀疏网格法所需节点数明显少于全张量积法的特点, 本文将采用稀疏网格法求解高维不确定性问题。其中, 单一维度上插值采用 Lagrange 插值基函数作为基底, 稀疏网格的构造方式选用 Clenshaw-Curtis 稀疏网格, 插值节点选用非等距节点 Chebyshev 极值点。与公式 (2.34) 略有不同, 适用于 Clenshaw-Curtis 稀疏网格的 Chebyshev 极值点的计算公式为:

$$\begin{aligned} m_i = 1, \quad z_i^1 &= 0, \\ m_i > 1, \quad z_i^j &= -\cos \frac{\pi \cdot (j-1)}{m_i - 1}, \quad j = 1, \dots, m_i. \end{aligned} \quad (2.81)$$

2.6 本章小结

本章简单介绍了广义多项式混沌（GPC）法中的基本概念，包括不确定性问题数学模型的一般形式、不确定性变量的量化方法以及不确定性问题解的形式和两种具体的求解途径。重点介绍了 GPC-随机配点法的具体实现方法——多项式插值技术，详细阐述一维固定系数插值方法和高维固定系数插值方法，并介绍了几种常用的配置点网络的构造方法，比较了全张量积法与基于 Smolyak 算法的稀疏网格插值法在配置点网络构造上的不同，得出稀疏网格插值所需配置点的数目将明显少于全向量积法，最后提出选用基于 Chebyshev 极值点的 Smolyak-稀疏网格法求解高维不确定性问题。

第3章 基于 GPC 法的金属板疲劳损伤预后不确定性分析

3.1 引言

金属板的疲劳损伤预后是最基本的损伤预后问题。金属相对于其他土木工程材料而言,质地均匀,各向同性,力学性能比较稳定。平板是土木工程中最常见的基本构件之一,研究平板的疲劳损伤预后是研究复杂构件或结构的剩余疲劳寿命的基础。尽管宏观上认为金属材料是均匀连续的,但是金属材料的疲劳裂纹实验现象却存在很强的分散性,这种分散性主要来源于微观结构的不连续性。人们很早就意识到这个问题,并对此进行了大量的研究工作。Virkler 等(1979)^[66]实验了 68 组 2024-T3 铝合金试件,用数理统计方法研究了疲劳裂纹扩展过程,发现用光滑的曲线描述裂纹扩展过程是不准确的,裂纹扩展寿命 N 基本服从三参数对数正态分布,而裂纹扩展速率 da/dN 存在很强的变异性,难以用某个具体的分布表征。此后,在研究疲劳裂纹扩展的变异性问题上,出现了两种不同的数学模型。一种是以 Paris 公式^[67]等裂纹扩展模型为基础,用数理统计的方法获得随机变量取代确定性裂纹扩展模型中的参数^[68-70]。另一种则利用演化的方法,将裂纹扩展过程模拟为随机过程^[71-73],例如马尔科夫过程和对数正态过程^[74]。

近年,为了更准确的描述裂纹扩展过程,科研人员利用贝叶斯理论和传感器的检测数据,更新裂纹扩展的物理模型,提高寿命预测的准确性。Madsen(1997)^[75]在贝叶斯框架内利用无损检测技术,提出更新概率的思想。Perrin 等(2007)^[76]结合马尔可夫链蒙特卡洛(MCMC)仿真与贝叶斯技术,用于断裂分析。Zhao 等(2013)^[12]通过贝叶斯干涉技术,更新 Paris 公式中随机参数的分布类型,并利用随机配点法预测齿轮的剩余寿命。Gobbato 等(2014)^[77]利用递归贝叶斯技术预测并更新飞行器结构中关键构件的疲劳损伤剩余寿命。

这些研究成果归根结底均是基于概率理论或数理统计方法。通常,获得不确定性变量的精确概率特征需利用大量疲劳裂纹扩展的实验数据。疲劳实验具有周期长、花费高等特点,对某些罕见贵重的金属材料进行大量的疲劳实验是极不经济的。因此,本文提出在实验数据不充分的情况下,应分别分析不确定性变量各种可能分布类型下的剩余寿命的概率特征,并与实验的结果进行比较,确定最佳的不确定性变量的分布类型。由于 GPC-随机配点法在处理信息不充分时的不确定性问题中具有计算效率高等优点,故本文提出采用 GPC-随机配点法进行金属板疲劳损伤预后不确定性分析。本文主要基于断裂力学的知识进行疲劳损伤预后分析,下面将首先介绍断裂力学的有关知识。

3.2 断裂力学的基础知识

目前，疲劳损伤分析方法不外乎两类^[78]：第一类是基于材料试验曲线（ $s-N$ 曲线或 $\varepsilon-N$ 曲线）和累积损伤准则的裂纹萌生分析；第二类是基于断裂力学的裂纹扩展分析，假定构件存在初始微裂纹。其中，第一类分析方法不考虑荷载加载次序和初始裂纹长度等影响，没有定义明确的失效状态，是一种纯经验的统计方法。第二类分析方法通过引入应力强度因子 K （线弹性断裂力学）和裂纹张开位移 δ 或 J 积分（弹塑性断裂力学）^[79]，表征裂纹尖端的应力应变场，为结构剩余寿命的估计提供依据。显然，基于断裂力学的第二类分析方法更能反映疲劳损伤的本质。

在断裂力学中，线弹性断裂力学是最简单且理论研究比较成熟的一个分支。它认为材料在断裂以前基本处于弹性范围，用线弹性力学理论研究裂纹尖端的应力场，建立应力强度因子与裂纹扩展长度之间的关系，并利用表征裂纹扩展过程的物理模型，进行疲劳损伤分析。本章的研究主要基于线弹性断裂力学，下文将简要介绍疲劳损伤过程、裂纹扩展速率模型和应力强度因子的计算方法。

3.2.1 疲劳损伤过程

疲劳损伤是一个横跨微观和宏观的多尺度演化过程，大致可分为三个阶段^[79]：裂纹萌生阶段、裂纹稳定扩展阶段和失稳断裂，如图 3.1 所示。

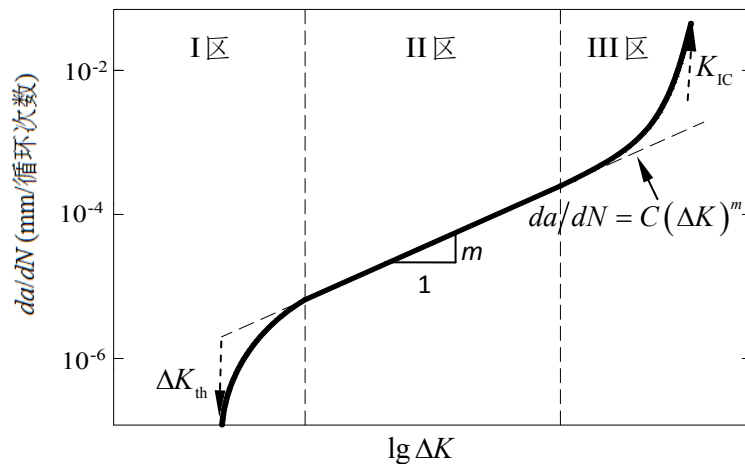


图 3.1 $da/dN - \Delta K$ 关系曲线

该图为双对数坐标下的 $da/dN - \Delta K$ 关系曲线，常用于描述疲劳裂纹扩展的一般规律。当作用于裂纹尖端的应力强度因子幅度 ΔK 高于应力强度因子幅度门槛值 ΔK_{th} 时，裂纹发生扩展。在 ΔK 略高于 ΔK_{th} 的范围内，裂纹低速扩展且随着 ΔK

的增加扩展速率的增幅较高,定性地称这一阶段的扩展为近门槛值扩展区(I区)。随着 ΔK 的继续增加,裂纹扩展速率逐渐以某种恒定的数值缓慢升高,称这一部分为中部稳态扩展区(II区)。当 ΔK 进一步增加,裂纹扩展速率将再次快速升高直至发生断裂,称这一阶段为快速扩展区(III区)。图中的这三个区域:近门槛区、中部稳定区和快速扩展区,分别属于疲劳损伤过程的裂纹萌生阶段、稳定扩展阶段和失稳断裂。

裂纹萌生阶段是疲劳破坏中的初始阶段,疲劳破坏大都始于应力集中区域,如含有缺陷、切口或夹杂物的地方。裂纹萌生阶段可细分为三个过程:初始循环变形和损伤、微裂纹形核和微裂纹扩展。金属材料循环变形和损伤过程最重要的现象是循环硬化或软化,即材料应力-应变滞回曲线随循环次数的增加逐渐扩张或逐渐收缩,这一现象将导致材料表面产生微区塑性变形。当塑性变形累积到一定程度后,位错的继续运动将引发位错崩,形成新的滑移带,最终萌生微裂纹。微裂纹形核有三种机制:持续滑移带微裂纹,晶界微裂纹和杂物附近微裂纹。微裂纹的长度一般为0.5-1.0mm,在同样的名义驱动力下,具有比长裂纹更高的扩展速率。长裂纹属于裂纹的稳定扩展阶段。微裂纹的扩展速率具有先减速后加速的特征,加速阶段对应于上文提到的门槛区。裂纹萌生阶段比较漫长,几乎占据整个疲劳寿命的80%^[80]。一般,该阶段中材料或构件发生失效的风险较低,进行损伤预后的意义不大。

裂纹稳定扩展阶段(II区)是研究和观测最早进行的区域,其中,有关金属材料的研究成果最多,这里将予以简要讨论。金属材料在裂纹稳定扩展阶段的扩展机制有四种:条带机制、微孔连接、微区解理和晶间分离。其中,最常见的是条带机制,普遍认为条带是由裂纹尖端区域交替锐化和钝化产生的。微孔连接机制认为:裂纹尖端前方的三轴应力区域内将出现微孔,微孔在循环荷载作用下逐渐长大,导致与裂纹尖端连接的韧带变薄而最终引起裂纹扩展。条带机制和微孔连接机制是两种塑性扩展机制。微区解理机制通常在含有脆性第二相质点的合金中观察到。晶间分离机制主要在回火和淬火的中碳高强度钢中被观察到。本文主要关注以塑性机制扩展的疲劳损伤的寿命预测。

失稳断裂(III区)的时间非常短,占据疲劳总寿命的极小一部分,且材料或构件在失稳阶段中已丧失了正常服役的能力,因此疲劳损伤预后时可忽略这部分的计算。

3.2.2 疲劳裂纹扩展速率模型

由上文可知,疲劳损伤预后主要关注裂纹稳定扩展阶段。目前,用于描述这

一阶段裂纹扩展规律的物理模型有很多，如 Paris 公式、Walker 公式和 Forman 公式等。这些模型的形式虽不相同，但都是基于 Paris 公式，综合考虑应力比、断裂韧性或迟滞效应等的影响。

Paris(1961)^[67]认为在恒幅循环加载中，一个应力循环过程中的裂纹扩展速率 da/dN 与应力强度因子幅度 ΔK 具有如下关系：

$$da/dN = C(\Delta K)^m, \quad (3.1)$$

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min}, \quad (3.2)$$

其中， a 为裂纹长度的一半； N 为荷载循环次数，后文将此作为疲劳寿命； C 和 m 为拟合的材料参数； K_{\max} 和 K_{\min} 分别为一次荷载循环过程中的最大和最小应力强度因子。对公式 (3.1) 两边取对数可得：

$$\lg(da/dN) = \lg C + m \lg(\Delta K). \quad (3.3)$$

公式 (3.3) 表明在双对数对标中，Paris 公式表达的 da/dN 与 ΔK 呈线性关系（图 3.1 中的 II 区），由此可通过拟合疲劳试验数据获得材料参数 C 和 m 。Paris 公式是一种半经验性质的公式，自提出后，不少学者试图对它进行修正，使之的物理意义更完善。

Forman(1967)^[81]等在 Paris 公式中增加了应力比和断裂韧性的影响，为此提出下列模型：

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^m}{(1-R)K_{IC} - \Delta K}, \quad (3.4)$$

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}, \quad (3.5)$$

其中， R 为应力比； σ_{\min} 为最大循环应力值； σ_{\max} 为最小循环应力值； K_{IC} 为断裂韧性，属于材料的固有属性，可由实验测定。

Walker(1970)^[82]认为应力比对裂纹扩展速率的影响为指数关系，提出模型：

$$\frac{da}{dN} = C \left[\frac{\Delta K}{(1-R)^n} \right]^m. \quad (3.6)$$

Wolf(1970)^[83]提出裂纹闭合概念——在循环拉伸荷载作用下开裂表面相互接触，认为疲劳裂纹传播不仅受到裂纹尖端前方区域的影响，还应受到裂纹尖端后方的裂纹闭合的影响，故 Wolf 建议用有效应力强度因子范围 ΔK_{EFF} 替代 Paris 模型中的 ΔK 。 ΔK_{EFF} 的定义式为：

$$\Delta K_{EFF} = K_{\max} - K_{OP}. \quad (3.7)$$

其中, K_{\max} 是上文提到的最大应力强度因子, K_{Op} 是裂纹张开的应力强度因子。

Willenborg 等(1971)^[84]和 Wheeler(1972)^[85]认为裂纹尖端前方塑性区的相互作用影响裂纹的扩展行为, 过载会导致裂纹尖端前方存在较大的塑性区域, 进而引起裂纹迟滞, 为此在 Paris 公式中引入迟滞系数表示过载下的裂纹扩展速率模型, 如公式 (3.8)。

$$(da/dN)_{\text{retarded}} = \phi_R \cdot C (\Delta K)^m, \quad (3.8)$$

其中, ϕ_R 为迟滞系数, 依赖于应力水平、裂纹形状和荷载谱。

Forman 和 Mettu(1992)^[86]在原 Forman 公式 (3.4) 的基础上, 考虑应力强度因子幅门槛值 ΔK_{th} 和断裂韧性 K_{IC} 的影响, 提出四参数 Forman 公式 (3.9)。

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(1-f)^n \Delta K^n [1 - \frac{\Delta K_{\text{th}}}{\Delta K}]^p}{(1-R)^n [1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_{\text{IC}}}]^q}, \quad (3.9)$$

其中, f 为裂纹张开函数; C 、 n 、 p 和 q 为材料参数。该公式综合考虑了疲劳裂纹扩展全过程中的各种因素的影响, 能基本描述裂纹扩展速率 da/dN 全过程的规律。

综合文献资料发现, Paris 公式因其形式简单、使用方便, 基本与金属材料的实际裂纹扩展相吻合, 是应用最为广泛的疲劳裂纹扩展速率模型。因此, 本文也将应用该模型进行金属板的疲劳损伤预后分析。

3.2.3 应力强度因子的计算方法

应力强度因子幅度 ΔK 是基于线弹性断裂力学的 Paris 公式中的核心计算量。为能正确使用 Paris 公式, 本节将介绍应力强度因子 K 的求解方法。在获得 K 的表达式之后, ΔK 可由公式 (3.2) 轻松得到。目前, 应力强度因子 K 的计算方法有很多, 大体上可分为三类: 解析法、数值法和实测法。其中, 每一类别又包含若干种方法。例如, 解析法有: 应力函数法、复变函数法、积分变换法等, 数值方法有: 有限差分法、边界配置法、有限元法和边界元法等, 实测方法有: 柔度法、网格法、光弹性法和激光全息法等。实测法受场地和加工工艺的影响, 应用范围比较局限。解析法常用于简单裂缝体的裂纹扩展问题中。对于复杂裂缝体的裂纹扩展问题, 常用数值方法中的有限元法求解。因此, 下文将简要介绍解析法和有限元法。

(1) 解析法

这种方法仅能用在能够得到裂纹尖端应力场解析表达式或解析函数的裂纹

扩展中。裂纹按照受力形态的不同可分为：张开型（I 型）、剪切型（II 型）和撕裂型（III）型。无限大板中心穿透裂纹的三种开裂模式对应的裂纹尖端应力场表达式可统一写成公式（3.9）。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_L}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad (3.9)$$

其中， $L = \text{I, II, III}$ 表示开裂的三种模式， r 为裂纹尖端到坐标原点的距离。由上式可立即得到应力强度因子的计算公式（3.10）。

$$K_L = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij} \sqrt{2\pi r} / f_{ij}(\theta) \Big|_{f_{ij}(\theta) \neq 0}. \quad (3.10)$$

有时，直接获取应力场的解析表达式比较困难，但能找到满足边界条件的应力解析函数 $Z_L(\xi)$ ，则可利用解析函数计算裂纹尖端的应力强度因子 K_L ，如公式（3.11）。

$$K_L = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\xi} Z_L(\xi). \quad (3.11)$$

对于复杂的结构，限于数学上的困难，从理论上获得裂纹尖端应力场或解析函数的表达式是比较困难的，因此，解析法仅能应用于少数简单的理想开裂体中，如无限大平板。绝大部分的实际工程问题需要采用数值方法求解应力场，进而获得应力强度因子。

（2）有限元法

有限元法对于求解复杂结构或构件的裂纹扩展问题十分有效。该方法最初采用常规单元直接计算裂纹尖端的应力强度因子，即利用有限元技术将裂纹尖端附件区域离散，计算出该区域中一些结点的应力分量或位移分量，然后将有限元计算的结果代入裂纹尖端应力场表达式或位移场表达式，计算这些结点处的表观应力强度因子 K_L^* ，最后利用外推技术，计算裂纹尖端处的应力强度因子 K_L 。根据计算表观应力强度因子是基于结点处的位移还是应力，有限元法可分为位移法和应力法。由于有限元求解可直接获取结点的位移值，因此位移法较应力法相比，计算精度更高。下面将以无限大板中心 I 型穿透裂纹为例，介绍位移法的基本计算过程。

无限大板中央 I 型穿透裂纹的尖端附近位移场表达式如公式（3.12）所示。

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{2(1+\nu)K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta), \quad i=1,2, \\ g_1(\theta) &= \frac{1}{4} \left[(2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right], \\ g_2(\theta) &= \frac{1}{4} \left[(2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中, u_1 为裂纹扩展方向的位移; u_2 为裂纹张开方向的位移; 平面应力状态 $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, 平面应变状态 $k = 3 - 4\nu$ 。在求解 K_I 时, 通常取 $\theta = \pi$ 计算裂纹尖端的位移。此时, 裂纹的张开位移 u_2 较 u_1 显著, 计算 K_I 的精度更高。则由 u_2 得到的 K_I 的精确表达式为

$$K_I = \frac{E}{(1 + \nu)(k + 1)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} u_2. \quad (3.13)$$

将有限元计算裂纹尖端区域内的 u_2 代入公式 (3.13) 中, 可表观应力强度因子 K_I^* 。裂纹尖端区域内 r 很小, 则 K_I^* 与 r 可近似为线性关系: $K_I^* = A \cdot r + B$ 。该关系式可通过最小二乘法拟合得到, 则裂纹尖端的应力强度因子 $K_I = B$ 。

基于常规单元的有限元法通常无法模拟裂纹前沿的应力奇异性, 因而要求在裂纹尖端区域内划分非常细密的网格以保证计算精度, 这使得计算负担非常重。为此, 研究人员提出了各种奇异单元, 可有效模拟应力奇异性, 提高了计算效率。

3.3 疲劳裂纹扩展实验数据和材料参数评估

3.3.1 疲劳裂纹扩展实验

本文主要以 Virkler 疲劳裂纹扩展实验^[66]为基础, 进行金属板疲劳损伤预后不确定性分析。该实验以具有中心 I 型裂纹的 2024-T3 铝合金板为基本试件, 如图 3.2 所示。

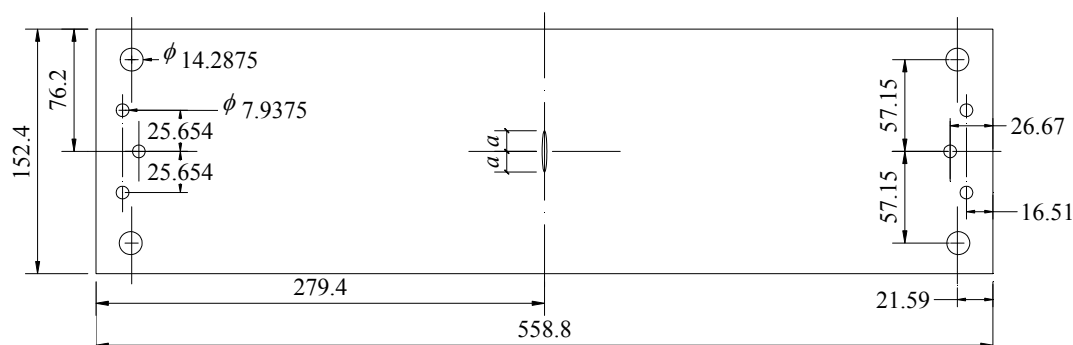


图 3.2 疲劳裂纹扩展试验的基本试件 (单位 mm)

基本试件的尺寸为: 试件长 $L=558.8\text{mm}$, 宽 $W=152.4\text{mm}$, 厚 $B=2.54\text{mm}$ 。Virkler 在室温下共重复进行了 68 组常幅加载疲劳实验。试件两端施加正弦荷载, 荷载峰值 $P_{\max}=5.25\text{KIP}$ (约 23.35kN), 荷载幅 $\Delta P=4.2\text{KIP}$ (约 18.68kN), 应力比 $R=0.2$, 频率 $f=20\text{Hz}$ 。试件的预制初始裂纹长 18mm (即 $a_0=9\text{mm}$), 终止裂纹长度为 99.6mm , 即 $a_c=49.8\text{mm}$ 。

实验过程中，当 $9 \leq a \leq 36.2 \text{ mm}$ 时每隔 $\Delta a = 0.2 \text{ mm}$ 记录一次荷载循环次数，当 $36.2 \leq a \leq 44.2 \text{ mm}$ 时每隔 $\Delta a = 0.4 \text{ mm}$ 记录一次荷载循环次数，当 $44.2 \leq a \leq 49.8 \text{ mm}$ 时每隔 $\Delta a = 0.8 \text{ mm}$ 记录一次荷载循环次数，每条裂纹扩展曲线均记录了 164 个点。68 条 2024-T3 铝合金板的疲劳裂纹扩展曲线 ($a-N$ 曲线) 如图 3.3 所示。从图中可以看出，各裂纹扩展曲线之间存在较大的分散性。

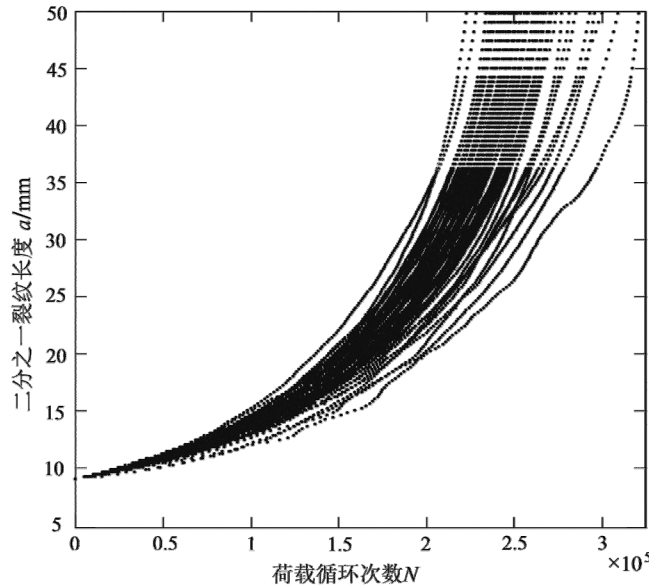


图 3.3 Virkler 疲劳裂纹扩展实验的 $a-N$ 曲线

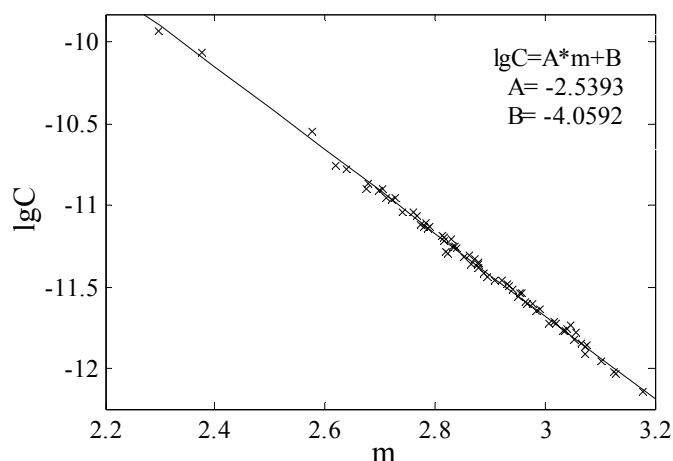
3.3.2 材料参数的实验值

本文采用 Paris 公式 (3.1) 描述此 2024-T3 铝合金板的疲劳裂纹扩展过程。图 3.3 中裂纹扩展曲线的分散性反映在 Paris 公式中，将具体表现为材料参数 C 和 m 的离散性。事实上，受材料微观结构的影响， C 和 m 在不同试件上测得的值是不同的，且同一试件不同点上测得的值也是不同的。故通过 Virkler 裂纹扩展实验得出 C 和 m 的取值规律，对于预后 2024-T3 铝合金构件的剩余疲劳寿命具有重要意义。

由断裂力学知识可知，图 3.2 所示的金属板中央 I 型裂纹的裂纹尖端应力强度因子幅 ΔK 的表达式为

$$\Delta K = \frac{\Delta P}{W \cdot B} \sqrt{\pi \cdot a \cdot \sec(a/W)}. \quad (3.15)$$

上式对 $2a/W \leq 0.95$ 有效。利用公式 (3.3) 所示的 $\lg(da/dN)$ 与 $\lg \Delta K$ 之间的线性关系，可评估图 3.3 中每条裂纹扩展曲线对应的材料参数 (C_i, m_i)。金属材料 C_i 的取值较小，故一般用其对数值 $\lg C_i$ 表示。由 Virkler 裂纹扩展实验数据得到的 68 组 ($\lg C_i, m_i$) 如图 3.4 所示。其中 $\lg C$ 的单位为 $(\text{MPa} \cdot \text{m}^{0.5})^{-m} \cdot \text{mm}$ ， m 为无量纲量。

图 3.4 基于实验数据的材料参数 $\lg C$ 和 m

从上图中可以看出，材料参数 $\lg C$ 和 m 之间存在较好的线性相关关系。利用最小二乘法求得 $\lg C$ 和 m 的线性关系式为：

$$\lg C = A \cdot m + B. \quad (3.16)$$

$$A = -2.5393, \quad (3.17)$$

$$B = -4.0592. \quad (3.18)$$

相关系数 γ 满足公式：

$$\gamma = \frac{\text{Cov}(\lg C, m)}{\sqrt{D(\lg C)} \cdot \sqrt{D(m)}}. \quad (3.19)$$

将相关数据代入公式 (3.19) 中得到 $\gamma = -0.9981$ 。根据文献[87]中有关相关系数的知识，查相关系数显著性检验表，取 $n-2=66$ ，得 $|\gamma| > 0.39$ ，则 γ 在 $\alpha = 0.001$ 水平上显著，即 $\lg C$ 与 m 之间的线性关系显著。

3.3.3 疲劳裂纹扩展曲线重建

由 Virkler 实验数据拟合得到材料参数 ($\lg C_i, m_i$) 的值之后，可利用 Paris 公式重建疲劳裂纹扩展曲线。由公式 (3.15) 可得，用于描述该金属板疲劳裂纹扩展过程的 Paris 公式的具体形式为：

$$\frac{da}{dN} = C \left(\frac{\Delta P}{W \cdot B} \sqrt{\pi \cdot a \cdot \sec(a/W)} \right)^m. \quad (3.20)$$

若记 $f(a) = C(\Delta K)^m$ ，则公式 (3.20) 可改写成如下形式：

$$\begin{cases} da/dN = f(a) \\ a|_{N=0} = a_0 \end{cases}. \quad (3.21)$$

上式可利用 Runge-Kutta (RK) 公式求解, 基本公式为:

$$\begin{aligned} a_{N_{i+1}} &= a_{N_i} + \sum_{n=1}^s b_n k_n, \\ k_1 &= h_i f(a_{N_i}), \\ k_n &= h_i f(a_{N_i} + \sum_{j=1}^{n-1} g_{nj} k_j), n = 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.22)$$

其中, b_n 和 g_{nj} 为常数, 具体取值详见文献[88]。

Matlab 软件中的 ode45 函数采用 RK5(4)——四阶/五阶 runge-kutta 单步算法, 可有效求解常微分方程 (3.21)。本文利用此函数计算得到 2024-T3 铝合金板基于 Paris 公式重建的疲劳裂纹扩展曲线 ($a-N$ 曲线), 如图 3.5 所示。与图 3.3 相比, 图 3.5 中大部分 $a-N$ 曲线均能与 Virkler 实验数据吻合, 仅有少部分裂纹扩展曲线不能与实验数据吻合。这些裂纹扩展曲线受实验过程中某些环境或人为因素的影响, 主要包含自身实验过程的信息, 并不能用 Paris 公式描述。

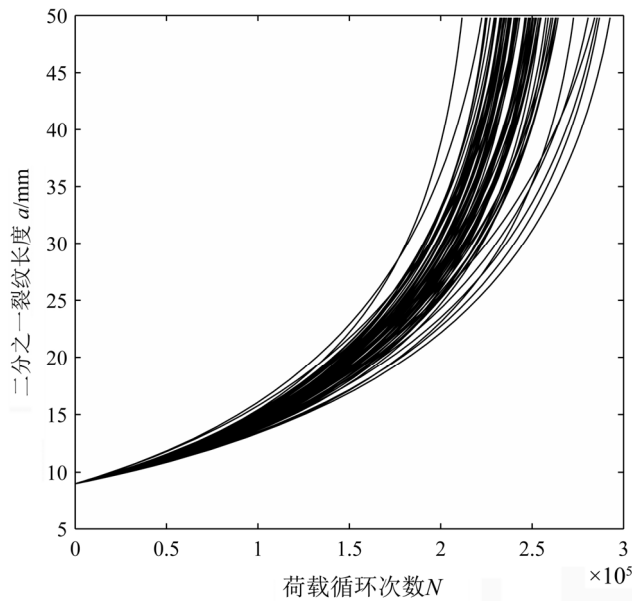


图 3.5 基于 Paris 公式的 $a-N$ 曲线

3.3.4 材料参数交叉验证

为查找出疲劳裂纹扩展曲线重建结果中, 与实验数据不吻合的裂纹扩展曲线对应的材料参数 ($\lg C_i, m_i$), 同时减少与实验数据匹配的工作量, 本文将直接基于模型 (3.16), 采用交叉验证方法找出包含主要包含自身信息的数据点。

因公式 (3.16) 属于线性模型, 故这里将主要介绍适用于线性模型的交叉验证方法。该方法主要分为三个步骤^[89]:

步骤 1, 基于实验得到的 68 组材料参数 ($\lg C_i, m_i$), 利用最小二乘法拟合得

到线性模型的参数 A 和 B ，进而评估各 m_i 对应的 $\lg C_i^1$ 的值。 A 、 B 的数值已在前文给出，分别如公式 (3.17)、(3.18) 所示。记 $\{\lg C_i^1\}$ 表示步骤 1 中基于线性模型的 $\lg C$ 的集合。

步骤 2，从实验数据中剔除第 i 个材料参数 $(\lg C_i, m_i)$ ，利用余下的 67 组材料参数评估线性模型的参数 A_i 和 B_i ，进而计算 m_i 对应的 $\lg C_i^2 = A_i \cdot m_i + B_i$ 。重复该过程，依次计算 $i=1, \dots, 68$ 的 $\lg C_i^2$ 。记为 $\{\lg C_i^2\}$ 表示步骤 2 得到的 $\lg C$ 的集合。

步骤 3，计算各 m_i 上 $\{\lg C_i^1\}$ 和 $\{\lg C_i^2\}$ 与实验数据 $\{\lg C\}$ 之间的误差 $\{err_i^1\}$ 和 $\{err_i^2\}$ 。 err_i^1 与 err_i^2 的计算公式分别为：

$$err_i^1 = |\lg C_i^1 - \lg C_i|, \quad (3.23)$$

$$err_i^2 = |\lg C_i^2 - \lg C_i|. \quad (3.24)$$

画出 $\{err_i^1\}$ 和 $\{err_i^2\}$ 随序号 i 的变化图，如图 3.6 所示。图中，‘o’表示步骤 1 的评估误差，‘+’表示步骤 2 的评估误差。

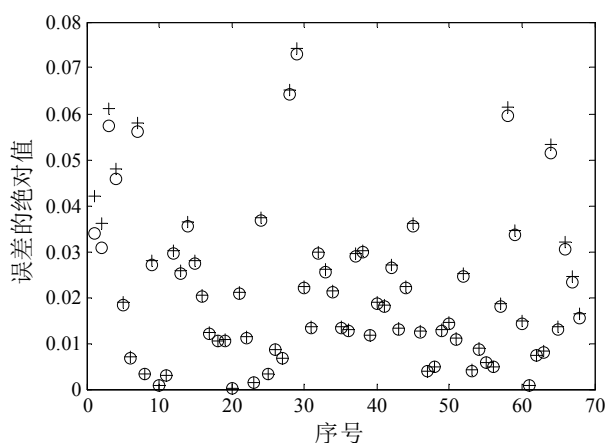


图 3.6 交叉验证的误差图

图 3.6 所示的两种评估误差在 13 处序号上存在明显差别，表明这 13 处的材料参数包含过多自身信息，不适合用作 Paris 模型参数。将这 13 处的材料参数提出后，得到 55 组 $(\lg C_i, m_i)$ ，如图 3.7 所示。最后，利用最小二乘法得到 $\lg C$ 和 m 的线性关系式为：

$$\lg C = -2.5491 \cdot m - 4.0270 \quad (3.25)$$

相关系数 $\gamma = -0.9983$ ，查相关系数显著性检验表，取 $n-2=53$ ，得 $|\gamma| > 0.4315$ ， γ 在 $\alpha = 0.001$ 水平上显著， $\lg C$ 与 m 之间的线性关系显著。后文的所有计算都将建立在该 55 组材料参数的基础上。

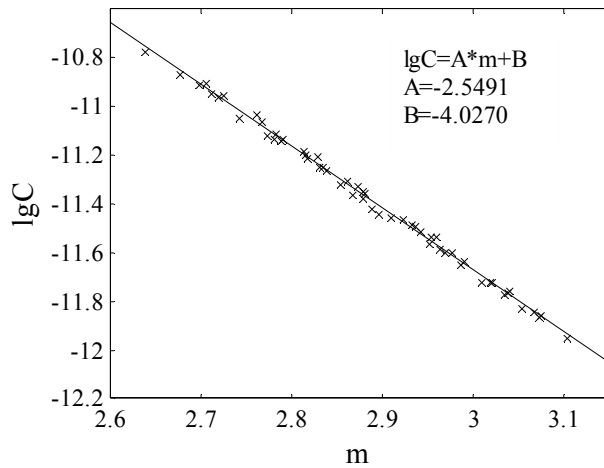


图 3.7 交叉验证后的材料参数 $\lg C$ 和 m

3.3.5 材料参数分布类型假定

上文得到的 55 组材料参数 ($\lg C_i, m_i$), 其频数统计分布如图 3.8 所示。 $\lg C$ 的均值为 -11.38, 标准差为 0.301; m 的均值为 2.88, 标准差为 0.118。因实验得到的数据较为有限, 无法确定 $\lg C$ 和 m 的准确概率分布, 故本文将对 $\lg C$ 和 m 可能的概率分布类型进行假定。工程中常用的概率分布类型有两种: 正态分布和均匀分布。

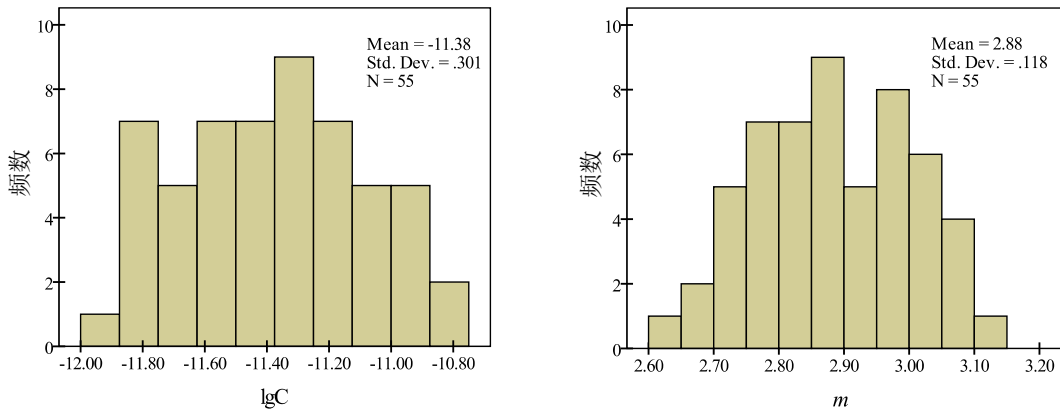


图 3.8 材料参数 $\lg C$ 和 m 的统计分布

(1) 正态分布假定。假定材料参数 $\lg C$ 和 m 均取自正态分布总体, 用样本方差估计总体方差时应选择样本方差的无偏估计量 S^2 , 其表达式为:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3.26)$$

由上式评估的 $\lg C$ 和 m 的样本方差 S^2 分别为: 0.3037^2 和 0.1189^2 , 故假定:

$\lg C \sim N(-11.38, 0.3037^2)$, $m \sim N(2.88, 0.1189^2)$ 。

(2) 均匀分布假定。假定材料参数 $\lg C$ 和 m 均服从均匀分布, 由实验值得出 $\lg C$ 和 m 的取值范围分别为 $[-11.95, -10.78]$ 和 $[2.64, 3.10]$, 利用极大似然估计原理可得 $\lg C \sim U(-11.95, -10.78)$, $m \sim U(2.64, 3.10)$ 。

3.4 金属板疲劳损伤预后不确定性分析

3.4.1 金属板疲劳损伤预后模型

由前文的分析可知, Paris 公式可以很好的描述常幅疲劳荷载作用下 2024-T3 铝合金板中心 I 型裂纹的扩展过程。通过对金属板 Paris 公式 (3.20) 积分, 得到 2024-T3 铝合金板剩余疲劳寿命 (或荷载循环次数 N) 的基本计算公式如下:

$$N = \int_{a_0}^{a_c} C \left(\frac{\Delta P}{W \cdot B} \sqrt{\pi \cdot a \cdot \sec(a/W)} \right)^m da. \quad (3.27)$$

其中, a_0 为二分之一初始裂纹长度, a_c 为二分之一裂纹临界长度。与 Virkler 实验保持一致, 取 $a_0=9\text{mm}$, $a_c=49.8\text{mm}$ 。公式 (3.27) 中材料参数 $\lg C$ 和 m 的变异性, 使得金属板剩余疲劳寿命的预测值是不确定性的, 这是本文进行不确定性研究的驱动力。

(1) 损伤预后不确定性模型

记 $\boldsymbol{\omega}$ 为影响金属板疲劳裂纹扩展的不确定性矢量, 则剩余疲劳寿命应准确地记为 $N(\boldsymbol{\omega})$ 。本文主要考虑材料参数 $\lg C$ 和 m 为不确定性变量, 则 $\boldsymbol{\omega} = (\lg C, m)$ 。考虑不确定性影响的金属板疲劳损伤预后模型为:

$$N(\boldsymbol{\omega}) = \int_{a_0}^{a_c} C \left(\frac{\Delta P}{W \cdot B} \sqrt{\pi \cdot a \cdot \sec(a/W)} \right)^m da, \quad \boldsymbol{\omega} \in I_{\boldsymbol{\omega}}. \quad (3.28)$$

其中, $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 为不确定性变量的取值空间, 即参数 $\lg C$ 和 m 的取值空间。本文采用 GPC-随机配点法求解该疲劳损伤预后不确定性模型。由第二章的理论介绍可知, 随机配点法在求解不确定性问题时, 需给出不确定性变量的量化区间。

(2) 不确定性变量的量化区间

上文假定材料参数 $\lg C$ 和 m 均服从正态分布或均匀分布。依据表 2.1 的内容, 若 $\lg C$ 和 m 服从正态分布, 当区间外概率 (或舍弃概率) 小于 0.003 时, 正态分布随机变量的量化区间为 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$, 则 $\lg C$ 和 m 的量化区间分别为 $[-12.29, -10.47]$ 和 $[2.52, 3.24]$ 。若 $\lg C$ 和 m 服从均匀分布, 则量化区间为实验值的范围, 即 $\lg C$ 和 m 的量化范围分别为 $[-11.95, -10.78]$ 和 $[2.64, 3.10]$ 。 $\lg C$ 和 m 的量化区间

应取两种量化区间的并集，即正态分布假定下的量化区间。在此量化区间的基础上，考虑 $\lg C$ 与 m 的相关性，如公式 (3.25) 所示，则 $\lg C$ 的量化区间应为 $[-12.29, -10.45]$ 。因此，式 (3.28) 中不确定性变量的取值空间 I_{ω} 为：

$$I_{\omega} = [-12.29, -10.45] \times [2.52, 3.24]. \quad (3.29)$$

3.4.2 剩余疲劳寿命代理多项式

应用 GPC-随机配点法 (GPC 法) 进行金属板疲劳损伤预后时，主要工作在于构建代理多项式 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ ，用以近似剩余疲劳寿命 $N(\boldsymbol{\omega})$ 在不确定性空间 I_{ω} 上的取值。为区别于第二章中多项式的展开阶数 N ，这里用 $k \in \mathbb{N}^0$ 表示多项式阶数或插值阶数。本文采用基于 Chebyshev 极值点的 Smolyak-稀疏网格插值法构建代理多项式 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ ，故 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 也称插值多项式。通常，随着插值阶数 k 的增加，插值多项式的计算精度将提高，而基于该多项式的计算时间将延长，计算效率将下降。因此，选择合适的插值阶数，确定最优化的 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ ，平衡计算精度和计算效率之间的矛盾，是本节急需解决的问题。

(1) 参数线性变换

因第二章中介绍的有关 GPC-随机配点法的知识均是针对取值区间为 $[-1, 1]$ 的不确定性变量，故在利用稀疏网格插值法构建 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 之前，需对 $\lg C$ 和 m 的进行如公式 (3.30) 和公式 (3.31) 所示的线性变换，将如公式 (3.29) 所示的不确定性空间 I_{ω} 变换到标准不确定性空间 $[-1, 1]^2$ 。

$$\lg C = 0.92z_1 - 11.37, \quad (3.30)$$

$$m = 0.36z_2 + 2.88, \quad (3.31)$$

其中， z_1 和 z_2 分别为对应 $\lg C$ 和 m 的标准不确定性变量，取值范围均为 $[-1, 1]$ 。

(2) 计算精度

稀疏网格插值法的计算精度直接影响插值多项式 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 与 $N(\boldsymbol{\omega})$ 的近似程度，进而影响 GPC-随机配点法后处理中剩余疲劳寿命统计特征的计算。本文定义相对累积误差 err_s ，如公式 (3.32) 所示，用以衡量插值多项式 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 与 $N(\boldsymbol{\omega})$ 的近似程度。

$$err_s = \frac{\|N_k(\boldsymbol{\omega}) - N(\boldsymbol{\omega})\|_2}{\|N(\boldsymbol{\omega})\|_2}, \quad \boldsymbol{\omega} \in I_{\omega}. \quad (3.32)$$

其中，算子 $\|\cdot\|_2$ 为二范数，具体定义式为：

$$\|N(\boldsymbol{\omega})\|_2 = \sqrt{\int_{I_{\omega}} |N(\boldsymbol{\omega})|^2 d\boldsymbol{\omega}}. \quad (3.33)$$

稀疏网格插值法的相对误差 err_s 随插值阶数 k 的变化曲线如图 3.9 所示。从图中可以看出，随着 k 值的增加， err_s 迅速减小；当 $k=6$ 时， err_s 已减少到 5.63×10^{-8} ； $k=8$ 时， err_s 的大小为 4.87×10^{-16} ，计算精度较 $k=6$ 时提高了一倍；此后， err_s 基本恒定在这一数值附近。由此说明，稀疏网格插值法在构造剩余疲劳寿命代理多项式 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 时可迅速达到较高的计算精度。

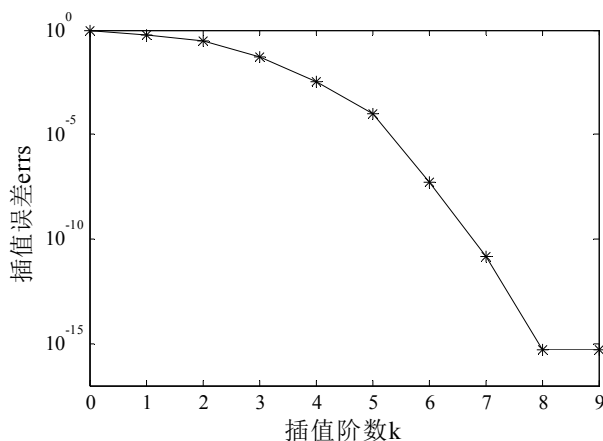


图 3.9 稀疏网格插值法的相对误差 err_s 随插值阶数 k 的变化

(3) 计算效率

在研究了稀疏网格插值法的计算精度后，下文将对稀疏网格插值法的计算效率进行研究。第二章曾指出，稀疏网格插值法的计算效率主要受配置点的数目影响。因此，本文给出了各插值阶数对应的配置点的数目 M ，也即求解确定性剩余疲劳寿命（公式 (3.27)）的次数，如图 3.10 所示。当 $k \leq 6$ 时， M 的增幅较小； $k=6$ 时， M 的取值为 321；此后， M 的增幅成倍增加， $k=9$ 时， M 的取值达到了 3329，较 $k=6$ 时增加了 3008。

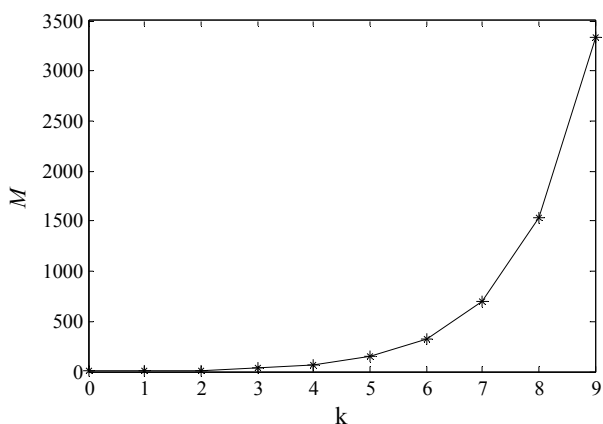


图 3.10 确定性剩余疲劳寿命的求解次数随插值阶数的变化

为进一步说明稀疏网格插值法的计算效率，本文给出了基于稀疏网格法构造代理多项式 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 所需的计算时间 t_1 随插值阶数 k 的变化曲线，如图 3.11 (a)

所示。此外，图 3.11(b)给出了基于代理多项式 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 求解不确定性空间中 10000 个样本点所需的时间 t_2 。与图 3.10 描述的曲线变化规律类似，当 $k \leq 6$ 时， t_1 和 t_2 取值均非常小； $k=6$ 时对应的 t_1 和 t_2 的大小分别为 0.216s 和 3.246s；此后， t_1 和 t_2 的增幅均较快， $k=9$ 时， t_1 和 t_2 的取值分别达到了 12.165s 和 233.828s，远大于 $k=6$ 时的取值。

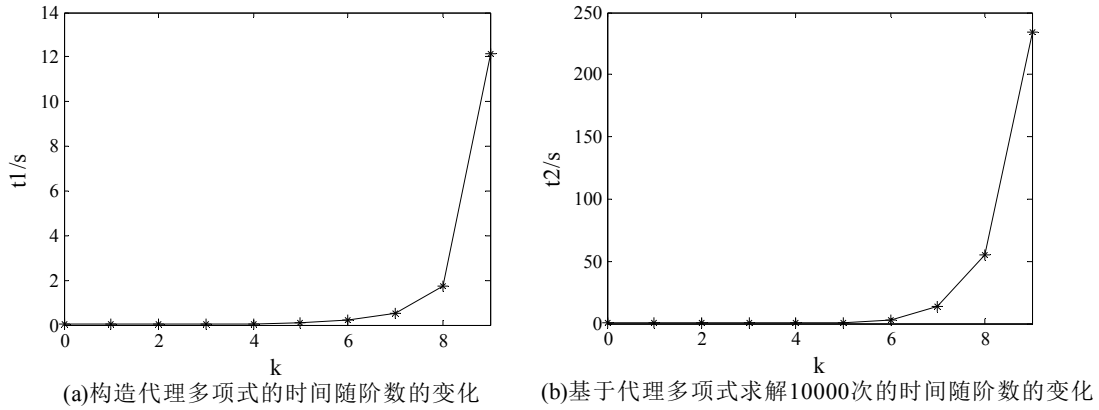


图 3.11 稀疏网格插值法的计算时间随插值阶数的变化

综合上述分析，对于 2024-T3 铝合金板中央 I 型裂纹的损伤预后不确定性模型（公式 (3.28)），插值阶数 $k=6$ 对应的代理多项式在计算精度和计算效率上均是十分理想的。图 3.12 (a) 和 (b) 分别为剩余疲劳寿命精确表达 $N(\boldsymbol{\omega})$ 和代理多项式 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 在不确定性空间 $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 上的取值曲面，两曲面的形状十分接近。

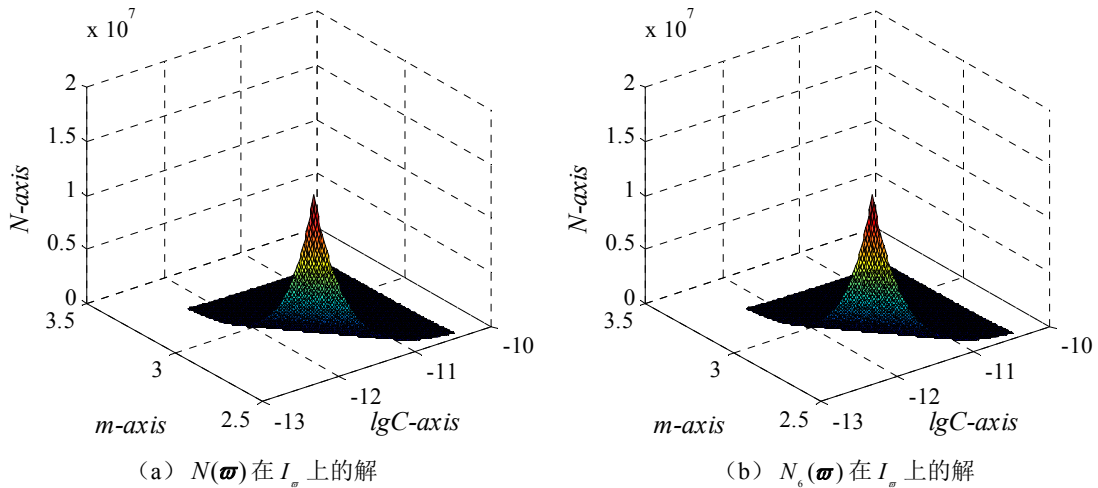


图 3.12 不确定性空间 $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 上剩余疲劳寿命 $N(\boldsymbol{\omega})$ 和代理多项式 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 的取值

此外，直接基于模型 (3.32) 求解 10000 个样本点的时间为 9.1769s，而构建并利用 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 求解 10000 个样本点的时间为 3.462s (t_1+t_2)，计算效率约为直接求解的 3 倍。代理多项式的这一优势将在更为复杂的土木工程结构的损伤预后中发挥重要的作用。因此本文选择 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 作为剩余疲劳寿命 $N(\boldsymbol{\omega})$ 在不确定性空间

I_{ω} 上的代理多项式。

GPC-随机配点法的后处理中将基于代理多项式 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ ，依据材料参数 $\lg C$ 和 m 的统计分布类型，利用 Monte Carlo 随机采样技术评估剩余疲劳寿命的统计特征。下文将分别计算 $\lg C$ 和 m 服从正态分布或均匀分布下的剩余疲劳寿命。

3.4.3 正态分布参数假定下剩余疲劳寿命评估

上文假定材料参数 $\lg C \sim N(-11.38, 0.3037^2)$ ， $m \sim N(2.88, 0.1189^2)$ 。考虑 $\lg C$ 和 m 具有相关性，则后处理中只需对 m 进行随机采样。采样时，仅选择位于不确定性空间 I_{ω} 内的样本点 m_i 。 $\lg C_i$ 的值可依据公式 (3.25) 计算得到。

(1) Monte Carlo 法收敛效率

首先研究正态分布参数假定下 Monte Carlo 法基于 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 计算的收敛效率，以确定合适的随机样本数目。剩余疲劳寿命 N 的均值和标准差随样本数目的变化如图 3.13 所示。图中，样本点数目间隔为 100。当样本数目在 5000 之上时， N 的均值基本集中在区间 $[2.4391 \times 10^5, 2.4403 \times 10^5]$ 之内，标准差主要集中在区间 $[1895.7, 1971.8]$ 之内。因此，本文将选取 10000 个样本点的计算结果用于分析。

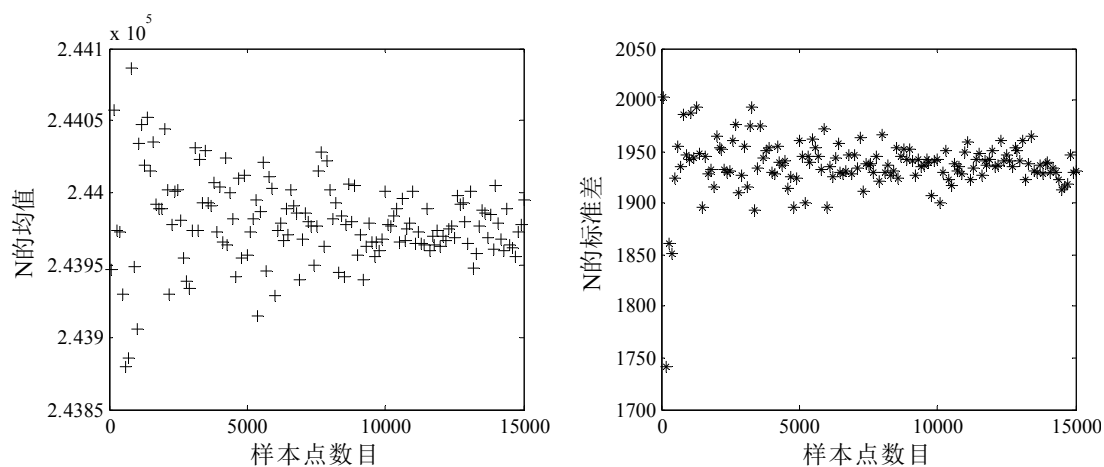
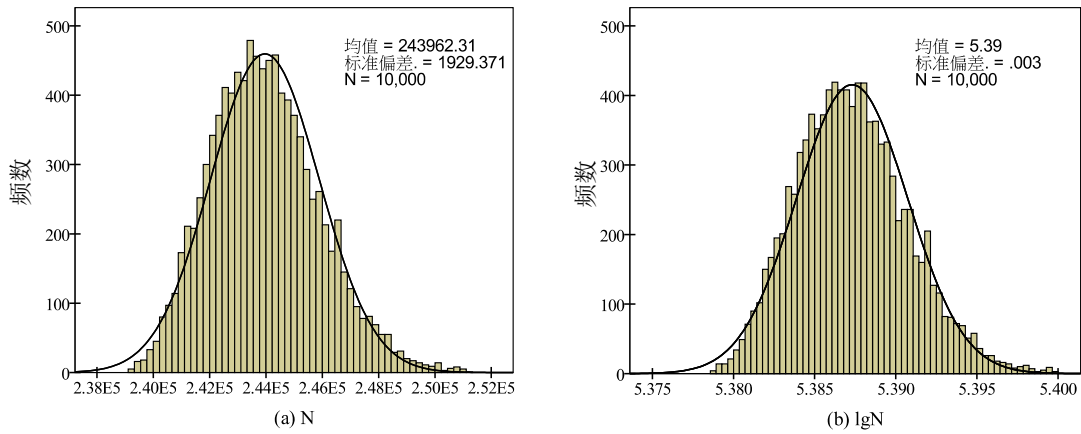


图 3.13 GPC 法正态分布参数假定下 N 的均值和标准差随样本数目的变化

(2) 剩余疲劳寿命统计特征

Monte Carlo 法采样 10000 次的剩余疲劳寿命 N 和 $\lg N$ 的频数统计及其相应的正态分布曲线如图 3.14 所示。从图中可以看出， N 和 $\lg N$ 的统计分布与正态分布十分类似。剩余疲劳寿命 N 的均值为 243962，标准差为 1929.37，取值范围为 $[239237, 251120]$ ；相应的 $\lg N$ 的均值为 5.3873，标准差为 0.0034，取值范围为 $[5.3788, 5.3999]$ 。具有 95% 可靠度的剩余疲劳寿命 N 为 240968。


 图 3.14 GPC 法正态分布参数假定下 N 和 $\lg N$ 的频数统计分布

因此，本文将检验 N 的四种可能分布类型：均匀分布、正态分布、两参数对数正态分布和三参数对数正态分布。其中，三参数对数正态分布的概率密度函数为：

$$f[\lg(N - N_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{[\lg(N - N_0) - \mu]^2}{2\sigma^2}}, \quad 0 < N_0 < \min(N). \quad (3.34)$$

式中，参数 N_0 、 μ 和 σ 的评估方法详见文献[90]，这里不再赘述。因样本数目较大，故采用 Kolmogorov-Smirnov (K-S) 检验评估统计类型。

(3) K-S 检验剩余疲劳寿命分布类型

K-S 检验是以样本数据的累计频率分布与特定理论分布（上述四种待检验分布类型）比较，若两者的差距很小，则推论样本服从该特定理论分布。对于任意一组给定的样本 x_1, \dots, x_n ，K-S 检验的统计量为：

$$D = \sup_x |F_n(x) - F(x)|. \quad (3.35)$$

其中， n 为样本数目； $F(x)$ 为特定理论分布的分布函数； $F_n(x)$ 为给定样本的累计频率分布。当 $D > D(n, \alpha)$ 时，则认为样本不取自该特定理论分布，反之，则认为样本取自该特定理论分布。

本文取检验水平 $\alpha = 0.05$ ，查文献[87]给出的 K-S 检验临界表得 $D(10000, 0.05) = 0.0136$ ，检验发现 N 不服从均匀分布、正态分布和两参数对数正态分布， N 服从三参数对数正态分布。详细参数评估结果和 K-S 检验结果如表 3.1 所示。

表 3.1 GPC 法正态分布参数假定下 N 的分布类型检验结果

分布类型	参数估计	K-S 检验量 D	K-S 检验量临界值 $D(10000,0.05)$	显著性水平	结果
均匀分布	$a=239237$ $b=251120$	0.289	0.0136	0	不服从
正态分布	$\bar{X} = 243962.3$ $S = 1929.371$	0.027	0.0136	1.29e-6	不服从
两参数对数正态分布	$\bar{X} = 5.3873$ $S=0.00343$	0.025	0.0136	5.55e-6	不服从
三参数对数正态分布	$N_0= 229990$ $\bar{X} = 4.1412$ $S = 0.0597$	0.007	0.0136	0.754	服从

图 3.15(a)和 3.15(b)分别给出了 N 与相应三参数对数正态分布的概率密度曲线和累积分布曲线的对比情况。可以看出, N 与三参数对数正态分布的吻合程度很高。其中, 三参数对数正态分布的概率密度函数的形式不同于公式 (3.34), 如公式 (3.36) 所示。

$$f(N) = \frac{1}{(N - N_0) \ln 10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{[\lg(N - N_0) - \mu]^2}{2\sigma^2}} \quad (3.36)$$

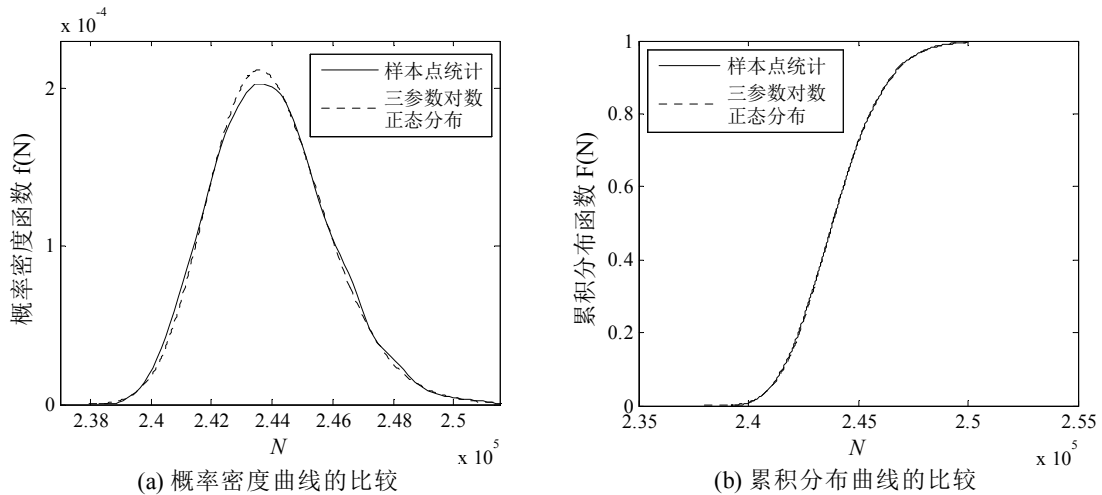


图 3.15 GPC 法正态分布参数假定下 N 的概率统计与三参数对数正态分布的比较

3.4.4 均匀分布参数假定下剩余疲劳寿命评估

上文假定材料参数 $\lg C \sim U(-11.95, -10.78)$, $m \sim U(2.64, 3.10)$ 。考虑 $\lg C$ 和 m 具有相关性, 则与正态分布参数假定一样, 利用 Monte Carlo 法采样时, 只需

对参数 m 进行随机抽样。因均匀分布参数假定下, m 和 $\lg C$ 的取值范围均在不确定性空间 I_{σ} 内, 故无需对 m 进行截断采样。

(1) Monte Carlo 法收敛效率

首先研究均匀分布参数假定下 Monte Carlo 法基于 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 的收敛效率。剩余疲劳寿命 N 的均值和标准差随样本数目的变化如图 3.16 所示。样本点数目间隔为 100。当样本数目大于 5000, N 的均值集中在区间 $[2.4412 \times 10^5, 2.4424 \times 10^5]$ 之内, 标准差集中在区间 $[2187.9, 2245.2]$ 之内。因此, 与正态分布参数假定下剩余疲劳寿命的计算类似, 本文仍选取 10000 个样本点用于分析。

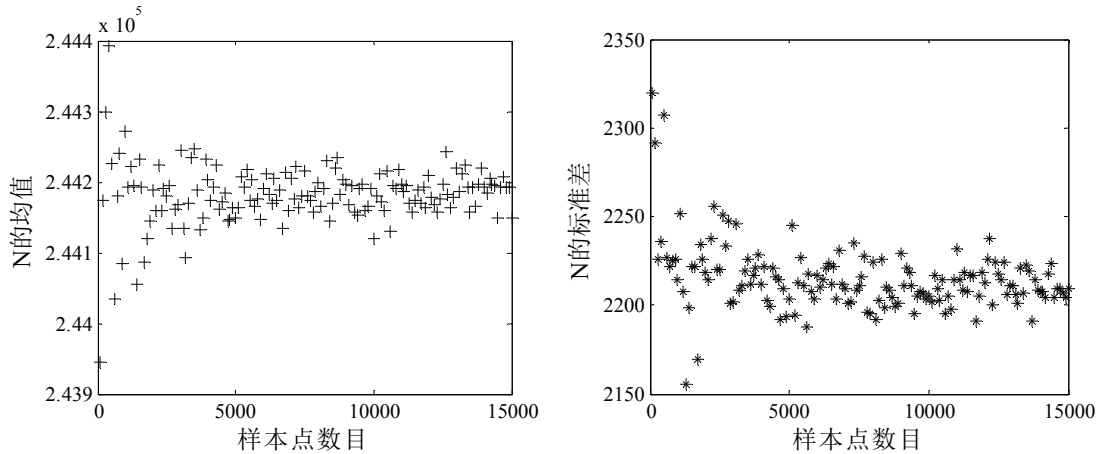


图 3.16 GPC 法均匀分布参数假定下 N 的均值和标准差随样本数目的变化

(2) 剩余疲劳寿命统计特征

Monte Carlo 随机采样 10000 次的剩余疲劳寿命 N 和 $\lg N$ 的频数统计如图 3.17 所示。 N 的均值为 244208, 标准差为 2224.30, 取值范围为 $[240722, 248376]$; 相应的 $\lg N$ 的均值为 5.3877, 标准差为 0.0040, 取值范围为 $[5.3815, 5.3951]$; 具有 95% 可靠度的剩余疲劳寿命值为 240995。从图中可以看出, N 和 $\lg N$ 的统计分布与正态分布基本不吻合, 类似均匀分布。

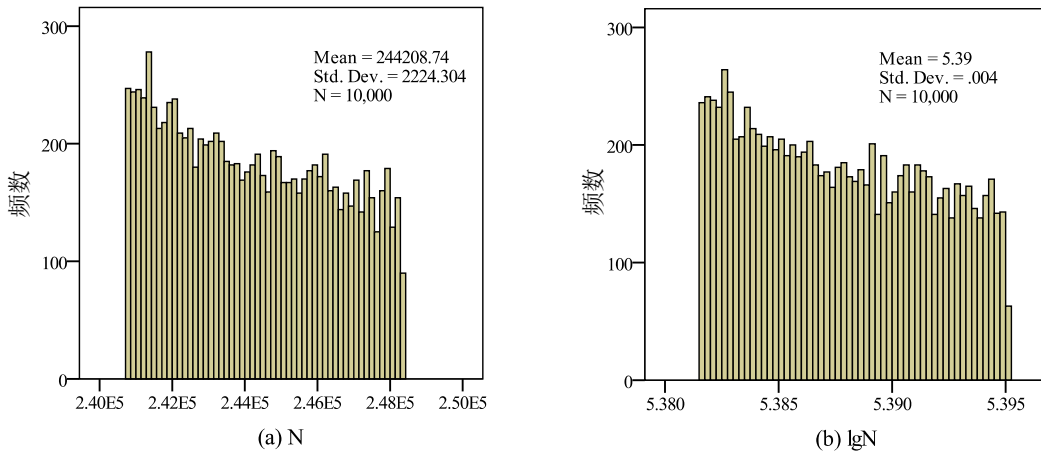


图 3.17 GPC 法均匀分布参数假定下 N 和 $\lg N$ 的频数统计分布

因此, 本文将检验剩余疲劳寿命 N 的四种可能分布类型: 正态分布、均匀分布、两参数对数均匀分布和三参数对数均匀分布。其中, 三参数对数均匀分布的概率表达为:

$$f(\lg(N - N_0)) = \frac{1}{b - a}, \quad 0 < N_0 < \min(N). \quad (3.37)$$

式中, 参数 $b = \max(\lg(N - N_0))$, $a = \min(\lg(N - N_0))$, N_0 为使得统计分布检验量 (这里指 K-S 检验量 D) 达到最小的值。

(3) K-S 检验剩余疲劳寿命分布类型

K-S 检验的基本原理已在上文中进行了详细的说明, 取检验水平 $\alpha = 0.05$, 则 $D(10000, 0.05) = 0.0136$, 检验发现 N 不服从正态分布、均匀分布和两参数对数均匀分布, N 服从三参数对数均匀分布。详细的参数评估结果和 K-S 检验结果如表 3.2 所示。

表 3.2 GPC 法均匀分布参数假定下 N 的分布类型检验结果

分布类型	参数估计	K-S 检验量 D	K-S 检验量临界值 $D(10000, 0.05)$	显著性水平	结果
正态分布	$\bar{X} = 244208.7$ $S = 2224.304$	0.071	0.0136	0	不服从
均匀分布	$a = 240722$ $b = 248376$	0.068	0.0136	0	不服从
两参数对数 均匀分布	$a = 5.3815$ $b = 5.3951$	0.065	0.0136	0	不服从
三参数对数 均匀分布	$N_0 = 230050$ $a = 4.0282$ $b = 4.2631$	0.008	0.0136	0.474	服从

为进一步说明 N 与三参数对数均匀分布之间的吻合程度, 图 3.18(a)和图 3.18(b)分别给出了 N 与相应三参数对数均匀分布的概率密度曲线和累积分布曲线的对比情况, 可以看出, 两者的概率密度曲线和累积分布曲线的形状基本一致。图中, 三参数对数均匀分布的概率密度函数的形式与公式 (3.37) 略有不同, 如公式 (3.38) 所示, 相应的累积分布函数的形式如公式 (3.39) 所示。

$$f(N) = \frac{1}{(N - N_0) \ln 10} \cdot \frac{1}{b - a}. \quad (3.38)$$

$$F(N) = \frac{\lg(N - N_0) - a}{b - a}. \quad (3.39)$$

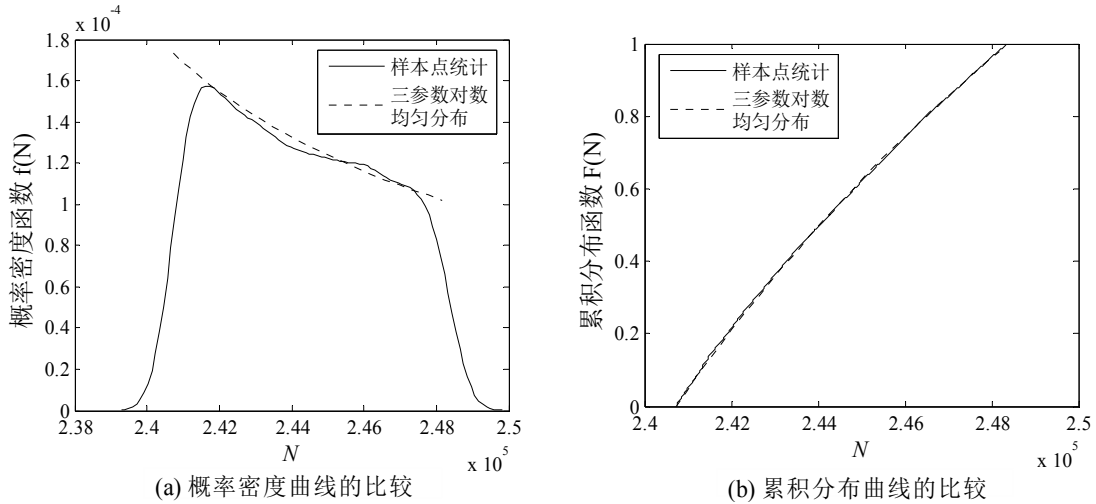


图 3.18 GPC 法均匀分布参数假定下 N 的概率统计与三参数对数均匀分布的比较

3.4.5 两种参数分布类型下剩余疲劳寿命比较

因 Virkler 实验数据有限，故无法给出 2024-T3 铝合金板材料参数 $\lg C$ 和 m 的精确概率分布。本文依据工程经验，假定 $\lg C$ 和 m 均服从正态分布或均匀分布，并在 GPC 法的后处理中分别计算了这两种分布类型下剩余疲劳寿命 N 。

(1) 两种参数分布类型假定下剩余疲劳寿命的比较

正态分布参数假定和均匀分布参数假定下的 N 的统计特征值如表 3.3 所示。显然，正态分布参数假定下 N 的取值范围基本包含均匀分布参数假定下 N 的取值，这是因为材料参数 m 正态分布假定下的取值范围 $[2.52, 3.24]$ 大于均匀分布假定下的取值范围 $[2.64, 3.10]$ 。此外，正态分布参数假定下具有 95% 可靠度的 N 为 240968，略低于均匀分布参数下的值。

表 3.3 GPC 法正态分布参数和均匀分布参数假定下 N 的比较

参数分布类型	N 的分布类型	参数估计	N 的均值	N 的标准差	N 的取值区间	95%可靠度的 N
正态分布	三参数对数正态分布	$N_0=230410$ $\bar{X} = 4.1266$ $S = 0.0624$	243933	1948.92	[239234, 251005]	240968
均匀分布	三参数对数均匀分布	$N_0=231100$ $a= 3.9833$ $b= 4.2373$	244174	2213.27	[240723, 248370]	240995

正态分布参数假定下 N 的频数统计基本与正态分布吻合，K-S 检验结果表明 N 服从三参数对数正态分布；而均匀分布参数假定下 N 的频数统计基本与均匀分布吻合，K-S 检验结果表明 N 服从三参数对数均匀分布。Virkler 基于实验数据研

究得出剩余疲劳寿命 N 服从三参数对数正态分布^[66]，这与正态分布参数假定下的结论一致，由此证明， $\lg C$ 和 m 服从正态分布的假定是合理的，而服从均匀分布的假定是不合理的。下面将根据 55 组材料参数的实验数据，利用数理统计方法检验 $\lg C$ 和 m 是否服从正态分布。

(2) 材料参数正态分布检验

通常，检验一组样本是否服从正态分布的非参数检验方法有两种：Shapiro-Wilk 检验(W 检验)和上文提到的 Kolmogorov-Smirnov 检验(K-S 检验)。一般认为，当样本数量 $n \leq 2000$ 时检验结果以 Shapiro-Wilk 检验为准，反之，检验结果以 K-S 检验为准。本文实际用于计算分析的材料参数共计 55 组，故利用 Shapiro-Wilk 检验对材料参数 $\lg C$ 和 m 是否正态分布进行验证。

Shapiro-Wilk 检验是一种检验小样本是否服从正态分布的方法。对于一组任意给定的样本 x_1, \dots, x_n ，Shapiro-Wilk 检验的统计量为：

$$W_S = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_{(i)} \right)^2 / \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (3.40)$$

其中， $x_{(i)}$ 为第 i 次序统计量，即给定样本中的第 i 个最小值； \bar{x} 为样本的均值；常数 α_i 的计算公式为：

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = m_s^T V_s^{-1} / \sqrt{m_s^T V_s^{-1} V_s^{-1} m_s} \quad (3.41)$$

其中， $m_s = (m_{s1}, \dots, m_{sn})^T$ 是标准正态次序统计量的期望值， V_s 是相应的协方差矩阵。Shapiro-Wilk 检验统计量的取值范围： $0 < W_S \leq 1$ ， W_S 的值越大，说明样本的分布越接近正态分布。

利用 SPSS 统计软件计算得到 $\lg C$ 的 W_S 值为 0.977，显著性水平为 0.370， m 的 W_S 值为 0.978，显著性水平为 0.403。显然， $\lg C$ 和 m 的显著性水平均明显高于 $\alpha = 0.05$ ，由此说明两者均取自正态分布总体。 $\lg C$ 和 m 与各自相应正态分布曲线的比较如图 3.19 所示。

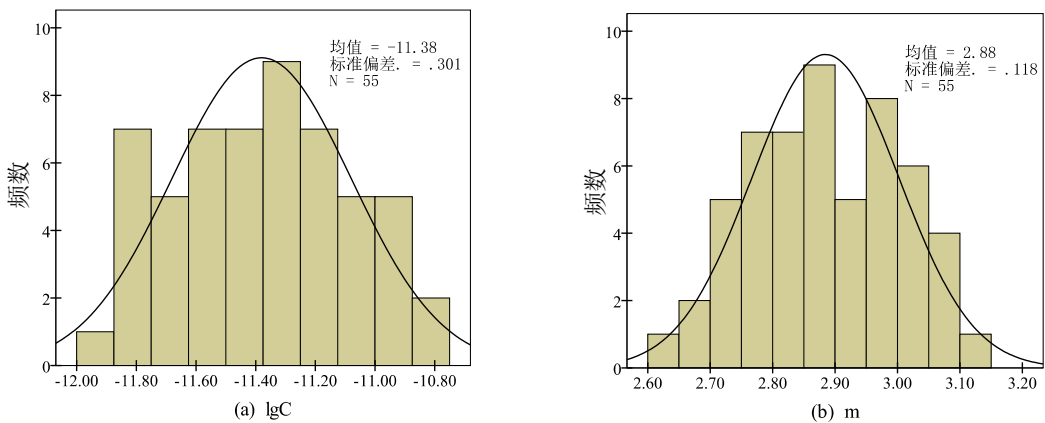


图 3.19 材料参数 $\lg C$ 和 m 的统计分布

综合上述分析,对比 GPC 法数值计算的 N 的分布类型与 Virkler 实验结果和利用 Shapiro-Wilk 检验方法直接分析材料参数的实验值均得出 $\lg C$ 和 m 服从正态分布,更进一步证明:材料参数 $\lg C$ 和 m 服从正态分布。此外,正态分布参数假定下 GPC 法计算的具有 95%可靠度的 N 略大于实验值(230000 附近),数值误差不超过 5%,由此说明 GPC 法的计算结果是可靠的。

3.5 本章小结

本章主要基于断裂力学原理,利用 GPC-随机配点法进行金属板疲劳损伤预后不确定性分析。

(1) 对断裂力学的基础知识进行了简单的介绍,在此基础上,基于 Paris 裂纹扩展速率公式拟合 Virkler 疲劳裂纹扩展实验数据,得到 68 组 2024-T3 铝合金板的材料参数 $\lg C$ 和 m ,线性回归 $\lg C$ 和 m 的数值,发现两者线性关系显著。

(2) 利用 Paris 公式重建金属板裂纹扩展速率曲线,发现部分曲线不能与 Virkler 实验曲线吻合,故利用一次交叉验证技术将对应于这部分曲线的材料参数去除,最终确定 55 组有效的 $\lg C$ 和 m ,用于疲劳损伤预后不确定性分析。

(4) 因实验数据有限,本章首先假定工程中常用的 $\lg C$ 和 m 的两种分布类型:正态分布和均匀分布。

(5) 综合考虑材料参数的相关性和分布类型的信息,确定 $\lg C$ 和 m 的量化区间分别为 $[-12.29,10.45]$ 和 $[2.52,3.24]$,并提出考虑 $\lg C$ 和 m 为不确定性变量 $\boldsymbol{\omega}$ 的金属板疲劳损伤预后模型,如公式(3.28)。

(6) 利用 GPC 法构建金属板剩余疲劳寿命 $N(\boldsymbol{\omega})$ 在不确定性空间 $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 中的最优代理多项式 $N_c(\boldsymbol{\omega})$,并在后处理中基于 $N_c(\boldsymbol{\omega})$ 考虑 $\lg C$ 和 m 的相关性,利用 Monte Carlo 随机采样 10000 次,计算参数分别服从正态分布和均匀分布时 $N(\boldsymbol{\omega})$ 的均值、标准差、取值范围和概率分布曲线

(7) 利用 K-S 检验 $N(\boldsymbol{\omega})$ 可能的概率分布类型,得出正态分布参数假定下 $N(\boldsymbol{\omega})$ 服从三参数对数正态分布 ($N_0=230410$, $\bar{X}=4.1266$, $S=0.0624$),均匀分布参数假定下 $N(\boldsymbol{\omega})$ 服从三参数对数均匀分布 ($N_0=231100$, $a=3.9833$, $b=4.2373$)。

(8) 对比两种参数分布类型假定下 $N(\boldsymbol{\omega})$ 的数值计算结果与 Virkler 实验数值,发现材料参数 $\lg C$ 和 m 服从正态分布而不服从均匀分布。基于 $\lg C$ 和 m 实验数据的 Shapiro-Wilk 检验进一步证明 $\lg C$ 和 m 服从正态分布。此外,正态分布参数假定下基于 GPC 法的具有 95%可靠度的 N 为 240968,与实验得出的数值相差在 5%以内,由此说明 GPC 法的计算是可靠的。

第4章 GPC法与其他不确定性分析方法的比较

4.1 引言

GPC-随机配点法（GPC法）是近几年发展起来的一种处理不确定性问题的数值计算方法，事实上，在此之前，还存在很多求解不确定性问题的数值方法，例如 Monte Carlo 法、随机 Galerkin 法和区间法等，对比研究 GPC 法与这些早前的数值方法在疲劳损伤预后分析中的不同，可为具体的工程结构预后问题提供指导意见。

所有不确定性分析方法归根结底可分为两类：采样法和非采样法。Monte Carlo 法是一种经典的采样方法；随机 Galerkin 法是典型的非采样方法，且 Galerkin 展开思想在其他工程领域中的应用非常广泛。GPC-随机配点法在处理偶然不确定性问题，兼具采样法和非采样法的特点。因此，本文将分别比较 GPC 法与 Monte Carlo 法和随机 Galerkin 法的不同。

本章仍以上文介绍的 Virkler 实验中具有中心 I 型裂纹的 2024-T3 铝合金板为研究对象，如图 3.2 所示，仍选用 Paris 公式描述金属板疲劳损伤裂纹扩展过程，金属板疲劳损伤预后不确定性模型如公式 (3.28) 所示。模型中参数的具体取值详见第三章，这里不再赘述。第三章中得出材料参数 $\lg C$ 和 m 均服从正态分布，且具有相关性，故本章仅研究 $\lg C$ 和 m 服从正态分布时 GPC 法与 Monte Carlo 法和随机 Galerkin 法在金属板疲劳损伤预后分析中的不同。

4.2 基于 Monte Carlo 法的损伤预后不确定性分析

本章用于比较研究的 Monte Carlo 法不同于第三章中介绍的 Monte Carlo 法，第三章中介绍的 Monte Carlo 法仅是其他算法的辅助工具，这里的 Monte Carlo 法是独立求解不确定性问题的数值方法，具有和其他数值算法同等的地位。

Monte Carlo 法（MC 法）直接基于不确定性系统的数学模型求解，是一种强收敛方法。在处理金属板疲劳损伤预后问题时，MC 法通过生成大量随机空间中的样本点 $\boldsymbol{\omega}^{(j)}$ ，直接求解金属板疲劳损伤预后模型（公式 (3.28)），得到各样本点 $\boldsymbol{\omega}^{(j)}$ 上的剩余疲劳寿命的精确解答 $N(\boldsymbol{\omega}^{(j)})$ ，并基于此精确解答 $N(\boldsymbol{\omega}^{(j)})$ 评估剩余疲劳寿命 N 的概率特征。从理论上分析，MC 法的计算精度应位居所有不确定性数值算法的首位，故常用作其他不确定性数值计算方法的校验工具。

MC 法的高精度是以牺牲计算效率为代价的。MC 法基于大数定律，需利用

大量的随机样本，才能达到理想的计算精度，从而 MC 法需求解大量的系统控制方程。本文将利用 MC 法计算材料参数 $\lg C$ 和 m 均服从正态分布时的 2024-T3 铝合金板剩余疲劳寿命 N 的概率特征。

4.2.1 正态分布参数假定

本文假定 Paris 公式中的材料参数 $\lg C$ 和 m 满足： $\lg C \sim N(-11.38, 0.3037^2)$ ， $m \sim N(2.88, 0.1189^2)$ 。因 $\lg C$ 与 m 具有很强的线性相关性，故 MC 法的随机抽样过程只需考虑其中一个随机变量的分布类型。本文选择对 m 进行随机抽样，且为便于与 GPC 法比较，仅选取不确定性空间 I_{σ} （公式 (3.29)）中的样本点。

(1) Monte Carlo 法收敛效率

与 GPC 法的计算过程类似，首先需研究 MC 法的计算效率。MC 法计算的剩余疲劳寿命 N 的均值和标准差随样本数目的变化如图 4.1 所示。图中，样本点数目间隔为 100。从图中可以看出，当样本数目大于 5000 时， N 的均值和标准差基本恒定，与之前 GPC 法后处理的结论基本一致。均值的取值区间为 $[2.4392 \times 10^5, 2.4403 \times 10^5]$ ，标准差的取值区间为 $[1907.0, 1980.0]$ 。

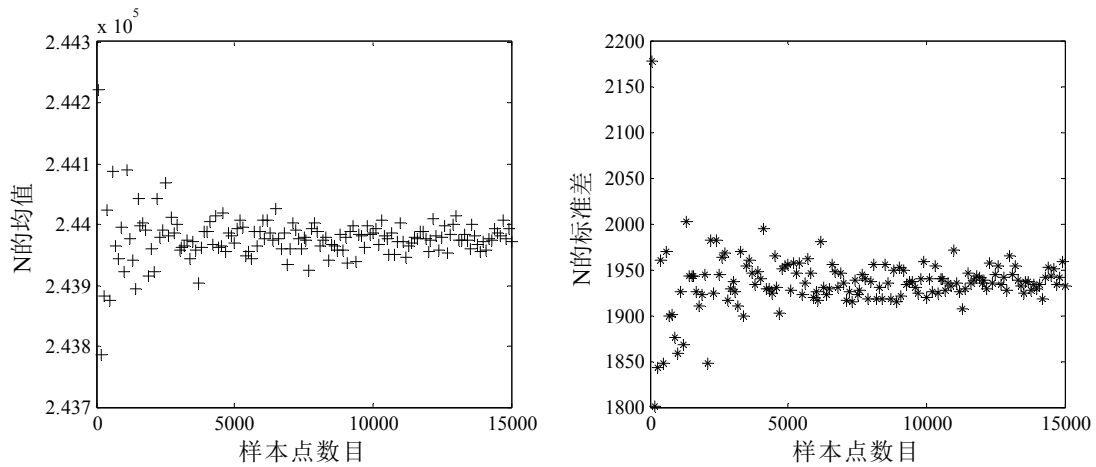


图 4.1 MC 法正态分布参数假定下 N 的均值和标准差随样本数目的变化

(2) 剩余疲劳寿命统计特征

为便于与 GPC 法进行比较，对 m 进行 10000 次随机采样。基于 MC 法的 N 和 $\lg N$ 的频数统计分布分别如图 4.2(a)和 4.2(b)所示。图中给出了与 N 和 $\lg N$ 具有相同均值和标准差的正态分布的频数曲线，可以看出， N 和 $\lg N$ 的统计分布十分类似正态分布曲线。 N 的均值为 243939，标准差为 1939.92，取值区间为 $[239254, 250997]$ 。 $\lg N$ 的均值为 5.3873，标准差为 0.0035，取值区间为 $[5.3789, 5.3997]$ 。具有 95%可靠度的剩余疲劳寿命 N 为 241006，略高于 GPC 法的计算结果。

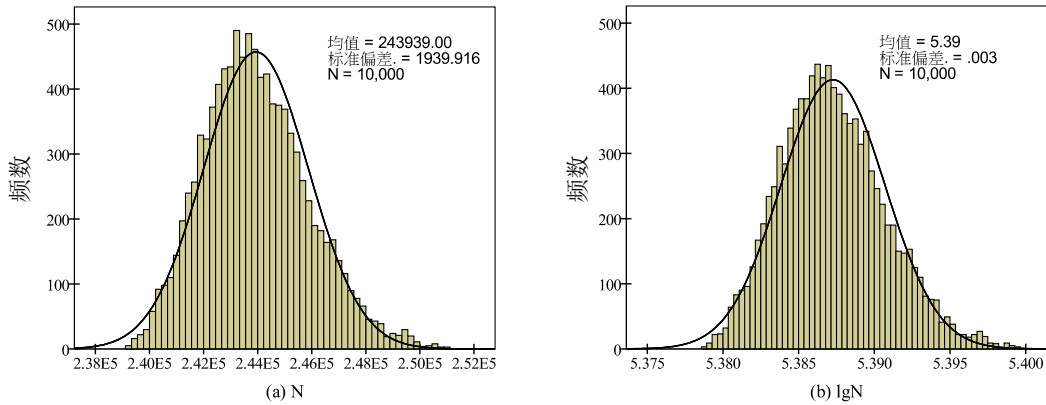


图 4.2 MC 法正态分布参数假定下 N 和 $\lg N$ 的频数统计分布

与正态分布参数假定下 GPC 法的计算保持一致，这里对 N 的四种可能分布类型进行检验：均匀分布、正态分布、两参数对数正态分布和三参数对数正态分布。其中，三参数对数正态分布的概率密度函数的形式如公式 (3.34) 所示。

(3) K-S 检验剩余疲劳寿命分布类型

本文选用 Kolmogorov-Smirnov (K-S) 检验方法评估 MC 法随机采样 10000 次的剩余疲劳寿命 N 的分布类型。K-S 检验的结果如表 4.1 所示。从表中可以看出， N 不服从均匀分布、正态分布和两参数对数正态分布， N 与三参数对数正态分布的吻合程度较高。这一结论与 GPC 法的分析是一致的。图 4.3 给出了正态分布参数假定下 MC 法计算的 N 的概率统计与相应三参数对数正态分布的比较，可以发现，两者的差异非常小。图中，三参数对数正态分布的概率密度函数的形式见公式 (3.36)。

表 4.1 MC 法正态分布参数假定下 N 的分布类型检验结果

分布类型	参数估计	K-S 检验量 D	K-S 检验量临界值 $D(10000,0.05)$	显著性水平	结果
均匀分布	$a=239254$ $b=250997$	0.282	0.0136	0	不服从
正态分布	$\bar{X} = 243939.0$ $S=1939.916$	0.033	0.0136	0	不服从
两参数对数正态分布	$\bar{X} = 5.3873$ $S=0.00345$	0.032	0.0136	0	不服从
三参数对数正态分布	$N_0=231800$ $\bar{X} = 4.0787$ $S=0.0692$	0.006	0.0136	0.848	服从

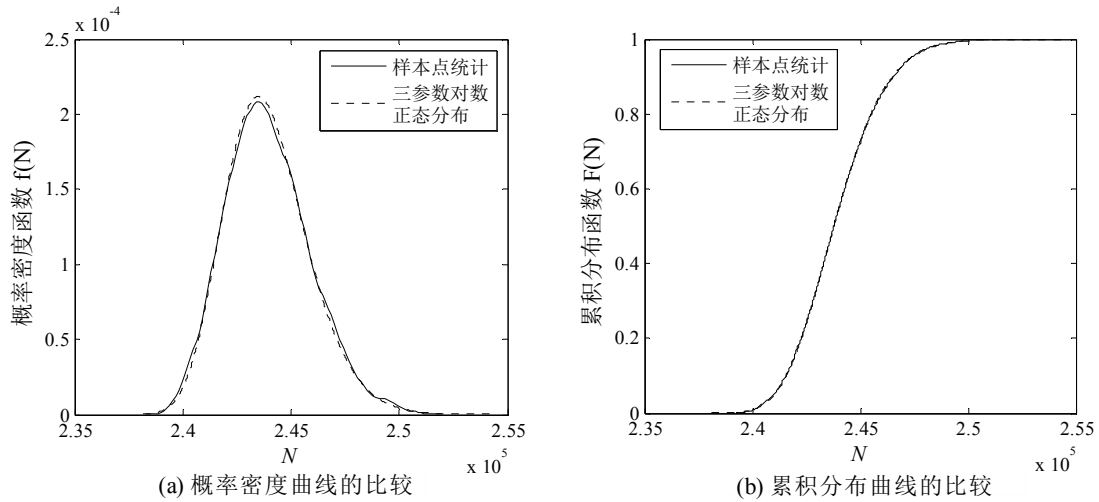


图 4.3 MC 法正态分布参数假定下 N 的概率统计与三参数对数正态分布的比较

4.2.2 与 GPC 法比较

Monte Carlo 法 (MC 法) 与 GPC 法同属于强收敛的范畴, 两者均需计算样本点上确定性的系统输出量, 故从这一角度分析, MC 法与 GPC 均属于配点法的范畴。本文将从计算效率和计算精度两方面, 比较 MC 法与 GPC 法在金属板疲劳损伤预后不确定性分析中的异同。

(1) 计算效率的比较

MC 法直接基于金属板疲劳裂纹扩展的不确定性模型 (3.32), 依据材料参数 $\lg C$ 和 m 的分布类型, 随机采样获取剩余疲劳寿命 N 的概率特征; 而 GPC 法在后处理中基于构建代理多项式 $N_6(\boldsymbol{\omega})$, 考虑 $\lg C$ 和 m 的随机性, 计算 N 的概率特征。因裂纹扩展模型具有很强的非线性, 在样本数目相同的情况下, 基于代理多项式 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 的计算效率必将高于基于非线性模型 (3.32) 的求解效率。这一结论已在章节 3.4.2 中进行了说明, 基于裂纹扩展不确定性模型 (3.32) 计算 10000 次的时间为 9.1769s, 而基于 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 计算 10000 次的时间为 3.246s, 计算效率约提高了 3 倍。GPC 法构建 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 时仅需求解 321 次非线性模型 (3.32), 计算时间 0.216s, 相比 10000 次采样的计算时间可忽略不计。

(2) 计算精度的比较

正态分布参数假定下 MC 法与 GPC 法的计算结果如表 4.2 所示。对于剩余疲劳寿命 N 的分布类型, MC 法与 GPC 法的基本结论均为 N 服从三参数对数正态分布。 N 的均值 \bar{X} 存在关系: MC 法的值 > GPC 法的值; 标准差 S 满足: MC 法的值 < GPC 法的值。GPC 法与 MC 法计算的 \bar{X} 的相对差异不超过 4.5×10^{-5} , S 的相对差异不超过 4.6%。 N 的取值区间满足: GPC 法的数值包含 MC 法的数值, 区间边界的相对差异不超过 8.35×10^{-5} 。对于具有 95% 可靠度的 N 值, GPC 法计

算结果略低于 MC 法的数值，相对差异不超过 8.30×10^{-5} 。

表 4.2 正态分布参数假定下 MC 法与 GPC 法计算的 N 的比较

数值计算方法	N 的分布类型	参数估计	N 的均值	N 的标准差	N 的取值区间	95%可靠度的 N
MC 法	三参数对数正态分布	$N_0 = 231800$ $\bar{X} = 4.0787$ $S = 0.0692$	243939	1939.92	[239254, 250997]	241006
GPC 法	三参数对数正态分布	$N_0 = 230410$ $\bar{X} = 4.1266$ $S = 0.0624$	243933	1948.92	[239234, 251005]	240968

为更直观的比较正态分布参数假定下 MC 法与 GPC 法计算的剩余疲劳寿命 N 的数值，图 4.4(a)和 4.4(b)分别给出了两种数值计算方法的 N 的概率密度曲线和累积分布曲线的比较。可以看出，MC 法计算的 N 的概率密度曲线和累积分布曲线与 GPC 法的计算结果非常吻合。

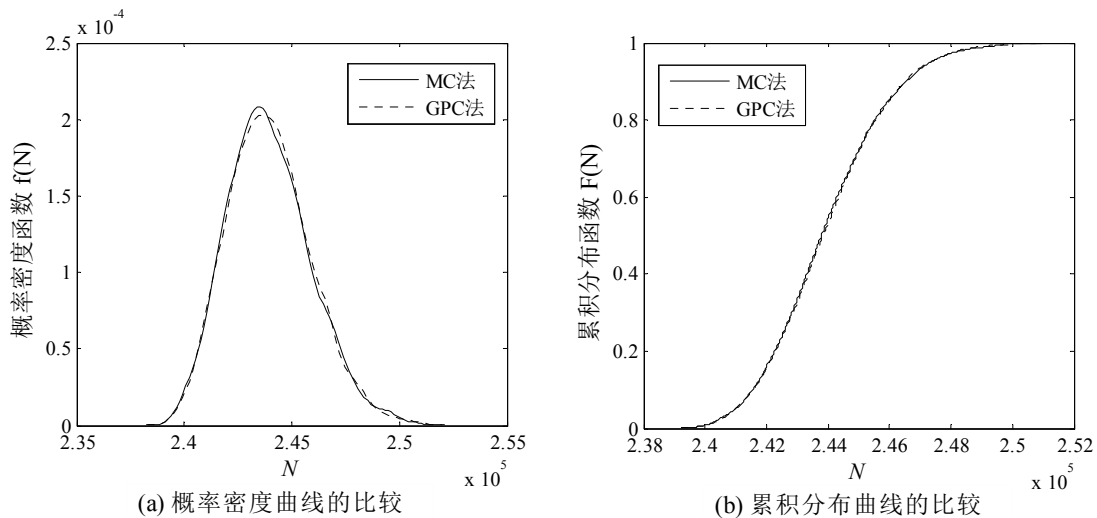


图 4.4 正态分布参数假定下 MC 法与 GPC 计算的 N 的概率特征比较

综上所述可知，GPC 法计算的 N 的概率特征与 MC 法的计算结果基本一致，最大相对差异不超过 4.6%（标准差之间的差异）。造成 GPC 法与 MC 法计算结果之间细微差异的根本原因是代理多项式 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 与精确表达式 $N(\boldsymbol{\omega})$ 之间的拟合误差。章节 3.4.2 中曾说明 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 与 $N(\boldsymbol{\omega})$ 之间的相对累积误差 err_s 的数量级在 -7 左右。由此可见，该差异对 N 的概率统计的影响在可接受的范围内，故 GPC 法选择 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 作为代理多项式是合理的。

4.3 基于随机 Galerkin 法的损伤预后不确定性分析

GPC-随机配点法 (GPC 法) 与随机 Galerkin 法 (SG 法) 都属于多项式展开方法, 但不同的是随机 Galerkin 法利用正交多项式作为展开基底, 具体的计算方法与 GPC 法有很大的差别, 是一种弱收敛方法。

随机 Galerkin 法的计算精度受正交多项式基底类型的影响较大。因此, 随机 Galerkin 法在求解之前需明确随机变量的分布类型和随机变量之间的相关性。随机变量的分布类型决定正交基底的类型。在无法给出不确定性变量的精确分布时, 随机 Galerkin 法需分别求解所有随机变量可能分布分布类型下的展开式。随机变量之间的相关性决定展开多项式的维数。例如, 两个完全线性相关的随机变量, 随机 Galerkin 可选用只含其中一个随机变量的正交多项式作为展开基底。

本文研究的金属板疲劳损伤预后问题, 考虑 Paris 公式中的材料参数 $\lg C$ 和 m 为随机变量。研究发现 $\lg C$ 与 m 之间具有较强的线性相关性, 如公式 (3.25), 从而剩余疲劳寿命 $N(\boldsymbol{\omega})$ 可简记为 $N(m)$, 于是基于随机 Galerkin 法的 $N(m)$ 的正交多项式展开式可简写为 $N_k(m)$, 其具体形式如下:

$$N_k(m) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \psi_i(m). \quad (4.1)$$

其中, α_i 为展开系数, $\psi_i(m)$ 为随机参数 m 的正交多项式。记 m 的概率密度函数为 $\rho(m)$, 取值范围为 I_m 。在公式 (4.1) 的两边对 m 进行加权 $\rho(m)$ 积分, 可迅速得到 $N(m)$ 的均值 μ 为:

$$\mu = \sum_{i=0}^k \int_{I_m} \alpha_i \psi_i(m) \cdot \rho(m) dm = \alpha_0 (\psi_0, \psi_0). \quad (4.2)$$

一般, 正交多项式的初始项 $\psi_0 = 1$, 内积 $(\psi_0, \psi_0) = 1$, 则均值 μ 即为正交多项式展开式的常数项 α_0 。接着, 在公式 (4.1) 进行求方差运算可得 $N(m)$ 的方差 σ^2 为:

$$\sigma^2 = \int_{I_m} \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i \psi_i(m) \right)^2 \rho(m) dm - \mu^2 = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 (\psi_i, \psi_i). \quad (4.3)$$

式中, (ψ_i, ψ_i) 为正交多项式基底 $\psi_i(m)$ 的带权内积, 与具体的不确定性系统的数学模型无关。因此, 随机 Galerkin 法在求得多项式展开系数 α_i 后可以非常快捷的得到剩余疲劳寿命 $N(m)$ 的均值 μ 和标准差 σ 。

下面将利用随机 Galerkin 法具体计算材料参数 $\lg C$ 和 m 服从正态分布时的金属板剩余疲劳寿命 $N(m)$ 的概率特征, 并与第三章中 GPC 法的计算结果进行比较。

4.3.1 正态分布参数假定

与前文保持一致, 假定 $m \sim N(2.88, 0.1189^2)$, 则 $I_m = [-\infty, \infty]$ 。随机 Galerkin 法在求解之前需确定正交展开基底, 此处应选择 Hermite 多项式作为正交基底。

(1) Hermite 多项式

记 $z \sim N(0,1)$ 为标准正态随机变量, 取值区间为 $(-\infty, +\infty)$, 与之对应的正交多项式——Hermite 多项式, 其正交性体现在:

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z) H_n(z) H_m(z) dz = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ n!, & m = n, \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{N}^0. \quad (4.4)$$

其中, $\rho(z)$ 为 z 的概率密度函数, 表达式如下:

$$\rho(z) = e^{-z^2/2} / \sqrt{2\pi}. \quad (4.5)$$

Hermite 多项式具有如下递推关系:

$$H_{n+1}(z) = zH_n(z) - nH_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

其中 $H_0(z) = 1$, $H_1(z) = z$ 。

(2) 随机 Galerkin 法的多项式展开式

与 GPC-随机配点法的计算类似, 在求解之前需将参数 m 变换为标准正态随机变量 z , 变换公式为:

$$m = 0.1189z + 2.88. \quad (4.7)$$

上文提到的公式 (4.2) 和公式 (4.3) 对随机变量 z 依然成立。此时, 求得的剩余疲劳寿命为 $N_k(z)$, 将 $N_k(z)$ 中的 z 逆变换为 m 即可得到 $N_k(m)$ 。

接着, 研究随机 Galerkin 法 (SG 法) 的收敛效率, 以确定最优的展开多项式 $N_k(z)$ 。SG 法的计算耗时 t 和展开系数 α_k 随展开系数 k 的变化分别如图 4.5(a) 和 4.5(b) 所示。图中, 当 $k \leq 6$ 时, 计算耗时满足 $t < 2.87s$, 此后增长较快; 当 $k \geq 6$ 时, 展开系数 α_k 取值的数量级在 -5 以下。

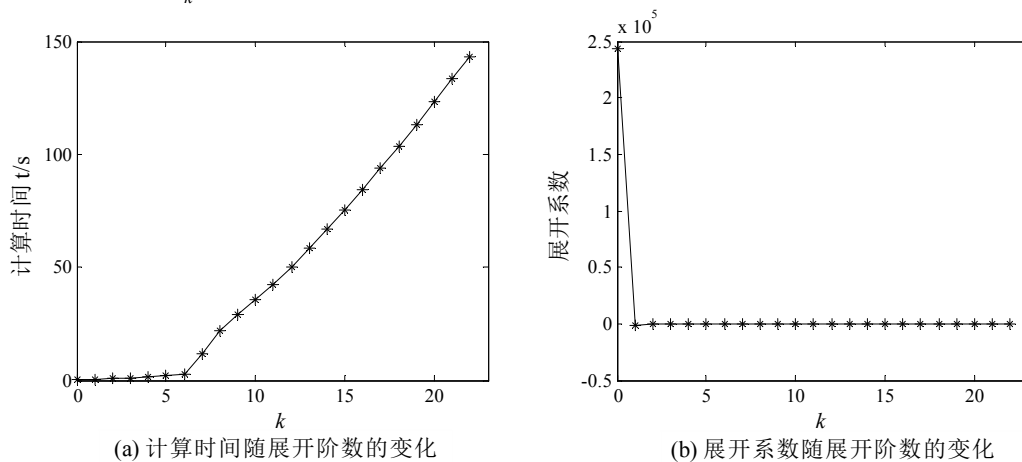


图 4.5 SG 法正态分布参数假定下计算耗时 t 和展开系数 α_k 随 k 的变化

此外，SG 法基于公式 (4.2) 和 (4.3) 计算的剩余疲劳寿命 N 的均值 μ 和标准差 σ 随 k 的变化分别如图 4.6(a)和 4.6(b)所示。 N 的均值 $\mu=243981.6$ ，不受展开阶数 k 的影响；标准差 σ 在 $k \geq 3$ 时取值保持恒定，为 1963.051。

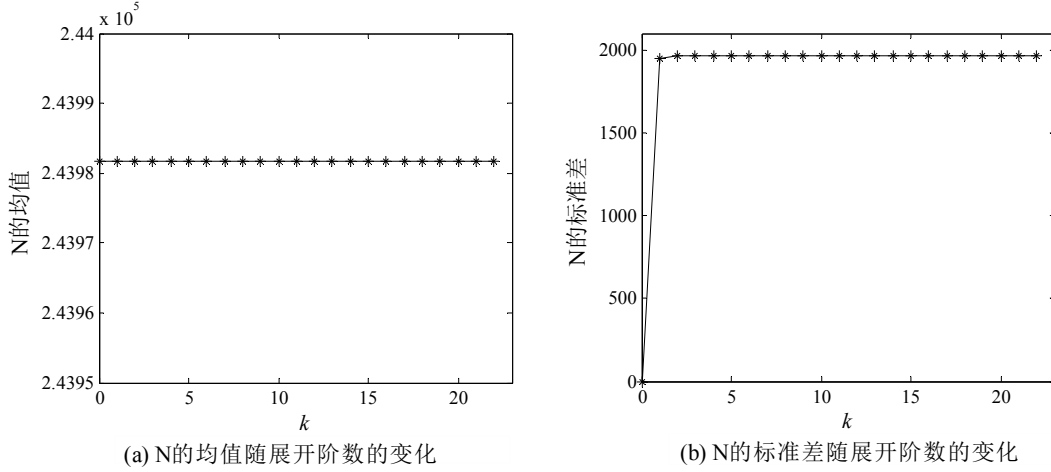


图 4.6 SG 法正态分布参数假定下 N 的均值和标准差随 k 的变化

综合考虑计算效率与计算精度的影响，本文选取 $k=6$ 时的 $N_6(z)$ 作为剩余疲劳寿命 $N(m)$ 基于 SG 法的正交多项式展开式，将 $N_6(z)$ 变换为 $N_6(m)$ 得：

$$N_6(m) = 433399 - 147122m + 44970m^2 - 8382.2m^3 + 1129.2m^4 - 92.677m^5 + 3.607m^6. \quad (4.8)$$

$N_6(m)$ 在 m 的量化区间 $[2.52, 3.24]$ 上的取值如图 4.7 所示，与图中考虑了 $\lg C$ 和 m 线性相关后的精确解 $N(m)$ 的取值比较，两条曲线基本重合在一起，两者的误差几乎为零。由此说明，正态分布参数假定下 SG 法的正交多项式展开式 $N_6(m)$ 具有很高的近似程度。

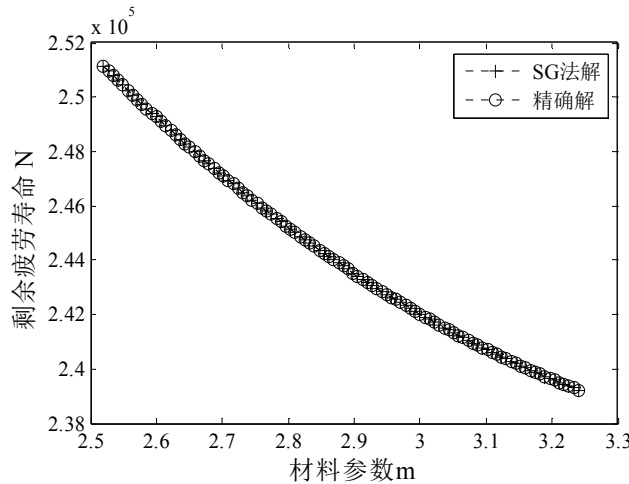


图 4.7 SG 法正态分布参数假定下 $N_6(m)$ 与 $N(m)$ 在 $m \in [2.52, 3.24]$ 上的取值

(3) 基于随机 Galerkin 法的剩余疲劳寿命 N 的概率特征

SG 法的正交多项式展开式 $N_6(m)$ 基于公式 (4.2) 和 (4.3) 计算的均值和标准差分别为: $\mu=243981.6$, $\sigma=1963.051$, 与表 4.2 中 MC 法和 GPC 法的结果比较, 数值均偏大。此时, SG 法的积分的区间为 $I_m = [-\infty, \infty]$ 。考虑到 $\lg C$ 和 m 均为材料的属性, 故其值必为某个有限区间。为便于与 GPC 法比较, 取 m 的取值区间为量化区间 $[2.52, 3.24]$ 。在该区间内利用 Monte Carlo 法随机采样, 重新计算基于 SG 法的剩余疲劳寿命 N 的概率特征。

基于正交多项式展开式 $N_6(m)$, 随机采样 10000 次的 N 和 $\lg N$ 的频数统计分布分别如图 4.8(a) 和 4.8(b) 所示。 N 的均值为 243987, 标准差为 1943.93, 取值范围为 $[239228, 251113]$; $\lg N$ 的均值为 5.39, 标准差为 0.0035, 取值范围为 $[5.3788, 5.3999]$ 。具有 95% 可靠度的剩余疲劳寿命 N 的值为 241025, 略大于 MC 法和 GPC 法的计算结果。

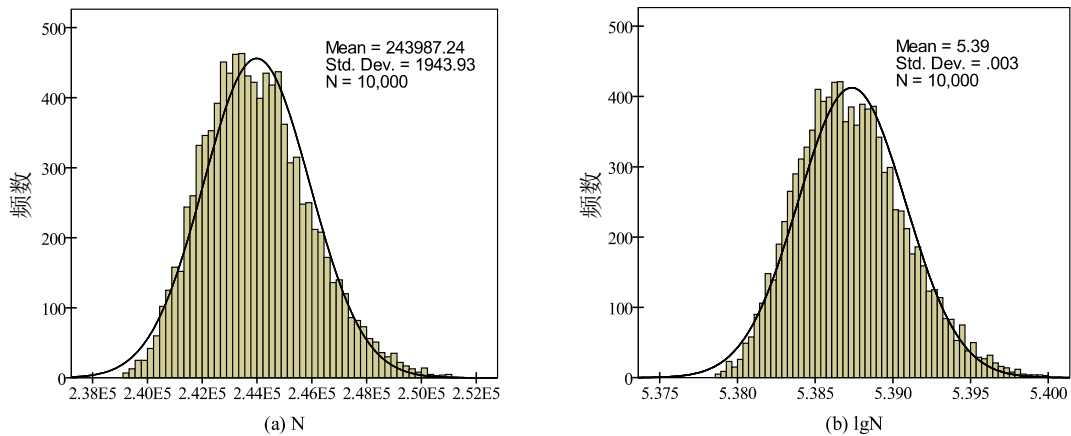


图 4.8 SG 法正态分布参数假定下 N 和 $\lg N$ 的频数统计分布

图 4.8 给出了与 N 和 $\lg N$ 对应的正态分布的频数统计曲线, 从图中可以看到, N 和 $\lg N$ 的分布与正态分布十分接近。与前文的分析相同, 这里将检验剩余疲劳寿命 N 的四种可能分布: 均匀分布、正态分布、两参数对数正态分布和三参数对数正态分布。其中三参数对数正态分布的概率密度函数的表达如公式 (3.34) 所示。

本文利用 K-S 检验评估剩余疲劳寿命 N 的分布类型, 检验发现 N 不服从均匀分布、正态分布和两参数对数正态分布, N 服从三参数对数正态分布, 具体的检验结果如表 4.3 所示。 N 与相应三参数对数正态分布的概率密度曲线和累积分布曲线分别如图 4.9(a) 和 4.9(b) 所示, 两者吻合得较好。图中, 三参数对数正态分布的概率密度函数的形式如公式 (3.36) 所示。

表 4.3 SG 法正态分布参数假定下 N 的分布类型检验

分布类型	参数估计	K-S 检验量 D	K-S 检验量临界值 $D(10000,0.05)$	显著性水平	结果
均匀分布	$a=239228$ $b=251113$	0.282	0.0136	0	不服从
正态分布	$\bar{X}=243987.2$ $S=1943.930$	0.035	0.0136	0	不服从
两参数对数正态分布	$\bar{X}=5.3874$ $S=0.00345$	0.033	0.0136	0	不服从
三参数对数正态分布	$N_0=230550$ $\bar{X}=4.1238$ $S=0.0649$	0.008	0.0136	0.545	服从

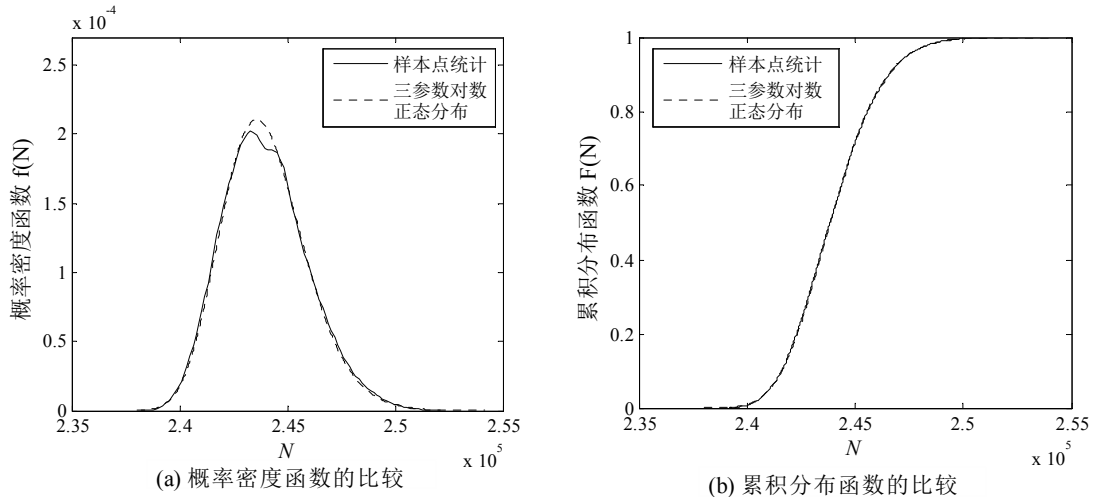


图 4.9 SG 法正态分布参数假定下 N 的概率统计与三参数对数正态分布的比较

4.3.2 与 GPC 法比较

随机 Galerkin 法 (SG 法) 与 GPC-随机配点法 (GPC 法) 均属于多项式展开方法, 但 SG 法从理论上分析属于弱收敛方法。本文将从计算效率和计算精度两方面比较 SG 法与 GPC 法在金属板疲劳损伤预后中的异同。

(1) 计算效率的比较

SG 法正交多项式基底的类型与随机变量的分布类型存在一一对应关系。正态分布参数假定下, SG 法选用 Hermite 多项式作为展开基底, 构造的剩余疲劳寿命 $N(m)$ 的正交多项式展开式 $N_6(m)$ 如公式 (4.8) 所示。与 SG 法不同, GPC 在构造多项式展开式 $N_6(\omega)$ 时, 仅需给出不确定性变量 $\lg C$ 和 m 的量化区间, 因 $\lg C$ 和 m 的量化区间综合考虑了参数的各种可能分布类型, 故 $N_6(\omega)$ 具有普适性。

正态分布参数假定下 SG 法与 GPC 法的计算效率如表 4.4 所示。从表中可以

看出,在构造多项式展开式的过程中, GPC法的计算效率高于SG法,而在基于多项式展开式进行大量抽样求解的过程(简称后处理过程)中,SG法的计算效率明显高于GPC法。这是因为,在构造多项式展开式时, GPC法是基于插值技术,而SG法基于积分技术,通常对于数值计算软件 Matlab,插值运算的效率将远远高于积分运算的效率。后处理过程中,SG法的正交多项式展开式 $N_6(m)$ 仅有7项,而GPC法的 $N_6(\boldsymbol{\varpi})$ 利用了321个配置点,应有321项,故SG法的计算效率远高于GPC法。

此外,SG法在构造正交多项式展开时考虑了 $\lg C$ 和 m 的相关性,因而 $N_6(m)$ 仅含有一个随机变量 m 。GPC法在构造代理多项式时将 $\lg C$ 和 m 作为两个不确定性变量处理,而在后处理中考虑不确定性变量之间的相关性,故 $N_6(\boldsymbol{\varpi})$ 含有两个未知数。表4.4实为单维SG法与两维GPC法的比较,表中SG法计算的总时间低于GPC法,由此说明,单维SG法的计算效率高于两维GPC法的计算效率。

表4.4 正态分布参数假定下SG法与GPC法的计算效率比较#

数值计算方法	多项式展开式	构造多项式的时间	输出10000次的 时间	总时间
SG法	$N_6(m)$	2.87s	0.066s	2.936s
GPC法	$N_6(\boldsymbol{\varpi})$	0.216s	3.246s	3.462s

(2) 计算精度的比较

SG法和GPC法同属于多项式展开方法,不同的是SG法为弱收敛方法,而GPC法为强收敛方法。为便于比较两者在金属板疲劳损伤预后分析中的计算结果,本文引入计算精度较高的Monte Carlo法(MC法)的计算结果作为参照。

正态分布参数假定下SG、GPC法和MC法计算的剩余疲劳寿命 N 的概率特征值如表4.5所示。 N 的分布类型比较:SG法、GPC法和MC法均得出 N 服从三参数对数正态分布; N 的均值 \bar{X} 比较:GPC法<MC法<SG法; N 的标准差 S 的比较:MC法<SG法<GPC法; N 的取值范围的比较:MC法 \subset GPC法 \subset SG法;具有95%可靠度的 N 值($N_{95\%}$)的比较:GPC法<MC法<SG法。

为便于直观地比较SG法、GPC法与MC法计算的剩余疲劳寿命值,图4.10(a)和4.10(b)分别给出了正态分布参数假定下三种数值方法计算的 N 概率密度曲线和累积分布曲线。从图中可以看出,三者计算的累积分布曲线基本重合在一起,但SG法计算的概率密度曲线较GPC法和MC法略有差异。由此说明,正态分布参数假定下,GPC法的计算结果较SG法更接近MC法的数值,原因在于SG法构建 $N_6(m)$ 时的区间 $[-\infty, +\infty]$ 与其后处理中的采样区间 $[2.54, 3.24]$ 不一致。

表 4.5 正态分布参数假定下 SG 法、GPC 法与 MC 法计算的 N 的比较

数值计算方法	N 的分布类型	参数估计	N 的均值	N 的标准差	N 的取值区间	95%可靠度的 N
SG 法	三参数对数正态分布	$N_0=230550$ $\bar{X}=4.1238$ $S=0.0649$	243987	1943.93	[239228, 251113]	241025
GPC 法	三参数对数正态分布	$N_0=230410$ $\bar{X}=4.1266$ $S=0.0624$	243933	1948.92	[239234, 251005]	240968
MC 法	三参数对数正态分布	$N_0=231800$ $\bar{X}=4.0787$ $S=0.0692$	243939	1939.92	[239254, 250997]	241006

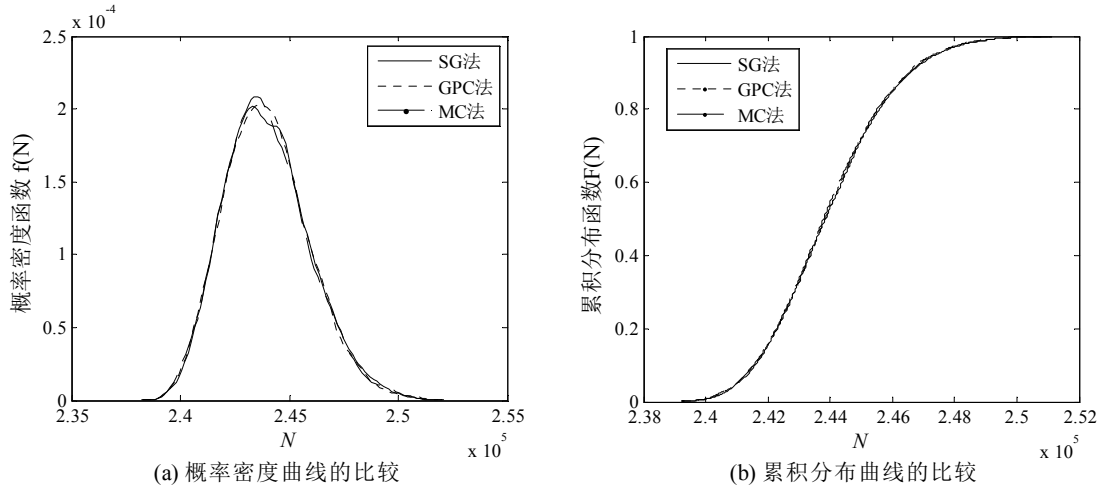


图 4.10 正态分布参数假定下 SG 法、GPC 法与 MC 法计算的 N 的概率特征比较

综合上述分析，在金属板疲劳损伤预后中，若以 MC 法的计算结果为参考，正态分布参数假定下两维 GPC 法的计算精度优于单维 SG 法。若将具有 95%可靠度的 N 值用于指导工程实际，则正态分布参数假定下 GPC 法的计算结果偏于安全。

(3) 两维 SG 法与 GPC 法的比较

上述 SG 法与 GPC 法在计算效率和计算精度两方面的比较，存在不合理的地方，即 SG 法的正交多项式展开式中仅含有一个随机变量 m ，较 GPC 法低一维度。事实上，SG 法与 GPC 法在计算 N 的概率分布曲线时均是基于 Monte Carlo 随机采样，因而 SG 法在构造 N 的多项式展开式时亦可如 GPC 一样，不考虑 $\lg C$ 和 m 的相关性，而在后处理中考虑 $\lg C$ 和 m 的相关性。于是，为更科学的比较 SG 法与 GPC 法的计算效率和计算精度，下面将给出 SG 法不考虑 $\lg C$ 和 m 相关性时构造的两维正交多项式展开式 $N_k^S(\boldsymbol{\omega})$ ，并在此基础上比较 SG 法与

GPC法的计算效率和计算精度。

正态分布参数假定下，SG法构造 $N_k^S(\boldsymbol{\omega})$ 的时间 t_1 和基于 $N_k^S(\boldsymbol{\omega})$ 求解10000次的时间 t_2 随展开阶数 k 的变化如图4.11(a)所示。可以看出， t_1 的数值随 k 值增加几乎呈指数形式增长； t_2 的数值较小且增长速率较为缓慢，与 t_1 相比，其数值大小可忽略不计。当 $k=10$ 时， $t_1=2597.97\text{s}$ ， t_2 仅为 0.0097s ；当 $k=16$ 时， t_1 达到了 16784.52s ， $t_2=0.038\text{s}$ 。与MC法直接求解 $N(\boldsymbol{\omega})$ 10000次的时间 9.1769s 或者GPC法基于 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 求解10000次的时间 3.462s 相比，基于两维的SG法计算10000次剩余疲劳寿命 N 的时间是十分惊人的。

此外， $N_k^S(\boldsymbol{\omega})$ 与精确表达 $N(\boldsymbol{\omega})$ 在区间 $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 上的相对累积误差 err_s 随展开阶数 k 的变化如图4.11(b)所示。其中 err_s 的表达式如公式(3.32)所示。 $N_k^S(\boldsymbol{\omega})$ 的 err_s 在 $k \geq 16$ 时基本维持在 1.47×10^{-8} 附近，低于章节3.4.2中介绍的基于GPC法的 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 的相对误差 err_s 恒定值，约为 4.87×10^{-16} 。

上述分析说明，在两维的金属板疲劳损伤预后不确定性问题中，正态分布参数假定下SG法的计算效率和计算精度将远不如GPC法。

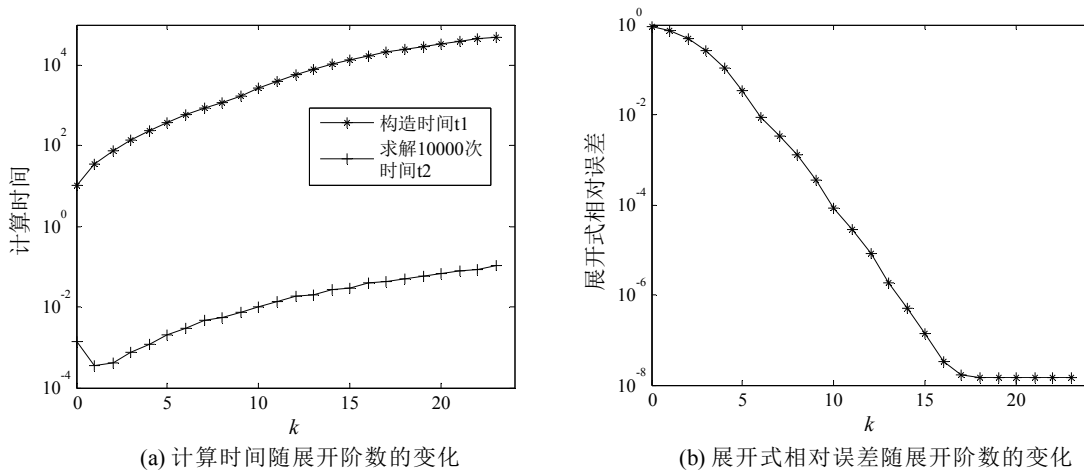


图4.11 正态分布参数假定下SG法的 $N_k^S(\boldsymbol{\omega})$ 的计算时间和相对累积误差随展开阶数的变化

4.4 本章小结

本章主要以具有中心I型裂纹的2024-T3铝合金板为研究对象，比较了当材料参数 $\lg C$ 和 m 服从正态分布时GPC-随机配点法(GPC法)与Monte Carlo法(MC法)、随机Galerkin法(SG法)在计算效率和计算精度上的不同。

(1) 分析MC法的收敛速率，得出当样本点数目大于5000时，正态分布参数假定下MC法计算的 $N(\boldsymbol{\omega})$ 的均值和标准差基本恒定。

(2) 选取MC法随机抽样10000次的结果用于分析，计算正态分布参数假

定下 $N(\boldsymbol{\omega})$ 的均值、标准差、取值范围和概率分布曲线，并利用 K-S 检验 $N(\boldsymbol{\omega})$ 的概率分布类型，得出 $N(\boldsymbol{\omega})$ 服从三参数对数正态分布 ($N_0=231800$, $\bar{X}=4.0787$, $S=0.0692$)。

(3) 与 GPC 法比较，MC 法的计算效率明显低于 GPC 法。MC 法直接求解精确解 $N(\boldsymbol{\omega})$ 10000 次的时间为 9.1769s，约为 GPC 法求解 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 相同次数的 3 倍。

(4) GPC 法的计算精度与 MC 法基本相当，均值 \bar{X} 的相对差异不超过 4.5×10^{-5} ，标准差 S 的相对差异不超过 4.6%，区间边界相对差异不超过 8.35×10^{-5} ，具有 95%可靠度的 N 值，GPC 法计算结果略低于 MC 法的数值，但相对差异不超过 8.30×10^{-5} 。

(5) 分析 SG 法的收敛效率，确定最优的正交多项式展开式用于分析。正态分布参数假定下，以 Hermite 多项式为正交基底，单维 SG 法的最优多项式展开是为 $N_6(m)$ 如公式 (4.8)。

(6) 基于单维 SG 法的最优多项式展开式 $N_6(m)$ ，后处理中随机抽样 10000 次计算 $N(m)$ 的均值、标准差、取值范围和概率分布曲线，并利用 K-S 检验 $N(m)$ 的概率分布类型，得出 $N(m)$ 服从三参数对数正态分布 ($N_0=230550$, $\bar{X}=4.1238$, $S=0.0649$)。

(7) 与两维 GPC 法比较，单维的 SG 法的计算效率略高于 GPC 法。若以 MC 法的计算结果为参考，正态分布参数假定下两维 GPC 法的计算精度优于单维 SG 法。

(8) 为更科学的比较 GPC 法与 SG 法的计算效率和计算精度，计算两维 SG 法的正交多项式展开式 $N_k^S(\boldsymbol{\omega})$ ，研究发现两维 SG 法的计算效率非常低，比 MC 法更耗时，且 $N_k^S(\boldsymbol{\omega})$ 与 $N(\boldsymbol{\omega})$ 之间的近似程度远低于 GPC 法中的 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 。

第五章 结论与展望

5.1 结论

土木工程领域中的疲劳损伤预后问题受材料、施工过程和服役环境等众多不确定性因素的影响，其预测的结果往往具有很强的离散性。考虑实验条件下得到的构件的材料参数并不足以真实地反映材料的不确定性，故本文提出基于 GPC 法分析材料参数分布类型不确定时的疲劳损伤预后问题，与实验结果对比确定最佳的材料参数分布类型。

本文基于断裂力学原理，拟合分析了 Virkler 疲劳裂纹扩展实验的 68 组实验数据，并最终确定 55 组有效数据用于分析，考虑材料参数 $\lg C$ 和 m 为不确定性变量 $\boldsymbol{\omega}$ ，提出了基于 Paris 公式的 2024-T3 铝合金板的疲劳损伤预后不确定性模型如公式 (3.28)，利用 GPC-随机配点法分析了 $\boldsymbol{\omega}$ 分别服从正态分布和均匀分布时金属板剩余疲劳寿命 $N(\boldsymbol{\omega})$ 的概率特征，与实验数值对比，验证 GPC 法的有效性并确定 $\boldsymbol{\omega}$ 的最佳分布类型；最后对比 GPC 法与 Monte Carlo 法(经典采样方法)和随机 Galerkin 法(非采样法)的计算结果，分析这三种不确定性数值计算方法在金属板疲劳损伤预后不确定性分析中的特点，主要得出以下结论：

(1) 2024-T3 铝合金板的 Paris 材料参数 $\lg C$ 和 m 的线性关系显著，相关系数 $\gamma = -0.9983$ 。

(2) GPC 法计算得出，正态分布参数假定下 $N(\boldsymbol{\omega})$ 服从三参数对数正态分布 ($N_0=230410$, $\bar{X} = 4.1266$, $S=0.0624$)，与实验结果吻合，而均匀分布参数假定下 $N(\boldsymbol{\omega})$ 服从三参数对数均匀分布 ($N_0=231100$, $a= 3.9833$, $b= 4.2373$)，与实验结果明显不符。Shapiro-Wilk 检验进一步证明 $\lg C$ 和 m 服从正态分布，故得出材料参数 $\lg C$ 和 m 的最佳分布类型为正态分布。

(3) GPC 法构建的代理多项式 $N_6(\boldsymbol{\omega})$ 在计算精度上基本与 Monte Carlo 法相当，两者计算的 $N(\boldsymbol{\omega})$ 的概率特征值相对误差不超过 4.6%。但 GPC 法的计算效率明显优于 Monte Carlo 法，GPC 法求解 10000 次 $N_6(\boldsymbol{\omega}^j)$ 的时间约为 MC 法的三分之一。

(4) 随机 Galerkin 法在处理单维随机问题时具有很高的计算效率。但随机 Galerkin 法在处理二维随机问题时，其计算效率将大大下降，明显低于 Monte Carlo 法和 GPC 法，且计算精度远不如 GPC 法。

5.2 进一步的研究工作

损伤预后是一个综合复杂的系统工程, 本文所做的研究只是其中很小的一部分, 后续仍有许多工作可以进行:

(1) 本文仅进行了常幅疲劳荷载作用下金属板的疲劳损伤预后分析, 事实上, 土木工程结构所受的荷载大都为变幅荷载, 故研究变幅荷载下的疲劳损伤问题是十分必要的。

(2) 本文仅考虑材料参数的不确定性, 而工程中还存在很多其他不确定性因素, 因而综合考虑各种不确定性因素对疲劳损伤预后值的影响更符合工程实际。

(3) Paris 公式是最简单的用于描述金属材料疲劳裂纹扩展过程的公式, 该公式未考虑荷载比、裂纹扩展门槛值等因素的影响, 因此, 深入研究不同裂纹扩展模型对预测结果的影响, 为日后在实际工程预测中选择最佳的损伤预后模型提供必要的理论依据。

(4) 金属板构件是土木工程结构的基本构件之一, 在此基础上研究更为复杂构件的疲劳损伤预后问题是未来损伤预后发展的必经之路。

致谢

时光荏苒，短暂而充实的研究生生活转瞬即逝，回眸往昔，我感慨良多。三年时间，我孜孜以求，在浩瀚的知识海洋中不懈探索，向老师问道而求解惑，与同门探讨以共进步。诸位良师益友给予我帮助，不厌其烦的解答我的疑惑，为我今天作成此文奠定了坚实的基础。不仅如此，这段在同济生活的日子，也将成为我人生中一段重要而难忘的经历，为我美好的未来增添浓墨重彩的一笔。

本文得以完成，首先要感谢的是我的导师薛松涛教授以及副导师唐和生研究员。薛老师和蔼可亲，平易近人，举止中透漏出谦逊，言语间充满了智慧，虽在谈笑风生，却不失育人之理。在学术上，薛老师亦师亦友，不仅以老师的身份传道授业解惑，更以朋友的身份与学生探讨学术问题，机智幽默的话语往往能够激发学生对问题深入探索的兴趣。薛老师对于学术研究有着一丝不苟的态度，释疑解惑条分缕析，引经据典理据分明。正是这种治学严谨的态度，令老师享誉海内外，桃李满天下。唐和生老师年轻有为，思维活跃，视野开阔，知识渊博，工作勤奋，时刻关注学子的研究进展，对于学生的指导更是毫无保留。而本文从论文选题到研究方法的选择以及最后的修改定稿都是在副导师唐和生老师的悉心指导下完成的，同时我也从唐老师那里学到了很多宝贵的研究思路与方法。我对您的耐心指导和无私的帮助表示由衷的感谢。

此外，研究室的谢丽宇老师在我的研究生学习阶段也给予了我很大的鼓励和帮助，并且在生活上对我们都很关心和照顾。

感谢我的同门姚雯和李晶晶，感谢她们在日常生活、学习中给予我的帮助；感谢博士后师姐张毅捷，她对学术的虔诚、积极向上的人生态度都无时无刻在激励着我；感谢博士生苏瑜师姐、荀扬师兄、赵金海师兄和李大伟师弟；还要感谢研二的陈微师妹、牟晓彤师妹、王航航师弟和宋琛琛师弟以及远在台湾的周育纬师弟，研一的王兵师弟和梅加河师弟，与你们相处我很开心，感谢你们为整个研究室创造了团结、活泼、快乐的氛围。

还要感谢男朋友侯旭先生，感谢他陪伴我七年，在我遇到挫折的时候鼓励我，心情低谷的时候开导我，以及对我在生活上无微不至的关怀和贴心的照顾。

最后，要感谢我的父母，谢谢他们的养育之恩，辛苦工作的父母，永远都是我努力学习的动力和精神支柱，希望他们能身体健康、开心幸福。还有我的哥哥，谢永旭，浙大的研究生，感谢他对我的关心和鼓励。

谢丽君
2014年4月

参考文献

- [1] 工程科学和技术综合专题组. 2020 年中国工程科学和技术发展研究. 北京: 2020 年中国工程科学和技术发展研究暨科学家讨论会, 2004.
- [2] Inman D J, Farrar C R, Lopes JR V, et al. Damage prognosis. Wiley Online Library, 2005.
- [3] Farrar C R, Lieven N A. Damage prognosis: the future of structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2007, 365(1851): 623~632.
- [4] 张志奇, 李华刚, 谭登祥. 土木工程结构损伤诊断方法. *土木建筑教育改革理论与实践*, 2009, 11: 72~75
- [5] 李兆霞. 大型土木结构多尺度损伤预后的现状, 研究思路与前景. *东南大学学报: 自然科学版*, 2013, 43(5): 1111~1121.
- [6] 高谦, 吴顺川, 万林海等. 土木工程可靠性理论及其应用. 北京: 中国建材工业出版社, 2007.
- [7] Housner G W, Bergman L A, Caughey, et al. Structural control: past, present, and future. *Journal of engineering mechanics*, 1997, 123(9): 897~971.
- [8] Mares C, Surace C. An application of genetic algorithms to identify damage in elastic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 195(2): 195~215.
- [9] Adams D E. Nonlinear damage models for diagnosis and prognosis in structural dynamic systems. in *AeroSense, International Society for Optics and Photonics*, 2002: 180~191.
- [10] Adams D E, Nataraju M. A nonlinear dynamical systems framework for structural diagnosis and prognosis. *International Journal of Engineering Science*, 2002, 40(17): 1919~1941.
- [11] Ling Y, Mahadevan S. Integration of structural health monitoring and fatigue damage prognosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, 28: 89~104.
- [12] Zhao F, Tian Z, Zeng Y. A stochastic collocation approach for efficient integrated gear health prognosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013, 39(1): 372~387.
- [13] Farrar C R. Damage prognosis: current status and future needs. Los Alamos National Laboratory, 2003.
- [14] Lynch J P, Parra-montesinos G, Canbolat B A, et al. Real-time damage prognosis of high-performance fiber reinforced cementitious composite structures. *Proceedings of Advances in Structural Engineering and Mechanics (ASEM 2004)*, Seoul, Korea, 2004,
- [15] Morgan M G, Small M. Uncertainty: a guide to dealing with uncertainty in quantitative risk and policy analysis. Cambridge University Press, 1992.
- [16] Cullen A C, Frey H C. Probabilistic techniques in exposure assessment: a handbook for dealing with variability and uncertainty in models and inputs. Springer, 1999.
- [17] Vose D. Risk analysis: a quantitative guide. John Wiley & Sons, 2008.
- [18] Haimes Y Y. Risk modeling, assessment, and management. John Wiley & Sons, 2005.
- [19] Roy C J, Oberkampf W L. A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(25): 2131~2144.
- [20] So H, Ching P-C, Chan Y. A new algorithm for explicit adaptation of time delay. *Signal*

- Processing, IEEE Transactions on, 1994, 42(7): 1816~1820.
- [21] 李浩. 混凝土结构抗震性能的不确定性分析与研究: [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学土木工程学院, 2011.
- [22] Olshausen B A. Bayesian probability theory. The Redwood Center for Theoretical Neuroscience, Helen Wills Neuroscience Institute at the University of California at Berkeley, Berkeley, CA, 2004,
- [23] Hall J W, Blockley D I, Davis J P. Uncertain inference using interval probability theory. International Journal of Approximate Reasoning, 1998, 19(3): 247~264.
- [24] Zadeh L A. Fuzzy sets. Information and control, 1965, 8(3): 338~353.
- [25] Pawlak Z. Rough set theory and its applications to data analysis. Cybernetics & Systems, 1998, 29(7): 661~688.
- [26] 曹鸿钧, 段宝岩. 基于凸集模型的多学科耦合系统不确定性分析. 西安电子科技大学学报, 2005, 32(3): 335~338.
- [27] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. The annals of mathematical statistics, 1967: 325~339.
- [28] Shafer G. A mathematical theory of evidence. Princeton university press Princeton, 1976.
- [29] Liu G L. New research directions in singular perturbation theory: artificial parameter approach and inverse-perturbation technique. Conference of 7th modern mathematics and mechanics, Shanghai, 1997: 47~53.
- [30] He J-H. A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2000, 35(1): 37~43.
- [31] Moore R E. Interval analysis. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1966.
- [32] Hughes T J, Levit I, Winget J. An element-by-element solution algorithm for problems of structural and solid mechanics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1983, 36(2): 241~254.
- [33] Moore R E, Moore R. Methods and applications of interval analysis. SIAM, 1979.
- [34] 全宗凯, 李杰, 王寿梅等. 非线性区间迭代法在结构后屈曲分析中的应用. 航空学报, 1999, 20(6): 549~52.
- [35] 李方义, 李光耀, 郑刚. 基于区间的不确定多目标优化方法研究. 固体力学学报, 2010, 31(1): 86~93.
- [36] 王建军, 于长波, 李其汉. 工程中的随机有限元方法. 应用力学学报, 2009, 2: 297~303.
- [37] Shinozuka M, Astill C J. Random eigenvalue problems in structural analysis. AIAA Journal, 1972, 10(4): 456~462.
- [38] Cornell, C., First-order uncertainty analysis of soil deformation and stability. No. Conf Paper, 1972.
- [39] Hisada T, Nakagiri S. Role of the stochastic finite element method in structural safety and reliability. proceedings of the Proc 4th Int Conf Struct Safety and Reliability, ICOSSAR'85, 1985.
- [40] Wiener N. The homogeneous chaos. Amer J Math, 1938, 60(4): 897~936.
- [41] Ghanem R G, Spanos P D. Stochastic finite elements: a spectral approach. Springer, 1991.
- [42] 崔海涛, 温卫东. 随机有限元法及其工程应用. 南京航空航天大学学报, 2000, 32(1): 91~98.

- [43] Orszag S A, Bissonnette L. Dynamical Properties of Truncated Wiener - Hermite Expansions. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 2004, 10(12): 2603~2613.
- [44] Crow S, Canavan G. Relationship between a Wiener-Hermite expansion and an energy cascade. *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, 41(02): 387~403.
- [45] Xiu D, Karniadakis G E. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, 2003, 187(1): 137~167.
- [46] Xiu D, Hesthaven J S. High-order collocation methods for differential equations with random inputs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2005, 27(3): 1118~1139.
- [47] Witteveen J A, Sarkar S, Bijl H. Modeling physical uncertainties in dynamic stall induced fluid-structure interaction of turbine blades using arbitrary polynomial chaos. *Computers & structures*, 2007, 85(11): 866~878.
- [48] Novak E, Ritter K. High dimensional integration of smooth functions over cubes. *Numerische Mathematik*, 1996, 75(1): 79~97.
- [49] Smolyak S A. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. *proceedings of the Dokl Akad Nauk SSSR*, 1963.
- [50] Barthelmann V, Novak E, Ritter K. High dimensional polynomial interpolation on sparse grids. *Advances in Computational Mathematics*, 2000, 12(4): 273~288.
- [51] Foo J, Yosibash Z, Karniadakis G E. Stochastic simulation of riser-sections with uncertain measured pressure loads and/or uncertain material properties. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2007, 196(41): 4250~4271.
- [52] Babuška I, Nobile F, Tempone R. A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM review*, 2010, 52(2): 317~355.
- [53] Jakeman J, Eldred M, Xiu D. Numerical approach for quantification of epistemic uncertainty. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(12): 4648~4663.
- [54] 史良胜, 唐云卿, 杨金忠. 基于随机配点法的地下水污染风险评价. *水科学进展*, 2012, 23(004): 529~538.
- [55] 唐云卿, 史良胜, 杨金忠. 基于随机配点法的饱和-非饱和水流运动模拟. *四川大学学报: 工程科学版*, 2012, 44(005): 30~37.
- [56] 陈海军. 基于概率配点法的岩石破坏行为不确定性分析: [硕士学位论文]. 武汉: 武汉理工大学理学院, 2012.
- [57] Hongwei H. Simulation of stochastic processes using Karhunen-Loeve expansion: [Doctoral dissertation]. Singapore: National University of Singapore, 2003.
- [58] Huang S, Quek S, Phoon K. Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 52(9): 1029~1043.
- [59] Huybrechs D, Vandewalle S. The construction of cubature rules for multivariate highly oscillatory integrals. *Mathematics of Computation*, 2007, 76(260): 1955~1980.
- [60] Iserles A, and Nørsett S. Quadrature methods for multivariate highly oscillatory integrals using derivatives. *Mathematics of computation*, 2006, 75(255): 1233~1258.
- [61] 钟益林, 彭乐群, 刘炳文. 常微分方程及其 Maple, MATLAB 求解. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [62] Friedman A. Partial differential equations. Courier Dover Publications, 2011.

- [63] Brutman L. Lebesgue functions for polynomial interpolation-a survey. *Annals of Numerical Mathematics*, 1996, 4: 111-128.
- [64] Berrut J-P, Trefethen L N. Barycentric lagrange interpolation. *Siam Review*, 2004, 46(3): 501~517.
- [65] De Boor C, De Boor C, De Boor C, et al. *A practical guide to splines*. Springer-Verlag New York, 1978.
- [66] Virkler D, Goel P, Hillberry B. The statistical nature of fatigue crack propagation. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1979, 101(2): 148~153.
- [67] Paris P, Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of basic engineering*, 1963, 85(4): 528~533.
- [68] Gurney T R. *Fatigue of welded structures*. CUP Archive, 1979.
- [69] Tanaka S, Ichikawa M, Akita S. Variability of m and C in the fatigue crack propagation law, $da/dN=C(\Delta K)^m$. *International Journal of Fracture*, 1981, 17(5): 121-124.
- [70] Ostergaard D, Hillberry B. Characterization of the variability in fatigue crack propagation data. *Probabilistic fracture mechanics and fatigue methods: applications for structural design and maintenance*, ASTM STP, 1983, 798: 97~115.
- [71] Lin Y, Yang J. A stochastic theory of fatigue crack propagation. *AIAA journal*, 1985, 23(1): 117~124.
- [72] Ghonem H, Dore S. Experimental study of the constant-probability crack growth curves under constant amplitude loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, 27(1): 1~25.
- [73] Langley R. Stochastic models of fatigue crack growth. *Engineering fracture mechanics*, 1989, 32(1): 137~145.
- [74] Yang J, Manning S. A simple second order approximation for stochastic crack growth analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 1996, 53(5): 677~686.
- [75] Madsen H O. *Stochastic modeling of fatigue crack growth and inspection. Probabilistic methods for structural design*. Springer. 1997: 59~83.
- [76] Perrin F, Sudret B, Pendola M. Bayesian updating of mechanical models-Application in fracture mechanics. *18ème Congrès Français de Mécanique (Grenoble 2007)*, 2007.
- [77] Gobbato M, Kosmatka J B, Conte J P. A recursive bayesian approach for fatigue damage prognosis: an experimental validation at the reliability component level. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013.
- [78] Sankararaman S, Ling Y, Shantz C, et al. Uncertainty quantification in fatigue damage prognosis. in *Annual conference of the prognostics and health management society*, 2009.
- [79] 程靳, 赵树山. *断裂力学*. 北京: 科学出版社, 1980, 9~147.
- [80] 洪友士, 方飏. 疲劳短裂纹萌生及发展的细观过程和理论. *力学进展*, 1993, 23(4): 468~486.
- [81] Forman R G, Kearney V, Engle R. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. *Journal of basic Engineering*, 1967, 89(3): 459~463.
- [82] Walker K. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 aluminum. *Effects of environment and complex load history on fatigue life*, ASTM STP, 1970, 462: 1~14.
- [83] Wolf E. Fatigue crack closure under cyclic tension. *Engineering Fracture Mechanics*, 1970,

- 2(1): 37~45.
- [84] Willenborg J, Engle R, Wood H. A crack growth retardation model using an effective stress concept. Air Force Flight Dynamics Lab Wright-Patterson Afb Oh, 1971.
- [85] Wheeler O E. Spectrum loading and crack growth. *Journal of Basic Engineering*, 1972, 94(1): 181~186.
- [86] Forman R G, METTU S R. Behavior of surface and corner cracks subjected to tensile and bending loads in a Ti-6Al-4V alloy. 1992,
- [87] 周兆麟, 李毓芝. 数理统计. 北京: 中国统计出版社, 1985.
- [88] Dormand J R, Prince P J. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of computational and applied mathematics*, 1980, 6(1): 19~26.
- [89] Kotulski Z A. On efficiency of identification of a stochastic crack propagation model based on Virkler experimental data. *Archives of Mechanics- Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 1998, 50(5): 829~847.
- [90] 蔡德祺. 三参数对数正态分布的参数估计. *武汉水利电力大学学报*, 1995, 28(4): 425~428.

个人简历、在读期间发表的学术论文与研究成果

个人简历:

谢丽君, 女, 1990 年 9 月生。

2011 年 6 月毕业于中南大学工程力学专业, 获学士学位。

2011 年 9 月入同济大学攻读硕士学位。

已发表论文:

- [1] Lijun Xie, Hesheng Tang and Songtao Xue. A Stochastic Collocation Method for Uncertainty Analysis of Fatigue Damage Prognosis. *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 459, 479-484.