



同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

硕士学位论文

基于输出反馈的消能减震结构
非线性系统识别

资助项目：国家自然科学基金
(编号：51208377、51478356)

姓 名： 宋琛琛
学 号： 1232327
所在院系： 土木工程学院
学科门类： 工学
学科专业： 土木工程
指导教师： 薛松涛 教授
副指导教师： 谢丽宇 讲师

二〇一五年四月



同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

A dissertation submitted to
Tongji University in conformity with the requirements for
the degree of Master of Science

**Nonlinear system identification based
on output feedbacks**

Project Supported by the National Natural Science
Foundation of China
(Grant No: 51208377 51478356)

Candidate: Song Chenchen

Student Number: 1232327

School/Department: Civil Engineering Department

Discipline: Engineering

Major: Civil Engineering

Supervisor: Xue Songtao

Deputy Supervisor: Xie Liyu

April, 2015

基于输出反馈的消能减震结构非线性系统识别

宋琛琛

同济大学

学位论文版权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构送交论文的复印件和电子版；在不以赢利为目的的前提下，学校可以适当复制论文的部分或全部内容用于学术活动。

学位论文作者签名：

年 月 日

同济大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：

年 月

摘要

消能减震技术是目前在结构振动控制的研究和应用中较为成熟的技术。该技术通过采用新材料和新技术增加结构的附加阻尼或附加刚度,以此提高结构体系的耗能能力,减少地震对结构体系的破坏,因此被广泛应用于新建建筑和既有建筑的抗震加固及改造中。但是,在固有结构上增加消能器会使结构在尚未进入塑性阶段就呈现出一定的非线性动力特性,而传统的等效线性化方法获得的结构的动力特性会随着激励的强度的变化而发生改变,无法有效地获得固有结构的动力特性。

然而,如何获得消能减震系统固有结构部分的动力特性对系统性能损伤识别、维护加固等有重要的意义。已有非常多的识别方法可以用于识别非线性系统的动力特性,但是大多数方法难以适用于多自由度系统的非线性识别,也不能适用于复杂程度不同的非线性情况。

子空间系统辨识方法能系统输入/输出获得系统的状态空间模型,再由状态空间矩阵提取出结构的动力特性。对于线性结构体系,此方法能高效地识别出结构动力特性。但对于安装消能器的非线性结构体系,该方法获得的辨识结果是等效线性化的,并不能真实反映结构的动力特性。本文基于系统的输出反馈建立消能器力学模型,将其非线性强度系数引入到系统状态空间矩阵中,同时将消能器承担的层间剪力转化为外力作为系统输入,实现对非线性体系进行解耦的目的。最终,使其能够利用线性子空间辨识法同时识别固有结构动力特性和消能器非线性特性。

该方法的优点在于,能够只使用较小的计算量和有限的时域采样点的情况下,识别具有不同类型非线性特性的多自由度消能减震结构系统,可以同时对该系统的非线性部分和线性部分进行识别。

研究工作主要包括以下内容:

(1) 介绍消能器在结构中应用,及其对结构的非线性影响。回顾子空间法等线性系统辨识方法的研究应用现状。并对子空间系统识别方法及其适用性进行了系统地介绍。

(2) 论述基于输出反馈的子空间非线性系统识别方法,并通过达芬非线性系统和分段非线性系统对该方法的辨识效果进行了验证分析。

(3) 建立具有不同力学模型消能器的单自由度、多自由度的非线性系统数值模型,利用基于输出反馈的子空间非线性系统识别方法将消能器力学参数融合进状态空间中实现对消能减震结构的非线性系统辨识,获得固有结构动力特性和

消能器非线性特性。该方法对于粘滞型阻尼器结构和摩擦型阻尼器结构都能得到较好的辨识效果，但是速度相关型线性阻尼器结构则无法适用。

关键词：消能减震、非线性、基于输出反馈、子空间法

ABSTRACT

Energy dissipation technology in structure is a mature method in the field of structural vibration control. In order to increase the energy dissipation capacity of the structure system and reduce the seismic damage, new materials and new technology are used, and they bring the additional damping and stiffness to the structure. This technology is widely used in new construction and the reinforcement of existing buildings. Meanwhile, the use of energy dissipation device will lead nonlinear performance of the structure before plastic stage. The dynamic characteristic of the structure obtained by the equivalent linearization method will vary with the intensity of the excitation, and it can't get the dynamic characteristic of the inherent structure effectively.

However, it is meaningful to identify the dynamic characteristics of inherent structure, especially for damage detection and structure reinforcement. There are many methods which can identify the dynamic characteristic of the nonlinear system. But most of them are complicate, and unsuitable for nonlinear identification of multi-degree of freedom.

Subspace identification methods can estimate the state space mode of the system through the input and output data. Then the dynamic characteristic can be identified through the state space mode. For linear system, subspace methods can identify the system dynamic characteristic effectively. But for nonlinear system with energy dissipation device, the identification results obtained by this method are equivalent to the linear and unable to reflect the dynamic characteristics of the structure really. In this paper, a mechanical model of energy dissipation device is built based on the output of the system, and the nonlinear intensity coefficient is introduced to the system state space model. At the same time, the internal force caused by the energy dissipation device is converted into the external force acting as the input item of subspace model. Then the decoupling of the nonlinear system is realized. The method allows to estimate the coefficients of the nonlinearities and also can identify the linear dynamic characteristic of the inherent structure.

The advantage of this method can be listed as: only a small amount of calculation and the finite time points is needed. And it applies to multi degree of freedom system with different types of nonlinear characteristic, even to the some nonlinear terms

which are easy to be neglected.

The main research work includes the following content.

(1) The application of energy dissipation device in the structure is introduced, so as its influence on the structure. The review of normal system identification method is presented. Subspace system identification methods and its application are systematically introduced and analyzed.

(2) Introduce the nonlinear subspace method based on output feedback nonlinear system identification. The effect of the method is verified through the analysis of Duffing nonlinear system and Piecewise nonlinear.

(3) The numerical models of the single degree of freedom and the multi degree of freedom system with different nonlinear characteristic are established. By using subspace nonlinear system identification method, mechanics parameters of energy dissipation device are substituted into the state space to realize the nonlinear system identification, and obtain the inherent structure dynamic characteristics and damper nonlinear characteristics. This method can reach high identification effect for the viscous damper structure and friction damper structure, but the linear damper structure is not applicable.

Key Word: energy dissipation, nonlinearity, output feedback, subspace method

目录

摘要	I
ABSTRACT.....	III
第 1 章 绪言	1
1.1 研究背景及意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.2.1 消能减震结构的应用及监测	2
1.2.2 系统模型与系统辨识	4
1.2.3 子空间识别算法的特点	7
1.2.4 非线性动力系统识别理论	8
1.3 本文的研究内容及章节安排.....	8
第 2 章 线性子空间系统辨识方法	11
2.1 引言.....	11
2.2 动力系统状态空间描述.....	11
2.2.1 连续状态空间方程	12
2.2.2 离散状态空间方程	14
2.3 子空间系统识别方法.....	16
2.3.1 投影理论	16
2.3.2 状态空间矩阵的求解	18
2.4 动力系统参数提取.....	27
2.5 数值讨论.....	29
2.5.1 线性系统辨识	29
2.5.2 非线性系统辨识	31
2.6 本章小结.....	34
第 3 章 基于输出反馈的子空间法非线性系统识别	35
3.1 引言.....	35
3.2 非线性系统状态空间描述.....	36
3.3 子空间法非线性系统识别.....	37
3.4 状态矩阵到物理参数映射.....	41
3.5 数值验证.....	42
3.5.1 方法简介	42
3.5.2 达芬系统	42
3.5.3 分段线性系统	45
3.6 本章小结.....	48
第 4 章 消能减震结构非线性系统识别数值模拟	50

4.1	单自由度非线性滞回系统模拟.....	50
4.1.1	前提假设	50
4.1.2	阻尼器力学模型	50
4.1.3	粘滞阻尼器系统	50
4.1.4	摩擦阻尼器系统	53
4.1.5	线性阻尼器系统	54
4.1.6	黑箱系统	56
4.2	多自由度非线性滞回系统模拟.....	61
4.2.1	完整激励下多自由度系统辨识模拟.....	61
4.2.2	不同强度激励下辨识结果对比.....	66
4.2.3	不完整激励多自由度系统识别模拟.....	68
4.3	本章小结.....	73
第 5 章	结论	75
5.1	本文工作总结.....	75
5.2	本课题继续研究展望.....	76
致谢	77
参考文献	79
个人简历、在读期间发表的学术论文与研究成果.....		81

第1章 绪言

1.1 研究背景及意义

消能减震技术是目前在结构振动控制的研究和应用中较为成熟的技术。该技术通过采用新材料和新技术增加结构的附加阻尼或附加刚度,以此提高结构体系的耗能能力,减少地震对结构体系的破坏,因此被广泛应用于新建建筑和既有建筑的抗震加固及改造中。

在地震工程领域,通常认为只要消能器满足了设计位移(速度)要求,这些消能器在设防地震或罕遇地震的作用下仍然能按设计时期望的工作性能正常工作,而忽略了消能器可能因地震或材料老化等造成损坏或性能上退化的问题。如粘滞阻尼器可能因为漏油的问题造成性能的下降,粘弹性阻尼器的粘弹性材料与钢板之间的脱落,摩擦阻尼器接触面的属性可能随着时间而发生变化。

因而,在结构发生老化或经历地震等灾害,了解消能器和固有结构性能变化和损伤情况,对结构的维护加固等有着重要的意义。消能减震结构的消能部件分散在结构的各层,变形较大的层消能器数量适当增加。对于高层和超高层建筑来说,结构在使用过程中的检查维护及地震之后的维修更换工作分散在结构各层,使工作量非常大。因此,消能减震结构使用过程中,我们有必要提出一种高效的识别手段对消能器结构使用状态、性能参数进行监测,并且要设法识别出建筑物固有结构的动力特性。

在固有结构上增加消能器,提高结构耗能能力的同时,会增大结构系统的非线性程度。已有非常多的识别方法可以用于识别非线性系统的动力特性。但是大多数方法都非常复杂,又难以适用于多自由度系统的非线性识别,也不能适用于复杂程度不同的非线性情况^[1]。这使得我们难以使用常规分析方法基于监测得到的数据计算固有结构本身的结构动力特性,更无法辨识消能器的性能状态。

本研究即针对此问题,论述并验证了适用于消能减震结构的一种基于输出反馈的非线性系统识别方法。

其最终目的就是识别出消能器的性能参数和固有结构的模态参数,为消能减震结构的动态特性分析、振动故障的诊断和预报以及结构动态特性的优化设计提供依据^[2]。系统参数识别方法的理论研究和应用目前仍然是结构动力学反问题研究的主要内容,其原因就在于系统参数识别的工程实用性,它能够解决的实际问题可归纳为:

- 1) 对正在服役的结构,进行动态特性评价;
- 2) 对正在设计中的产品,进行结构动态特性的预估以及优化设计;

- 3) 对结构系统故障进行诊断和预报;
- 4) 对已发生损伤的结构进行再生设计时, 提供参考和依据。

1.2 国内外研究现状

三十多年来, 系统分析理论吸收了振动理论、信号分析、数理统计、自动控制理论的一些研究思想, 逐渐形成了一套独特的理论, 现在它已经成为解决复杂结构振动问题的主要工具。但随着消能减震结构的大范围应用, 其系统所特有的非线性特性, 给系统识别理论又提出了新的问题和挑战。

1.2.1 消能减震结构的应用及监测

自从上世纪的 70 年代, 在地震工程领域的科学家及工程师们就开始积极搜寻能有效控制或抑制因地震引起的结构振动的方法, 从而达到减少地震对结构的损伤、保护结构的目的。消能减震技术是目前在结构振动控制的研究和应用中较为成熟的技术, 广泛采用新材料和新技术增加结构的附加阻尼或附加刚度, 以此增加结构体系的耗能能力, 减少地震对结构体系的破坏, 该技术不仅适用于新建建筑, 也可用于既有建筑的抗震加固及改造。根据日本隔震协会(JSSI)2012 年的统计^[3], 共有超过 2600 栋的商业或住宅建筑以及超过 3800 栋的独栋别墅采用了隔震结构体系, 超过 950 栋建筑采用了消能减震控制技术。

目前我国正努力推广高强钢筋、高强混凝土在建筑行业中的应用, 到 2015 年末, C60 高强混凝土用量将达到总用量的 10%, 高强钢筋的产量占螺纹钢筋总产量的 80%, 在建筑工程中高强钢筋使用量达到建筑用钢筋总量的比例从目前的 35% 提高到 65% 以上, 对大型高层建筑和大跨度公共建筑, 优先采用 HRB500 级螺纹钢筋。高强钢筋、高强混凝土的采用使得结构越来越轻, 也越来越柔, 结构层间变形明显大于 20 年前修建的建筑。因此, 为提高结构的抗震性能和风振舒适度, 利用结构振动控制的思想在高层建筑中采用消能减震新技术显得越来越有必要, 可以预见到其应用前景也将更为广泛。

2011 年发生了震级规模 9.0 级的日本东北地方太平洋近海地震, 这是日本有观测纪录以来规模最大的地震, 给日本东北地区造成了巨大的灾害, 在震后调查中发现, 一些隔震结构的隔振垫和消能减震结构的消能器发生了严重的损伤和破坏, 如图 1.1 所示为一座在日本 311 地震中消能器发生破坏的消能减震结构。在正常使用过程中消能器也可能因一些原因造成性能上的退化或失效, 如粘滞阻尼器可能因为漏油的问题造成性能的下降, 粘弹性阻尼器的粘弹性材料与钢板之间的脱落, 摩擦阻尼器接触面的属性可能随着时间而发生变化。而金属阻尼器正是利用其材料在屈服之后的耗能特性来增加结构阻尼, 在地震之后可能已经损坏,

或耗能能力大幅降低，需要在震后进行检查，确定是否需要更换^[4]。

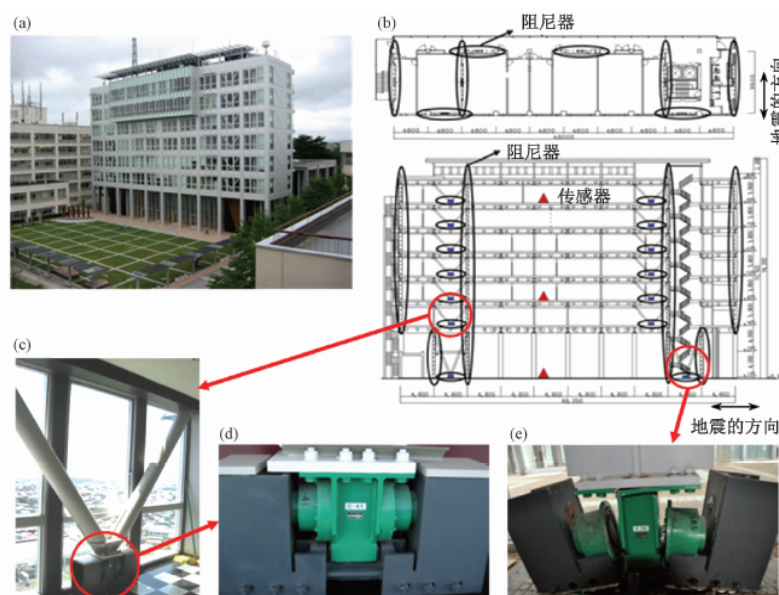


图 1.1 日本 311 大地震中破坏的消能减震结构

由以上论述可知随着消能器的使用，消能减震结构的动力特性会发生变化。因而，有必要针对消能减震结构设立一套行之有效的结构健康监测的方案。以供使用人员准确及时了解结构性能，指导工程人员及时发现结构损伤，判断是否需要更换，并提出对结构的维修加固方案。

结构健康监测的技术是指利用现场的无损传感技术，分析包括结构响应在内的结构系统特征，达到监测结构损伤或退化的一些变化的目的^[5]。其中一个核心部分即为损伤识别。工程结构一般会受到两种损伤，即突然损伤和累计损伤。突然损伤由遭受地震、洪水、飓风、爆炸等严重的自然或人为灾害等突发事件引起，而累计损伤则一般是经过长期使用后缓慢积累的损伤，具有缓慢积累的性质。对于损伤识别的目的，Shon 和 Farrar^[6]提出了损伤监测的五个层次：是否损伤产生、损伤定位、识别损伤类型、量化损伤的严重程度、评估结构的剩余寿命。

对于消能减震结构而言，在固有结构上增加消能器，使得结构出现了较强的非线性，同时为结构增加了附加刚度和附加阻尼^[7]。如果对消能减震结构进行系统识别时，无法将结构固有刚度和固有阻尼与消能器的附加刚度和阻尼加以区分识别，则无法有效真实地得到结构信息，不利于对结构损伤情况的判断。故在对消能减震结构进行健康监测的特殊性在于我们除了需要识别结构整体信息，还要设法从数据中分析出消能器对固有结构的影响，判别消能器自身的性能损伤，以及结构自身的性能损伤。而传统结构系统识别方法则很少具备这项功能的^[8]。

1.2.2 系统模型与系统辨识

1.2.2.1 系统及其模型

工程实际中的系统包含了十分广泛的内容，它可以大到宇宙，小到细胞，许多物理的、化学的、生物的、经济的及工业的现象都可归入这一概念范畴。

虽然实际系统在机理上各有不同,但几乎都能够用图 1.2 所示的动态系统模型来描述。

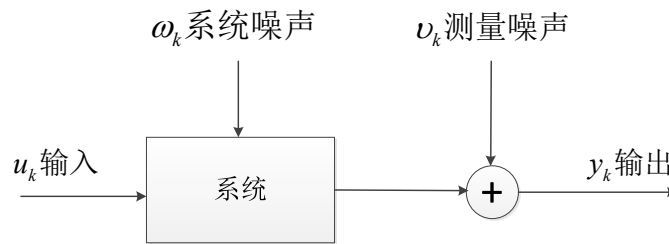


图 1.2 系统动态模型

为了表示系统在研究问题下的特性，可以采用不同的描述模型来说明，如直觉模型、物理模型、图表模型及数学模型等，其中数学模型以其能够精确地反映系统的输入输出关系，客观地反映系统内在规律的定量关系而得到广泛地研究和应用。

系统的数学模型以数学结构的形式抽象地刻画出实际系统本质的行为特征。常用的数学模型有代数方程、微分方程、差分方程和状态方程等，这些不同的数学模型被应用于系统的仿真、分析、监测、预报、优化、故障诊断和系统设计等。

系统及其模型能分为许多不同的类型，如线性或非线性、时变或非时变、离散或连续时间、具有集中或分布参数的系统或模型等等，而最常用的是线性时不变具有集中质量的模型，它能够较好地近似描述相当部分实际系统的输入输出过程。

1.2.2.2 系统模型的建立

建立系统模型的方法通常有两种：理论建模和辨识建模^[9]。

理论建模是从已知的原理、定律和定理出发，通过机理分析研究，找出系统内在的运动规律，推导出系统中各种参数与外作用之间的解析关系—数学模型。由于这类问题的基本规律已知，工程中也称其为“白箱”(white box)方法，白箱方法仅适用于简单系统的建模，因为对于较为复杂的系统，要给出符合实际情况的合理假设有时是十分困难的，同时模型的复杂性也会随系统迅速增加。

在一些系统中，遇到的问题可能是已知系统满足的某些基本定律，而有些机

理并非完全清楚,如由系统特性和运动规律能够推断出系统的数学模型形式,而仅需对模型中的未知参数加以确定,这实际是一个参数估计的问题,此即所谓的“灰箱”(grey box)建模方法。

现实中的系统往往都具有一定的因果关系,即在系统受到输入激励时便会产生相关的输出响应,而这些激励与响应信号一般总是可以测量的,辨识建模就是直接从系统运行或试验中测得的数据,推算出系统的关系式—数学模型。这类方法适用于系统客观规律不清楚的情况,故称其为“黑箱”(black box)方法。在这种方法中,首先需要定义模型的参数表达式,然后选用一定的辨识方法确定出模型中的参数,该模型应能准确地吻合实验记录数据,即模型结果与实验数据应当尽可能地一致。

系统辨识为理论建模提供了一种很具工程价值的替代选择。与由理论分析获取的模型相比较,系统辨识模型仅具有有限的有效性和适用范围,而且在一些情况中也不具有直接的物理意义。但是,这些模型的获取相对容易,使用较为方便,有时作用更明显,例如应用这些简单的模型可使基于模型的控制系统设计在数学上和实践中均成为可能。当然实用中还需解决一些问题,诸如选择合适的模型结构,系统的时变性考虑及经常被忽视的测量问题(选择合适的传感器、采样时间、滤波问题等等)。

1.2.2.3 系统辨识的发展

系统辨识的先导性工作可追溯到 16 世纪德国天文学家开普勒从火星观测数据,发现行星运动三大规律从而建立了行星运动的一种数学模型;18 世纪德国数学家高斯开创性地提出的最小二乘法,奠定了系统辨识中参数估计方法的基石;现代控制理论和电子数字计算技术的蓬勃发展,为通过试验数据建立数学模型的系统辨识学科提供了理论和技术上的基础。

系统辨识的研究真正开始于本世纪 70 年代,并在这一时期出现了研究高潮,30 多年的研究取得了大量的成果,并成功的得到应用。1987 年 Ljung^[10]及其合作者提出了预报误差方法(Prediction Error Methods, PEM)标志着系统辨识学科走向成熟。系统辨识在实践中涉及如何测量和收集数据,如何进行实时验证等问题。在理论上涉及模型参数化和可辨识性,动态系统参数估计的优良性,参数估计和计算方法的改进等问题。正因如此,系统辨识成为目前相当活跃的学科之一,吸引了众多的科技人员在这一领域的各个方面,对其理论进行研究,并探讨在不同的实践中应用的可能。

目前系统辨识已在自然科学、技术科学、社会科学、经济活动和工程实践各个领域得到广泛地应用,如系统的建模与仿真性能预测,故障诊断、自适应控制

及质量监控等。在动力学系统的设计、监测、分析中，系统辨识有着十分重要的价值和意义。

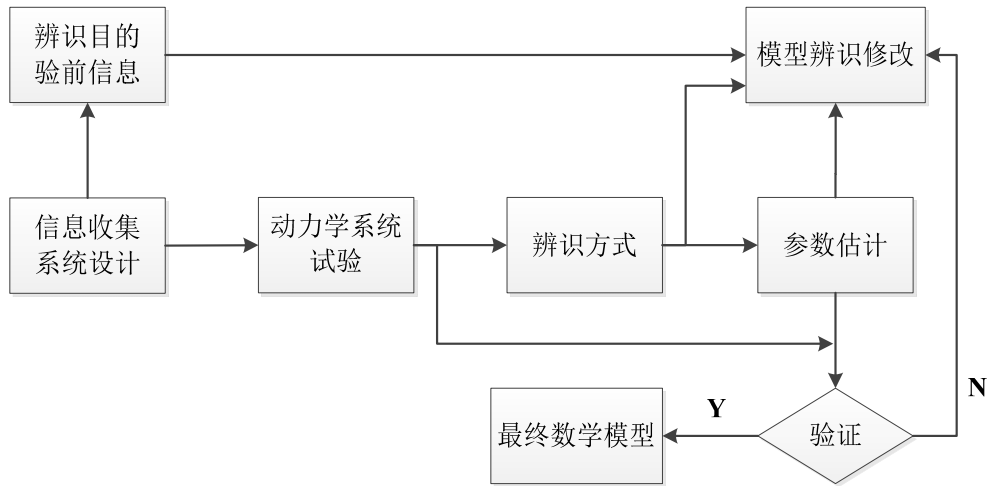


图 1.3 动力学系统辨识的基本过程

本文主要研究针对消能减震系统的结构系统辨识问题。

结构系统辨识是动力学辨识的一个分支。研究的主要内容是从结构系统的动力学试验数据中辨识出结构系统的振动模态参数（固有频率、阻尼比）、振型、传递函数和结构参数（刚度矩阵、阻尼矩阵和质量矩阵）。

结构动力学系统的理论建模通常采用有限元方法。它将连续的系统划分为 N 自由度的离散体系，通过结构动力学方程组计算出相应振型和频率。有限元理论建模目前已日臻完善，它能给出较好的结果。但理论模型总是需要经过试验验证和修正的，采用系统辨识技术，通过结构振动试验，辨识出结构动力学系统的模态参数与物理参数，可使有限元模型更趋准确。

结构系统辨识不仅可为动力学系统的控制设计提供必要的参数，而且可用于结构早期破坏的预测和结构完整性的监测。在故障检测、响应和载荷预测中同样有着重要的作用。

在结构系统辨识中，将动力学系统看成由梁、板、桁架等部件组成的柔性结构，测得相关的输入-输出关系，进而建立结构系统的数学模型，确定出系统的结构模态参数。

结构系统辨识技术是近十多年发展起来的新学科，目前处于进步与完善时期。结构系统的早期试验多采用共振试验法，当系统的固有频率较为密集时，共振试验法的误差也随之增大，60 年代末期与 70 年代初，计算机技术和快速傅里叶变换在结构系统识别中的应用，使传递函数和频谱分析这一类频域方法成为结构动力学研究的基本手段和主要算法。直至 70 年代末，结构系统辨识几乎全部采用

频域辨识方法。

频域辨识算法在本质上都是采用一个合适的参数传递函数来建立系统的数学模型。除了受到傅里叶变换方法的局限性影响外，在密集模态频率情况下，诸如不同级的峰值及高阻尼比，特别是在有较高测量噪声时，频域方法会遇到很多问题。

结构系统参数辨识的时域方法仅是近些年才发展起来，虽然因时间较短该类方法还不尽成熟和完善，但由于在一些情况下，尤其是在高噪声分析中，时域方法比频域方法会做得更好，甚至提供更完备的信息。

近年来，出现了许多用于辨识振动系统动态特性的技术不断涌现。这些方法大体上可分为输入/输出类方法和实现类方法，子空间(Subspace)方法就是其中具有代表性的一种新算法。

1.2.3 子空间识别算法的特点

子空间方法的基本思想可以追溯到 20 世纪 60 年代 Kalman 等^[11]提出的状态空间实现理论。基于该理论，系统的状态空间表达可以由脉冲响应系数组成的 Hankel 矩阵估计得到。1985 年 Juang 和 Pappa^[12]将这一概念应用于结构模型参数的辨识中，并分别对纯确定性系统和纯随机性系统的直接辨识方案进行了研究，他们由输入输出数据构建 Hankel 矩阵直接计算出状态空间模型，这些工作标志着子空间辨识研究的真正开始。1996 年，VanOversche^[13]是编著了第一本介绍子空间辨识算法的专著，该书从线性系统的几何性质角度出发，分别介绍了确定性系统和随机系统的子空间辨识算法。这些算法的基本思路就是由输入输出 Hankel 矩阵投影的行“子空间”和列“子空间”来获取模型参数，“子空间辨识”由此得名。

子空间辨识方法适用于多输入多输出动态系统的建模，与传统的辨识方法相比，子空间辨识方法的优势体现在以下几个方面，使得子空间方法的研究具有重要的理论和应用意义：

模型形式：子空间辨识得到状态空间模型，在系统的不同数学描述形式中，状态空间模型在现代系统理论中最为常用，和其它模型相比，状态空间模型不仅能够反应系统的外部关系，更能揭示系统的内部特性，尤其对于多输入多输出系统，根据状态空间模型能够方便有效地进行系统分析和设计。

参数化：系统辨识算法需要一些用户定义的特定参数，经典算法一般需要用大量的工作来确定所谓的规范模型，即具有最小参数数目的模型，随之也带来了许多问题。在子空间辨识算法中由于使用状态空间模型，唯一需要的“参数”是系统阶次，因此也避免了数值病态问题、重叠参数问题、系统的最小实现等问题。

数值计算：由于在辨识中使用了 QR 分解、SVD 分解等线性代数工具，使得子空间辨识方法的计算具有一定的数值鲁棒性。与传统的预报误差法等方法相比，子空间方法不需要进行非线性优化问题的迭代求解，运算快速，若不考虑在线的递推辨识算法，子空间方法不涉及算法的收敛性和数值不稳定问题。

模型降阶：人们在进行系统分析时，总是希望所获取的模型具有尽可能低的阶次。在子空间辨识中，低阶的状态空间模型可直接从输入输出数据中获得，而不必计算高阶次的模型实现。

1.2.4 非线性动力系统识别理论

一般而言，非线性系统可以理解为不满足线性叠加理论的系统。类似于线性系统的动力平衡方程，非线性振动可以通过非线性微分方程表示

$$f_m(\ddot{x}, \dot{x}, x) + f_c(\ddot{x}, \dot{x}, x) + f_k(\ddot{x}, \dot{x}, x) = f(t) \quad (1.1)$$

其中， $f_m(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ 为非线性惯性力， $f_c(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ 为非线性阻尼力， $f_k(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ 非线性弹性力， $f(t)$ 为外激励。式(1.1)为非线性系统的一般化表达方法，若式中的非线性作用力不是或者不同时是加速度、速度和位移的函数，则省略 $f_m(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ 、 $f_c(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ 以及 $f_k(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ 中与之相关的项。由式(1.1)不难得出，在结构动力学中，典型的非线性类型包括：几何非线性、惯性非线性、材料非线性、阻尼非线性以及边界非线性^[14]。

随着对非线性振动机理研究的不断深入以及反分析理论的不断成熟，出现了各种不同的非线性系统识别方法^[15, 16]。主要包括：恢复力曲面法(Restoring Force Surface method, RFS)、直接参数识别法(Direct Parameter Estimation method, DPE)、非线性自回归滑动平均模型识别法(Nonlinear Auto-Regressive Moving-Average with exogenous inputs modeling, NARMAX)、Volterra 变换和高阶频响函数法(The Volterra series and high-order frequency response functions)、Hilbert 变换法以及逆路径法(The reverse path method)、BP 神经网络法^[17]等。

1.3 本文的研究内容及章节安排

识别消能减震结构的非线性动力特性，使我们能够更好地了解结构性能，并指导工程人员及时发现结构损伤，判断是否需要更换对消能器进行更换，并提出对结构的维修加固方案。因此，本文将设法把消能器的力学模型引入状态空间方程，利用较为成熟的子空间系统识别方法进行系统识别，并探索性地实现一种针对消能减震结构非线性系统识别的分析方法。本文的主要研究工作如下：

(1) 系统介绍子空间法系统识别方法

描述了传统结构的物理方程向状态空间的转换、子空间识别的基本概念、状态矩阵的推导方法。并在此基础上,讨论了传统子空间法在系统识别中的适用性。

(2) 应用子空间法作非线性系统识别的思路

描述现有的几种常见消能器的类型, 以及其力学模型。将消能器力学模型引入状态空间方程, 实现非线性系统的线性化, 并提出子空间法对消能减震结构的识别方法。

(3) 单自由度、多自由度非线性系统辨识数值模拟

利用 MATLAB 软件中的 Simulink 可视化模块分别建立含有不同类型非线性消能器力学模型的单自由度和多自由度系统数值仿真模型。并利用仿真数据验证本文提出的消能减震结构非线性体系识别方法。总结分析本方法的适用性和存在的问题, 以及对以后研究的展望。

第2章 线性子空间系统辨识方法

2.1 引言

在系统的不同数学描述形式中，状态空间模型在现代系统理论中最为常用，和其它模型相比，状态空间模型不仅能够反应系统的外部关系，更能揭示系统的内部特性，尤其对于多输入多输出系统，根据状态空间模型能够方便有效地进行系统分析和设计。在子空间辨识算法中由于使用状态空间模型，唯一需要的“参数”是系统阶次，因此也避免了数值病态问题、重叠参数问题、系统的最小实现等问题。在辨识中使用了 QR 分解、SVD 分解等线性代数工具，使得子空间辨识方法的计算具有一定的数值鲁棒性。与传统的预报误差法等方法相比，子空间方法不需要进行非线性优化问题的迭代求解，运算快速，若不考虑在线的递推辨识算法，子空间方法不涉及算法的收敛性和数值不稳定问题。正因为子空间法的这些优越性使得系统识别的效率显著提高。本章对常规子空间法线性系统识别的研究成果进行论述。

2.2 动力系统状态空间描述

系统的动态特性，可在不同的表达空间借助于各种数学模型来描述。在结构振动测试与分析中，结构系统动态特性的描述通常是在时间空间（时间域）、频率空间（频率域）和模态空间（模态域）内进行的，不同的模型对应不同的算法和识别理论。在时域识别中，可以用微分（连续时间）或差分（离散时间）等式将系统的动力学控制方程描述，有状态空间模型、Prony 多项式模型、自回归模型（AR 模型）、滑动平均模型（MA 模型）以及自回归滑动平均模型（ARMA 模型）等等^[18, 19]系统的描述模型。子空间识别的基础是状态空间模型。

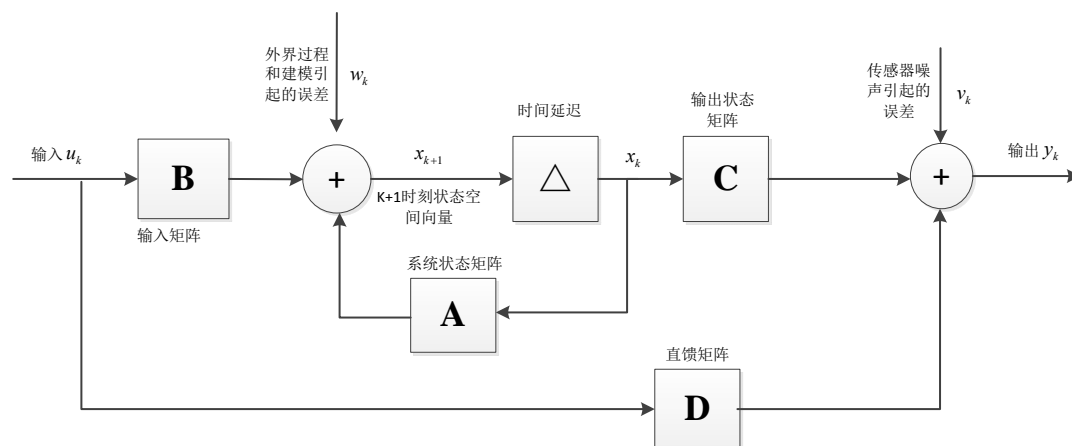


图 2.1 动力学系统时间状态空间模型

这里仅限于识别线性时不变系统。向量 u_k , y_k 分别为输入和输出向量, 它们是可测得的; w_k , v_k 是不可测得的噪声; Δ 表示时间延迟; A 是振动系统矩阵; B 是输入矩阵, C 是输出矩阵, 用于测量 y_k 时内部状态向外部状态的转化; D 是直馈矩阵, 在离散时间状态模型中, 此项为零; k 表示测试时间点; x_k 表示状态向量。

2.2.1 连续状态空间方程

一个 n 个自由度结构系统的振动可以用下面的二阶微分方程来表示:

$$M\ddot{z}(t) + G\dot{z}(t) + Kz(t) = Lu(t) \quad (2.1)$$

式中, M 表示系统的质量矩阵; K 表示系统的刚度矩阵; G 表示系统的阻尼矩阵; L 表示系统的输入位置矩阵; $z(t)$ 表示在连续时间 t 时刻的位移向量; $\dot{z}(t)$ 表示在连续时间 t 时刻的速度向量; $\ddot{z}(t)$ 表示在连续时间 t 时刻的加速度向量; $u(t)$ 表示外部激励。

以上二阶的控制微分方程可以用很多方法将其重写为一阶微分方程的形式, 其中最常见就是状态方程表示^[20]。将式(2.1)左右两边各乘 M^{-1} 并移项得:

$$\ddot{z}(t) = -M^{-1}G\dot{z}(t) - M^{-1}Kz(t) + M^{-1}Lu(t) \quad (2.2)$$

引入系统的状态向量:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

则式(2.2)可重写成一阶微分方程的形式:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (2.4)$$

式中,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}G \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

式中, A_c 为 $2n \times 2n$ 阶系统矩阵, 反映了系统的构成和系统状态变化的情况; 下

角标 c 表示连续状态； B_c 为 $2n \times r$ 阶输入矩阵，反映了系统输入对系统状态的影响； $u(t)$ 为 $r \times 1$ 阶输入向量； n 是系统自由度； r 是激励点数。

式(2.4)称为系统的状态方程，反映了系统的运动状态。对于振动系统，系统的动力响应如加速度、速度、位移可以部分或全部由相应的传感器测出，并用 $y(t)$ 表示，则 $y(t)$ 可以写成：

$$y(t) = C_a \ddot{z}(t) + C_v \dot{z}(t) + C_d z(t) \quad (2.6)$$

式中， C_a 为 $m \times n$ 阶加速度输出影响矩阵； C_v 为 $m \times n$ 阶速度输出影响矩阵； C_d 为 $m \times n$ 阶位移输出影响矩阵； m 是观测点数； n 是系统自由度数。 C_a 、 C_v 、 C_d 输出影响矩阵反映了向量 $\ddot{z}(t)$ 、 $\dot{z}(t)$ 、 $z(t)$ 与测量向量 $y(t)$ 之间的关系。将式(2.3)代入式(2.6)，并写成紧密型：

$$y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \quad (2.7)$$

式中， C_c 是 $m \times 2n$ 阶状态向量的输出影响矩阵， D_c 为 $m \times r$ 阶传递矩阵，反映输入与输出向量的关系。矩阵 C_c 、 D_c 定义为：

$$C_c = [C_d - C_d M^{-1} K \quad C_v - C_a M^{-1} K] \quad (2.8)$$

$$D_c = C_a M^{-1} F \quad (2.9)$$

方程(2.4)和(2.7)构成了一个动力学系统的连续时间状态空间模型。

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (2.10a)$$

$$y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \quad (2.10b)$$

然而，实测数据总是离散的，而且计算机不可能对无限长的连续信号进行分析处理，在数字信号分析的过程中，只能将其截断变成有限长度的离散数据。因此，在实际应用中应将连续状态空间方程转换为离散状态空间方程。在振动实验中，连续的模拟信号转换为离散数字信号是由模数(A/D)转换器来完成的，经 A/D 转换器出来的离散信号能否反映原连续信号，一般认为对连续信号进行采样

时，应满足采样定理，这样离散信号才能在某种程度上反映原连续信号。

2.2.2 离散状态空间方程

状态空间方程(2.10)当 $t = t_0$ 有初始条件 $x(t_0)$ ，则 $e^{-A_c t}$ 左乘状态空间方程(2.10a)，得到：

$$e^{-A_c t} \dot{x}(t) - e^{-A_c t} A_c x(t) = \frac{d}{dt} (e^{-A_c t} x(t)) = e^{-A_c t} B_c u(t) \quad (2.11)$$

积分后可得：

$$x(t) = e^{A_c(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_c(t-\tau)} B_c u(\tau) d\tau \quad t > t_0 \quad (2.12)$$

设时间间隔为 Δt ，则离散时间序列为 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (k+1)\Delta t, \dots$ 将 $t = (k+1)\Delta t$ ， $t_0 = k\Delta t$ 代入方程(2.12)可得：

$$x((k+1)\Delta t) = e^{A_c \Delta t} x(k\Delta t) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{A_c((k+1)\Delta t - \tau)} B_c u(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

设 $u(\tau)$ 在一个采样间隔内是一个常数，用 $x_k = x(k\Delta t) = (z_k^T \quad \dot{z}_k^T)^T$ 表示由采样时刻的位移和速度向量组成的系统状态向量， x_{k+1} 表示在 $k+1$ 时刻系统的状态向量。令 $\tau' = (k+1)\Delta t - \tau$ ，则(2.13)可以写成：

$$x_{k+1} = e^{A_c \Delta t} x_k + \left(\int_0^{\Delta t} e^{A_c \tau'} d\tau' \right) B_c u_k \quad (2.14)$$

则方程(2.13)可以写成：

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

其中，

$$\begin{aligned} A &= e^{A_c \Delta t} \in R^{2n \times 2n} \\ B &= \left(\int_0^{\Delta t} e^{A_c \tau'} d\tau' \right) B_c = (e^{A_c \Delta t} - I) A_c^{-1} B_c = [A - I] A_c^{-1} B_c \in R^{2n \times r} \end{aligned} \quad (2.16)$$

同样，输出方程可以写成：

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (2.17)$$

因此，动力学系统离散的状态空间方程为：

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2.18a)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (2.18b)$$

式中， $x_k = x(k\Delta t)$ 是离散的时间状态向量； $A = \exp(A_c \Delta t)$ 是离散的系统矩阵； $B = [A - I]A_c^{-1}B_c$ 是离散的输入矩阵； $C = C_c$ ，是离散输出矩阵； $D = D_c$ ，是传递矩阵。

在实际工程中，由于建模和测量过程都存在着误差，显然这些误差过程是随机工程，称之为随机噪声。显然，随机噪声的影响是无法避免的。所以需要在(2.18)中包括这些影响，那么，振动该系统离散时间状态空间方程为：

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \quad (2.19a)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + v_k \quad (2.19b)$$

式中， w_k 表示处理工程和建模误差引起的噪声； v_k 表示传感器误差引起的噪声。其中， w_k 和 v_k 不可测，假定为均值为零的白噪声且互不相关。并且满足：

$$E \left[\begin{pmatrix} w(i) \\ v(j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(i)^T & v(j)^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta_{ij} \quad (2.20)$$

其中， $E(\bullet)$ 为数字期望算子， δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

为了建立子空间辨识方法，一般都有以下假设成立^[21]：

- 1) 待辨识系统为渐近稳定的；
- 2) 待辨识系统为可观可达的，可观表示系统输出可以测量，可达表示系统输出可以控制，即 (A, C) 为可观的， $(A, [BQ^{1/2}])$ 为可达的；
- 3) 假设系统没有反馈，则噪声 w_k 与 v_k 应与输入 u_k 不相关，即对于任意 i 和 j 都有：

$$\bar{E}\{u(i)w(j)\} = \bar{E}\{u(i)v(j)\} = 0 \quad (2.21)$$

其中， \bar{E} 定义为：

$$\bar{E}\{\bullet\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\bullet) \quad (2.22)$$

2.3 子空间系统识别方法

2.3.1 投影理论

子空间辨识方法往往可以从几何理论中获得直观的解释。大部分子空间辨识算法都是基于子空间的投影计算^[21]。本节将介绍子空间辨识常使用的投影工具：正交投影(Orthogonal projection)和斜投影(Oblique projection)。不同的子空间辨识算法应用不同的投影以获得状态向量空间或者增广观测矩阵张成的子空间。

矩阵 $A \in R^{m \times n}$ 的行空间在矩阵 $B \in R^{l \times n}$ 的行空间上的正交投影可以表示为 A/B ，其计算可表达为：

$$A/B = AB^T(BB^T)^\dagger B \quad (2.23)$$

式中， \dagger 表示矩阵的广义逆。对于 2 维子空间，可以用下图表示子空间的正交投影：

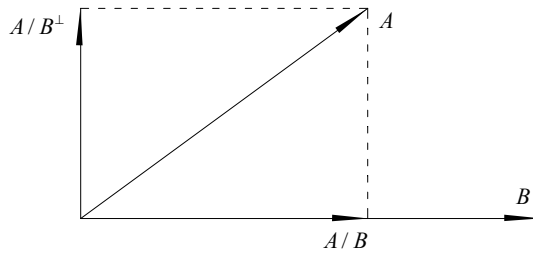


图 2.2 二维子空间正交投影图示

将 Π_B 定义为 B 的行空间上的正交投影算子，定义

$$\Pi_B \stackrel{def}{=} B^T(BB^T)^\dagger B \quad (2.24)$$

则 A/B 也可表示为:

$$A/B = A\Pi_B \quad (2.25)$$

同样, 定义 Π_{B^\perp} 为 B 的行空间的正交补空间上的正交投影算子:

$$\Pi_{B^\perp} = I - \Pi_B \quad (2.26)$$

其中, 单位矩阵 I 为 n 维, 由此可计算 A 的行空间在 B 的行空间的正交补空间上的正交投影为:

$$A/B^\perp = A\Pi_{B^\perp} = A - A\Pi_B \quad (2.27)$$

矩阵 $A \in R^{m \times n}$ 的行空间在矩阵 $B \in R^{l \times n}$ 和 $C \in R^{p \times n}$ 组成的行空间上的投影:

$$A/\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = A(B^T \quad C^T) \left[\begin{pmatrix} BB^T & BC^T \\ CB^T & CC^T \end{pmatrix}^\dagger \right] \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

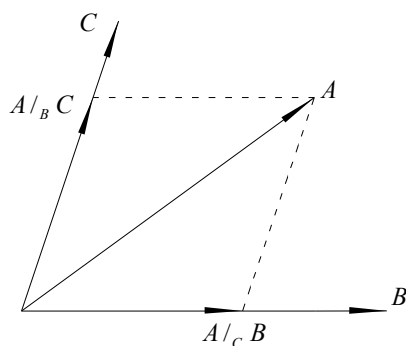


图 2.3 二维子空间斜投影图示

矩阵 $A \in R^{m \times n}$ 的行空间沿着矩阵 $C \in R^{p \times n}$ 的行空间在矩阵 $B \in R^{l \times n}$ 的行空间上的投影可以表示为 $A/C B$, 其计算可表达为:

$$A/C B = A(B^T \quad C^T) \left[\begin{pmatrix} BB^T & BC^T \\ CB^T & CC^T \end{pmatrix}^\dagger \right]_{\text{first } l \text{ columns}} B \quad (2.29)$$

同样，与正交投影一样，等式(2.29)也可以写成如式(2.30)：

$$A = A / \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} + A / \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}^\perp = A /_B C + A /_C B + A / \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}^\perp \quad (2.30)$$

斜投影有如下性质：

$$B /_B C = 0 \quad (2.31)$$

$$C /_B C = C \quad (2.32)$$

$$A /_C B = [A / C^\perp][C / B^\perp]B \quad (2.33)$$

2.3.2 状态空间矩阵的求解

子空间辨识算法包括了三个主要步骤：第一步，计算特定 Hankel 矩阵的行空间投影，典型的做法是进行 LQ 分解。第二步，计算该投影的奇异值分解，从而直接得到可观测矩阵 Γ_i 和状态序列 X_f 的卡尔曼滤波器估计 \hat{X}_f 。在第三步也是最后一步，由可观测矩阵 Γ_i 或估计的状态序列 \hat{X}_f 来确定系统矩阵 A 、 B 、 C 、 D 以及噪声协方差矩阵 R 、 Q 、 S 。

2.3.2.1 Hankel 矩阵的组成

Hankel 矩阵反对角线上的元素相同的矩阵。将测点响应数据组成 $2mi \times j$ 的 Hankel 矩阵，并假定 $j \rightarrow \infty$ 。把 Hankel 矩阵的行空间分成“过去”行空间和“将来”行空间：

$$Y_{0|2i-1} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{j-1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i-1} & y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j-2} \\ y_i & y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{i+j-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & y_{i+3} & \cdots & y_{i+j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & y_{2i+1} & \cdots & y_{2i+j-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{0|i-1} \\ Y_{i|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p \\ Y_f \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{"过去"} \\ \text{"将来"} \end{matrix} \quad (2.34)$$

式中， y_i 表示第 i 时刻所有测点的响应；下标 p 表示“过去”，下标 f 表示“将来”。

2.3.2.2 栈向量状态空间方程

由 Hankel 矩阵组成的扩展状态空间方程是子空间辨识中广泛应用的等式。这里先介绍由过程形式得到的栈向量(Stack vector)状态空间方程。首先假设 k 为当前时刻, f 为可定义的未来时刻标度, 可得:

$$y_f = \Gamma_f x(k) + H_f u_f + G_f w_f + v_f \quad (2.35)$$

定义栈向量和增广矩阵 Γ_f 和 Toeplitz 矩阵为:

$$y_f = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+f-1) \end{bmatrix}, \quad \Gamma_f = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{f-1} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$H_f = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{f-2}B & CA^{f-3}B & \cdots & D \end{bmatrix}, \quad G_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{f-2} & CA^{f-3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

其他栈向量 u_f 、 w_f 、 v_f 和 y_f 具有类似的定义。

同样, 定义过去时刻的栈向量状态空间方程:

$$y_p = \Gamma_p x(k-p) + H_p u_p + G_p w_p + v_p \quad (2.38)$$

其中, $y_p = \begin{bmatrix} y(k-p) \\ y(k-p+1) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix}$, 其他向量和矩阵具有类似的定义。

将等式(2.35)、(2.38)写成 Hankel 矩阵形式, 可得:

$$Y_f = \Gamma_f X_f + H_f U_f + G_f W_f + V_f \quad (2.39)$$

$$Y_p = \Gamma_p X_p + H_p U_p + G_p W_p + V_p \quad (2.40)$$

输入输出的 **Hankel** 矩阵表示为:

$$Y_f = \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \cdots & y(N-f+1) \\ y(k+1) & y(k+2) & \cdots & y(N-f+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k+f-1) & y(k+f) & \cdots & y(N) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$Y_p = \begin{bmatrix} y(k-p) & y(k-p+1) & \cdots & y(N-f-p+1) \\ y(k-p+1) & y(k-p+2) & \cdots & y(N-f-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k-1) & y(k) & \cdots & y(N-f) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

这里 $N = N_0 - p - f + 1$, **Hankel** 矩阵 U_f 、 W_f 、 V_f 、 U_p 、 W_p 、 V_p 有相似的定义。

状态向量矩阵为:

$$X_f = [x(k) \quad x(k+1) \quad \cdots \quad x(N-f+1)] \quad (2.43)$$

$$X_p = [x(k-p) \quad x(k-p+1) \quad \cdots \quad x(N-f-p+1)] \quad (2.44)$$

为了能够得到系统矩阵, 可以从两方面着手, 一是先得到状态空间向量的估计, 由此直接从状态空间方程用最小二乘法得到系统矩阵; 二是先得到增广矩阵和 **Toeplitz** 矩阵的估计, 然后利用增广观测矩阵和 **Toeplitz** 矩阵的结构获得系统矩阵。其具体计算方法如下:

(1) 方法 1

先估计系统的状态向量, \hat{X}_k 和 \hat{X}_{k+1} 为:

$$\hat{X}_k = [\hat{x}(k) \quad \hat{x}(k+1) \quad \cdots \quad \hat{x}(N-f)] \quad (2.45)$$

$$\hat{X}_{k+1} = [\hat{x}(k+1) \quad \hat{x}(k+2) \quad \cdots \quad \hat{x}(N-f+1)] \quad (2.46)$$

通过状态空间方程(2.47), 使用最小二乘方法, 可以估计系统矩阵:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{k+1} \\ Y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_k \\ U_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

式中, ρ_w 和 ρ_v 是残差矩阵。

而 Q 、 S 、 R 可以从是(2.48)得到:

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} = E \left[\begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_w^T & \rho_v^T \end{pmatrix} \right] \quad (2.48)$$

(2) 方法 2

先估计系统的增广观测矩阵 $\hat{\Gamma}_i$, 则 A 和 C 可以从直接增广观测矩阵的结构中提取得到:

由式(2.38)可知系统增广观测矩阵 Γ_i 表达式如下:

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

我们定义 $\bar{\Gamma}_i$ 为不包含前 l 行的 $\hat{\Gamma}_i$ 矩阵, 而 $\underline{\Gamma}_i$ 为不包含后 l 行的 Γ_i 矩阵。即:

$$\bar{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-2} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

由此可得:

$$A = (\underline{\hat{\Gamma}}_i)^\dagger \bar{\hat{\Gamma}}_i \quad (2.51)$$

其中, $(\bullet)^\dagger$ 表示为矩阵 \bullet 的 Moore-Penrose 伪逆。 $\bar{\hat{\Gamma}}_i$ 为不包含前 l 行的 $\hat{\Gamma}_i$ 估计矩阵, 而 $\underline{\hat{\Gamma}}_i$ 为不包含后 l 行的 $\hat{\Gamma}_i$ 估计矩阵。

矩阵 C 直接取为 $\hat{\Gamma}_i$ 的前 m 行:

$$C = \hat{\Gamma}_i(1:m,:) \quad (2.52)$$

在估计矩阵 A 和 C 后，通过 $\hat{\Gamma}_i$ 可以估计 Toeplitz 矩阵 \hat{H}_i 。利用最小二乘法估计 (B, D) ，进而可以估计其他矩阵 (Q, S, R) 。

因此，子空间辨识的主要目标是如何使用输入输出数据来估计状态矩阵或者增广观测矩阵。

本节介绍三种典型的子空间辨识方法。为了能获得统一的框架，各算法都使用过程形式的状态空间方程。在子空间辨识中，如何选择最优的输入信号是一个目前都没有解决的问题。目前有一些文献提及如何选择激励信号来进行子空间辨识：首先，输入信号必须满足一定的持续激励。其次，为了避免产生数值问题并且能够更好的确定系统的阶次，输入信号应该使得各通道输出没有相关性。这里假设选择的激励输入信号满足的持续激励阶次最少为： $2i$ 。

2.3.2.3 N4SID

由 Van Overschee 和 De Moor^[21]提出的 N4SID 算法是子空间辨识中最有代表性的。在 MATLAB 的辨识工具箱中，子空间方法的命令是 ‘n4sid’。Van Overschee 和 De Moor 将对象分为确定性系统、随机系统和确定随机联合系统。确定系统为 $w(k) = 0$ 和 $v(k) = 0$ 。随机系统则为 $u(k) = 0$ 。确定随机联合系统为 $w(k) \neq 0$ 、 $v(k) \neq 0$ 、 $u(k) \neq 0$ 。

这里，直接讨论确定随机联合系统：

$$Y_f /_{U_f} Z_p = \Gamma_f X_f /_{U_f} Z_p + H_f U_f /_{U_f} Z_p + G_f W_f /_{U_f} Z_p + V_f /_{U_f} Z_p \quad (2.53)$$

其中 $Z_p = \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \end{bmatrix}$ ，由斜投影的性质可知：

$$U_f /_{U_f} Z_p = 0 \quad (2.54)$$

从 2.2.3 节中假设 3) 中可以得到，未来的噪声 W_f 、 V_f 与未来输入 U_f 不相关，因此当 N 足够大时，可得：

$$W_f /_{U_f} Z_p = 0 \quad (2.55)$$

$$V_f /_{U_f} Z_p = 0 \quad (2.56)$$

因此，等式(2.53)变成：

$$Y_f /_{U_f} Z_p = \Gamma_f X_f /_{U_f} Z_p \quad (2.57)$$

将 $X_f /_{U_f} Z_p$ 写成如下形式：

$$\hat{X}_f = X_f /_{U_f} Z_p \quad (2.58)$$

则 $Y_f /_{U_f} Z_p = \Gamma_f \hat{X}_f$ 。对 $Y_f /_{U_f} Z_p$ 进行 SVD，可得：

$$Y_f /_{U_f} Z_p = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

选择奇异值相对较大向量组成 U_1 和 Λ_1 ，并可由此估计系统的阶次。假设 $\text{rank}(\Lambda_1) = n$ 。由 2.2.3 节假设 1) 可知，增广观测矩阵 Γ_f 为列满秩并且 \hat{X}_f 为行满秩。因此，估计 $\hat{\Gamma}_f$ 和 \hat{X}_f 可由式(2.60、2.61)估计：

$$\hat{\Gamma}_f = U_1 \Lambda_1^{1/2} \quad (2.60)$$

$$\hat{X}_f = \Lambda_1^{1/2} V_1 \quad (2.61)$$

2.3.2.4 MOESP

针对不同的噪声情况，MOESP 算法有 5 种不同的变形。其中，基本 MOESP(Elementary MOESP, EM)，普通 MOESP(Ordinary MOESP, OM)算法由 Verhaegen 和 Dewilde^[22]于 1992 年提出。这两个算法主要针对确定性系统。为了解决输出测量噪声问题，Verhaegen^[23]提出了 MOESP 算法的另外一个变形(PI MOESP)。Verhaegen^[24]补充了另外一个算法(PO MOESP)用来解决过程噪声和输出测量噪声。PO-EIV 算法^[25]则用来解决变量含噪声问题。为了与 N4SID 方法保持一致，这里我们主要讨论 PO MOESP 算法。PO MOESP 计算步骤如下：

首先，进行以下 QR 分解：

$$\begin{bmatrix} U_f \\ Y_p \\ U_p \\ Y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

当 N 趋向于无穷时, 则由此可得:

$$\begin{bmatrix} L_{42} & L_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix} = \Gamma_f \hat{X}_f \quad (2.63)$$

由此通过 SVD 可以得到增广观测矩阵和状态空间向量的估计。

PO MOESP 算法也可以用几何空间进行解释, 在等式(2.39)两边投影至 U_f^\perp 的行空间, 可得:

$$Y_f / U_f^\perp = \Gamma_f X_f / U_f^\perp + H_f U_f / U_f^\perp + G_f W_f / U_f^\perp + V_f / U_f^\perp \quad (2.64)$$

在 2.2.3 节假设 1-3 成立的条件下, 有正交投影性质可得 $U_f / U_f^\perp = 0$ 、 $W_f / U_f^\perp = W_f$ 、 $V_f / U_f^\perp = V_f$ 。为了消除噪声的影响, 将等式(2.64)在过去的输入输出行空间进行正交投影:

$$(Y_f / U_f^\perp) / Z_p = (\Gamma_f X_f / U_f^\perp) / Z_p + G_f W_f / Z_p + V_f / Z_p \quad (2.65)$$

由于未来噪声与过去的输入输出不相关, 则 $G_f W_f / Z_p = V_f / Z_p = 0$ 。由此可得:

$$(Y_f / U_f^\perp) / Z_p = (\Gamma_f X_f / U_f^\perp) / Z_p \quad (2.66)$$

而等式(2.62)中的 QR 分解则为上式的具体实现。

2.3.2.5 CVA

CVA 算法有 Larimore 于 1990 年提出^[26]。CVA 算法是三种算法中的辨识性能最好的。CVA 可以理解成一个广义的奇异值分解(Generalized SVD)。

首先, 介绍主立角和主方向, 假设矩阵 $A \in R^{m \times n}$ 与矩阵 $B \in R^{l \times n}$, 进行如下 SVD 分解:

$$A^T(AA^T)^\dagger AB^T(BB^T)^\dagger B = O\Lambda P^T \quad (2.67)$$

A 的行空间与 B 的行空间之间的主方向等于 O^T 和 P^T 的行向量。 A 的行空间与 B 的行空间之间的主立角的余弦值等于 SVD 的奇异值，即 Λ 。可以用 (2.68) 表示：

$$\begin{aligned} [\mathcal{A} \prec B] &\triangleq O^T \\ [A \prec \mathcal{B}] &\triangleq P^T \\ [A \prec B] &\triangleq \Lambda \end{aligned} \quad (2.68)$$

这里 $\mathcal{A} \prec B$ 表示在 A 的行空间上的主方向矩阵， $A \prec \mathcal{B}$ 表示在 B 的行空间上的主方向矩阵， $A \prec B$ 表示 A 的行空间与 B 的行空间之间的主立角的余弦值则等于奇异值的矩阵。

Larimore 分析了过去输入输出 Z_p 在未来输入的补空间 U_f^\perp 上的投影与未来输出在未来输入的补空间 U_f^\perp 上的投影之间的典型相关性，得出式 (2.69)：

$$[\mathcal{X}_p / \mathcal{Z} \prec Y_f / U_f^\perp] = X_f / U_f^\perp \quad (2.69)$$

与 $\mathcal{X}_p / \mathcal{Z} \prec Y_f / U_f^\perp$ 的 SVD 相结合，取其 n 个较大的奇异值作为系统的阶次，可以得到状态空间向量的估计：

$$\hat{X}_f = \Lambda_n^{1/2} V_n^T \quad (2.70)$$

由此与其他辨识算法一样，可以提取系统矩阵。

2.3.2.6 统一框架

虽然 N4SID、MOESP、CVA 算法从不同的角度进行辨识建模。如何用一个统一的辨识框架包括以上算法将是一个有趣的问题。Van Overschee 和 De Moor^[21] 从计算的角度分析了 N4SID、CVA、MOESP 方法的相似点，并给出了这 3 种算法的统一框架。基于此框架，上述 3 种方法具有相似的计算步骤，只是应用了不同的权重矩阵。这里，简单介绍 Van Overschee 和 De Moor 提出的框架的主要计算步骤。

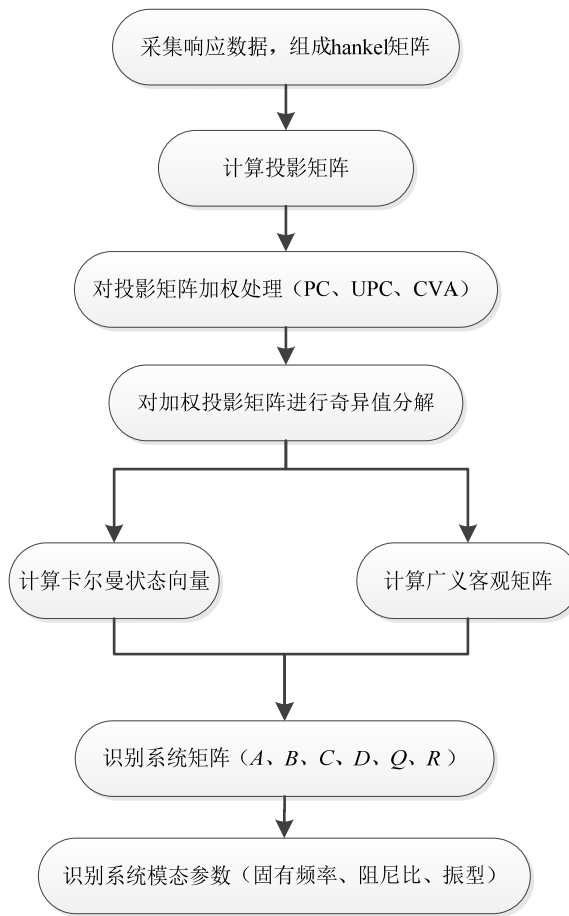


图 2.4 子空间方法识别流程图

第一步：先计算一下斜投影：

$$\Phi = Y_f /_{U_f} Z_p \quad (2.71)$$

第二步：选择权重矩阵 W_1 和 W_2 ：

$$\Upsilon = W_1 \Phi W_2 \quad (2.72)$$

第三步：进行 SVD，将其较大奇异值的个数作为系统阶次，即取 Λ_1 的阶次：

$$\Upsilon = [O_1 \quad O_2] \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

第四步：从上式得到增广观测矩阵和状态向量的估计：

$$\hat{\Gamma}_f = W_1^{-1} O_1 \Lambda_1^{1/2} \quad (2.74)$$

$$\hat{X}_f = \Gamma_f^\dagger \Phi \quad (2.75)$$

第五步：由上面的增广观测矩阵或者状态向量的估计 $\hat{\Gamma}_f$ 或 \hat{X}_f ，提取系统矩阵。

针对不同的子空间辨识算法使用不同的权重矩阵，但是权重矩阵必须满足以下条件：1) W_1 不能使得 $W_1 \Gamma_f$ 降秩，即 $\text{rank}(W_1 \Gamma_f) = n$ ；2) W_2 不能使得 $X_f / U_f Z_p W_2$ 降秩，即 $\text{rank}(X_f / U_f Z_p W_2) = \text{rank}(X_f / U_f Z_p)$ 。Van Overschee 和 De Moor^[21]归纳了 N4SID、CVA、MOESP 使用的权重矩阵，如下表所示：

表格 2.1 典型算法的权重矩阵

算法	W_1	W_2
N4SID	I	I
MOESP	I	$\Pi_{U_f^\perp}$
CVA	$[(Y_f / U_f^\perp)^T (Y_f / U_f^\perp)]^{1/2}$	$\Pi_{U_f^\perp}$

2.4 动力系统参数提取

对连续的系统矩阵特征值分解：

$$A_c = \psi_c \Lambda_c \psi_c^{-1} \quad (2.76)$$

式中， $\Lambda_c = \text{diag}(\lambda_{ci})$ 是 $2n \times 2n$ 阶对角矩阵，是包含连续时间复特征值的对角矩阵； ψ_c 是 $2n \times 2n$ 阶连续时间特征向量矩阵。

有状态空间公式，连续时间系统矩阵 A_c 可以表示为：

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}G \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

由 $|A_c - \lambda I| = 0$ 可得连续系统矩阵的特征值为：

$$\lambda = -\frac{G}{2M} \pm i\sqrt{\frac{K}{M} - \frac{G^2}{4M^2}} \quad (2.78)$$

式中, K 、 M 、 G 分别代表系统模态刚度、模态质量和模态阻尼矩阵。

进一步可将特征值表示为共轭对:

$$\lambda_{ci}, \lambda_{ci}^* = -\xi_i \omega_i \pm i\omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (2.79)$$

式中, $\xi_i = \frac{G}{G_{cr}} = \frac{G}{2\sqrt{KM}}$ 是阻尼比, G_{cr} 是临界阻尼, $\omega_i = \sqrt{\frac{K}{M}}$ 是圆频率。

但是时域子空间系统识别法中, 识别得到的系统矩阵 A 为离散的系统矩阵。将离散系统矩阵 A 也进行特征值分解:

$$A = \psi \Lambda \psi^{-1} \quad (2.80)$$

式中, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ 是 $2n \times 2n$ 阶包含离散时间复特征值的对角矩阵; ψ 是 $2n \times 2n$ 阶离散时间特征向量矩阵。

由前所述, 离散系统矩阵 A 和连续系统矩阵 A_c 之间的关系为:

$$A = e^{A_c \Delta t} \quad (2.81)$$

将式(2.76)代入(2.81), 可以得到:

$$A = e^{\psi_c (\Lambda_c \Delta t) \psi_c^{-1}} = \psi_c e^{\Lambda_c \Delta t} \psi_c^{-1} \quad (2.82)$$

对比式(2.23)和式(2.25), 我们可以很容易知道 A 和 A_c 有相同的特征向量, 离散系统矩阵的特征值为并且他们二者的特征值有如下的关系:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= e^{\lambda_{ci} \Delta t} \\ \lambda_{ci} &= \frac{\ln \lambda_i}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.83)$$

模态振型由下式计算:

$$\Phi = C\psi \quad (2.84)$$

可见，只要识别出了 A 和 C 就可以提取出结构的模态参数（频率、振型和阻尼比）。

2.5 数值讨论

本节通过一个线性系统辨识算例和一个非线性系统辨识算例，分析本章所述子空间识别法在系统辨识中效果和问题。

采用 MATLAB 程序中的 `simulink` 模块建立结构模型，然后对模型加入白噪声进行激励，生成相应动力响应时程信息。再通过本章节算法，利用输入输出数据分析结构的动力特性，固有结构本身的系统参数。

经过多次计算实践，发现子空间法中 MOESP 法的辨识效果更好，故本文算例均采用 MOESP 法进行计算。

2.5.1 线性系统辨识

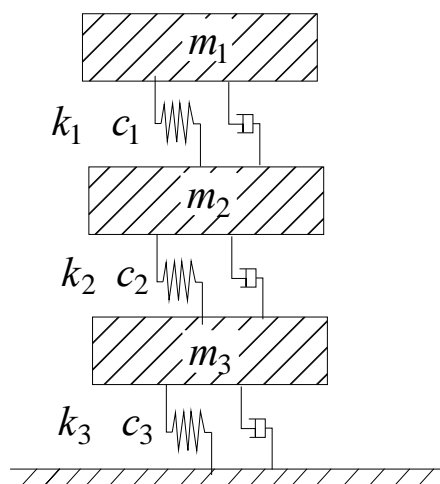


图 2.5 多自由度线性系统

假设具有三个集中质点的多自由度动力系统，该集中质点上具有一个水平自由度，如图 2.5 所示。结构各层的质量和刚度信息如表格 2.2，阻尼采用瑞利阻尼 $G = 0.919M + 0.0021K$ 。

表格 2.2 线性多自由度结构信息

楼层	$m(\text{kg})$	$k(\text{N/m})$
第一层	1800	6×10^5
第二层	1500	6×10^5
第三层	1200	6×10^5

选取均值为 0、均方根为 1 的高斯随机波作用于此多自由度线性系统的集中

质点上，作用时间为 10 秒，时间步长为 0.02 秒，结构响应根据四阶四段龙格库塔(Runge-Kutta)法计算得到。系统的加速度、速度和位移时程如图 2.6~图 2.8 所示。以施加于系统各自由度的外加荷载时程为系统的输入 $u(t)$ ，以系统的位移时程响应为系统的输出 $y(t)$ ，系统阶次 $2n = 6$ ，利用线性子空间法对该系统进行辨识，辨识结果如表格 2.3 所示。

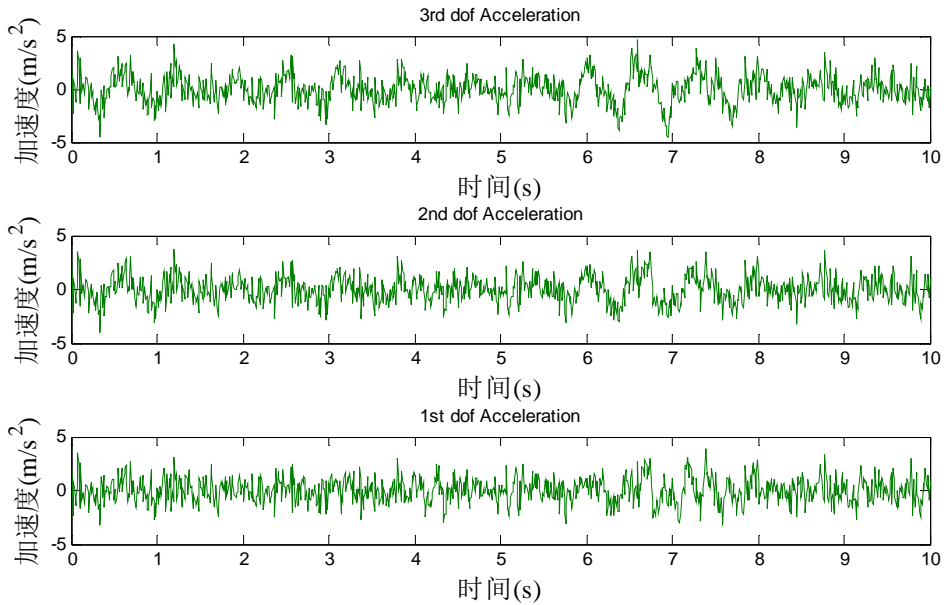


图 2.6 线性系统加速度时程

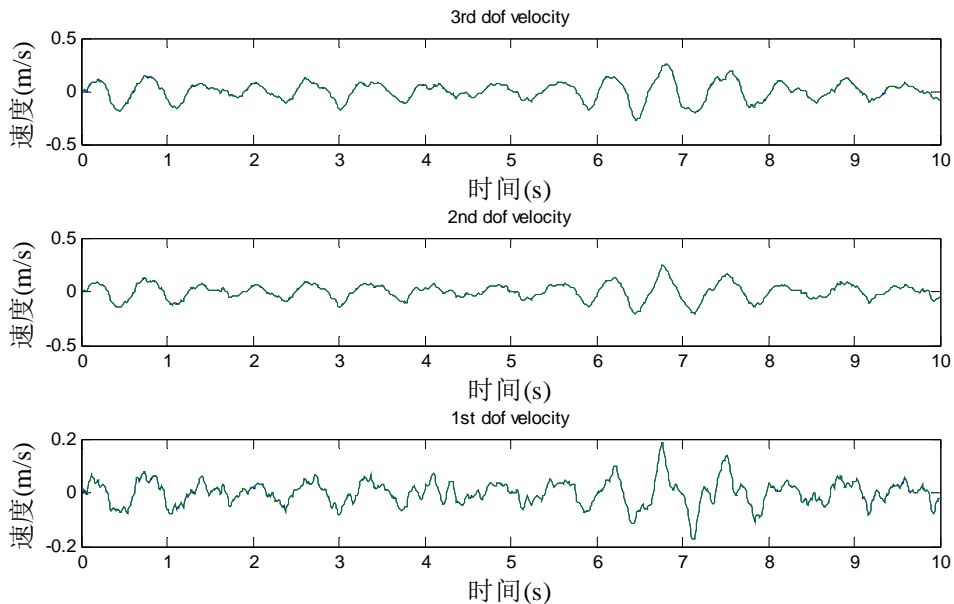


图 2.7 线性系统速度时程

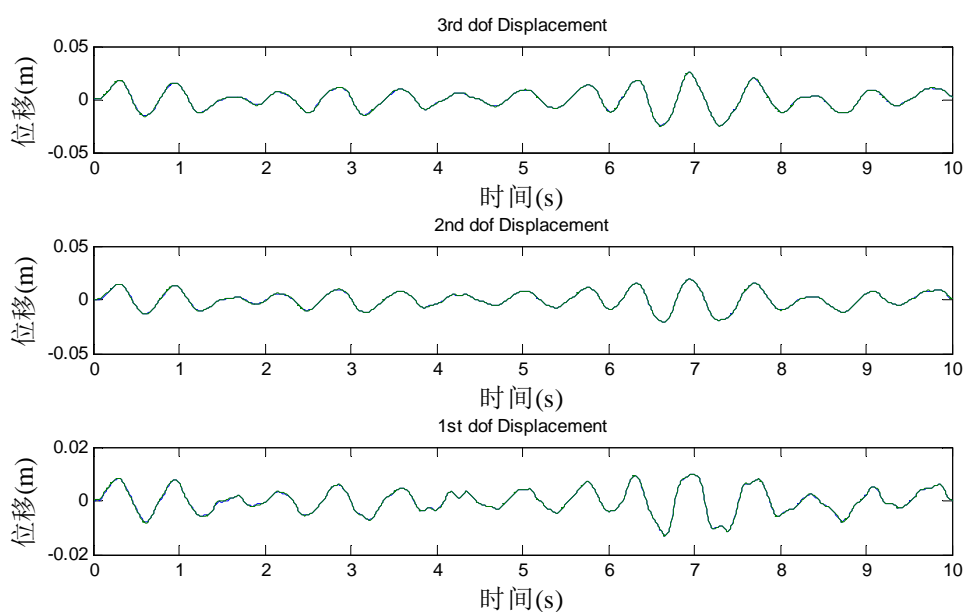


图 2.8 线性系统位移时程

表格 2.3 线性多自由度系统辨识结果

辨识项目		第一阶	第二阶	第三阶
自振频率 (rad/s)	理论值	9.30	24.57	35.73
	辨识值	9.30	24.57	35.72
阻尼比	理论值	0.059	0.045	0.050
	辨识值	0.059	0.045	0.050
振型				

由表格 2.3 系统辨识结果来看，子空间辨识法对线性多自由度结构的系统辨识能有达到很好的辨识效果。无噪声的情况下，基本能够还原系统的真实系统参数。

2.5.2 非线性系统辨识

假设具有三个集中质点的多自由度动力系统，该集中质点上具有一个水平自

由度，在该结构上安装有能够提供非线性恢复力的非线性构件，如图 2.9 所示。

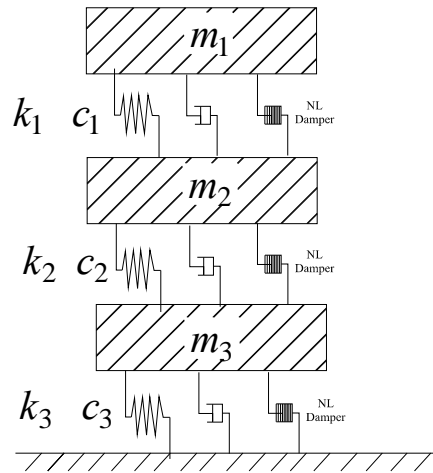


图 2.9 多自由度非线性系统

其中的非线性构件设定为速度相关型阻尼器，即阻尼器模型为 $F_{nlj}(t) = \mu_j \Delta_v^\alpha(t)$ 。结构各层的质量、刚度和非线性强度系数信息如表格 2.4，固有体系阻尼采用瑞利阻尼 $G = 0.919M + 0.0021K$ 。其中，固有结构体系与 2.5.1 节线性系统相同。

表格 2.4 非线性多自由度结构信息

楼层	$m(\text{kg})$	$k(\text{N/m})$	$\mu_{nlj}(\text{N} \cdot \text{s}^{0.3} / \text{m}^{0.3})$	α
第一层	1800	6×10^5	350	0.3
第二层	1500	6×10^5	400	0.3
第三层	1200	6×10^5	450	0.3

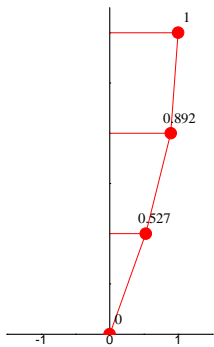
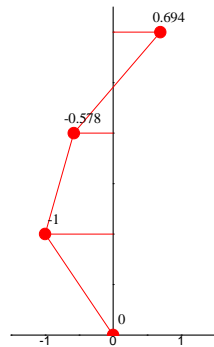
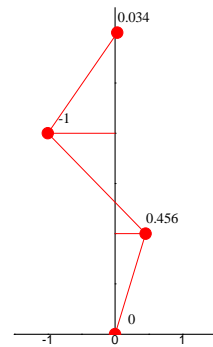
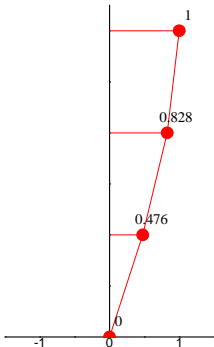
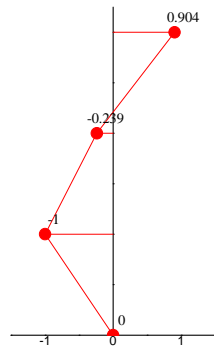
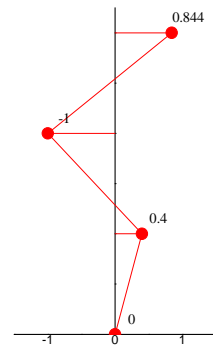
为了验证子空间法对非线性结构进行辨识中会存在的问题，本部分的数值模拟采用强度不同的多种激励波进行激励，使得消能器参与结构输出响应的程度不同，获取多组输入输出信号进行辨识，查看其辨识效果。

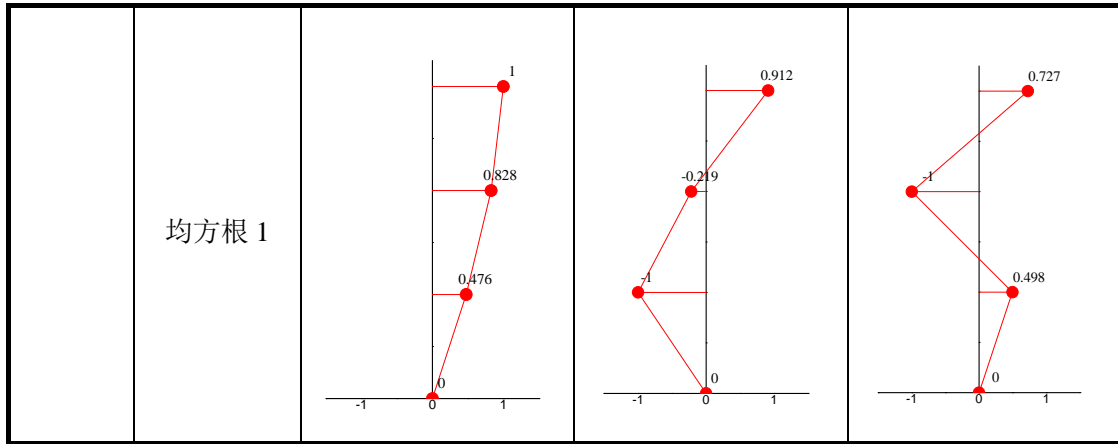
依次选取均方根为 0.05、1、5，均值为 0 的高斯随机波作用于多自由度非线性系统的集中质点上，作用时间为 50 秒，时间步长为 0.02 秒，结构响应根据四阶四段龙格库塔(Runge-Kutta)法计算得到。不同强度激励信号下各层消能器所承担的层间剪力占各层总剪力的比例如表格 2.5 所示，其统计方法为各层消能器提供的剪力时程的 RMS 值，与各层总剪力时程的 RMS 值的比值。同样，以施加于系统各自由度的外加荷载时程为系统的输入 $u(t)$ ，以系统的位移时程响应为系统的输出 $y(t)$ ，系统阶次 $2n = 6$ ，利用线性子空间法对该系统进行辨识，系统辨识结果如表格 2.6。

表格 2.5 不同激励信号下消能器提供的层间剪力占比

信号强度	第一层	第二层	第三层
均方根 0.1	33.9%	39.9%	61.5%
均方根 0.5	14.3%	8.6%	20.5%
均方根 1	9.3%	6.3%	12.2%

表格 2.6 非线性多自由度系统辨识结果

辨识项目		第一阶	第二阶	第三阶
自振 频率 (rad/s)	均方根 0.1	9.33	23.65	30.95
	均方根 0.5	9.28	24.85	36.48
	均方根 1	9.30	24.58	35.21
阻尼比	均方根 0.1	0.25	0.59	1.00
	均方根 0.5	0.11	0.22	0.28
	均方根 1	0.09	0.14	0.19
振型	均方根 0.1			
	均方根 0.5			



由表格 2.6 辨识结果所示，施加于该非线性系统激励信号的不同，采用常规子空间法进行拟线性辨识得到的系统自振频率基本保持稳定，但是阻尼比和振型会随输入信号强度不同，产生很大的变化。具体表现为：小震情况下（即信号强度均方根为 0.1），消能器提供的层间剪力占层间总剪力比值大于 30%，显著增加了结构体系的附加阻尼，使得辨识结果中阻尼比偏大；中震和大震情况下（即信号强度均方根为 0.5 和 1），随信号强度增大消能器提供的层间剪力占层间总剪力比值减小，且趋于稳定，小于 15%，辨识结果趋于稳定。根据辨识结果可以看出，输入信号强度不同，采用常规线性辨识方法对非线性结构进行拟线性辨识，获得的系统自振频率保持稳定，能够反映系统真实信息，但是阻尼比和振型的辨识结果不具有稳定性，不能够反映结构的真实系统信息。

2.6 本章小结

本章首先介绍了子空间辨识方法中常用的两种状态空间描述形式以及子空间辨识算法中常用到的正交投影、斜向投影等数学基础。在此之上，简单的回顾了三种经典的子空间辨识算法和其统一的辨识框架。

然而，本章数值讨论部分算例说明常规子空间辨识算法在线性结构体系的系统识别中能够达到良好的辨识效果。但是，对于非线性系统采用线性子空间法进行等效线性化辨识，自振频率的辨识结果稳定，与真实值误差较小。但是阻尼比和振型的辨识结果，会随系统输入的强度不同而发生变化，辨识结果不具备良好的工程指导意义。如何应用子空间识别算法对非线性体系进行辨识，将在下一章中进行论述。

第3章 基于输出反馈的子空间法非线性系统识别

3.1 引言

本章将要论述了基于输出反馈的子空间非线性动力系统识别方法。通常我们可以把消能减震结构分为两部分。一部分为梁柱楼板组成的固有结构本身，称之为固有结构体系。另一部分为附加消能器，称之为附加结构体系。一般认为，消能减震结构的固有结构部分在不发生破坏，且外界激励力较小情况下，结构未进入非线性阶段，其动力特性表现为线性系统。附加结构部分为固有结构提供了附加阻尼和附加刚度，提高了结构的耗能能力，同时也造成了结构产生非线性特性^[27]。本文针对消能减震结构的系统识别目的即在于通过辨识附加结构产生的非线性动力特性，从而识别出固有结构本身的线性动力特性。

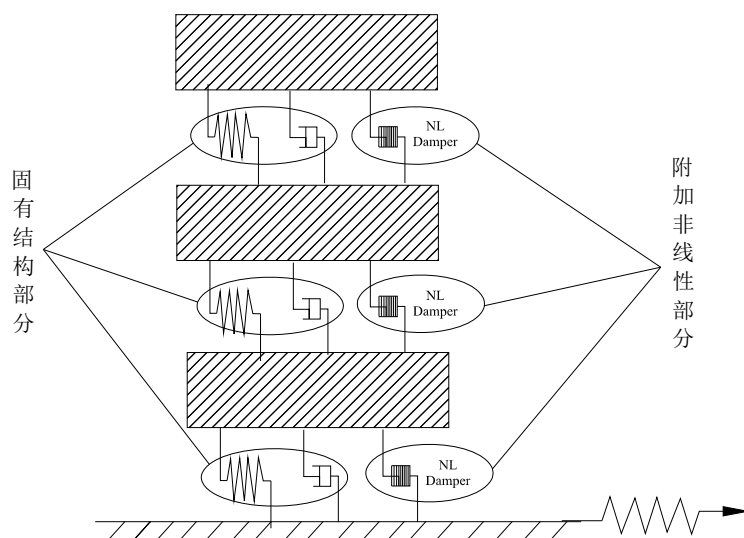


图 3.1 非线性结构体系构成

针对前文所述的非线性识别目的，本文计算思路如图 3.1 所示。首先，建立系统非线性带参数数值模型，利用系统的输出反馈，将系统非线性部分转化为系统输入。其次，将结构中基于数值模型和输出反馈的非线性成分，同外界激励一起作为系统输入，输入到具有线性动力特性的固有结构系统中。最后，通过子空间法识别出的系统矩阵，求解出非线性数值模型的未知参数，以及固有结构本身的动力特性。

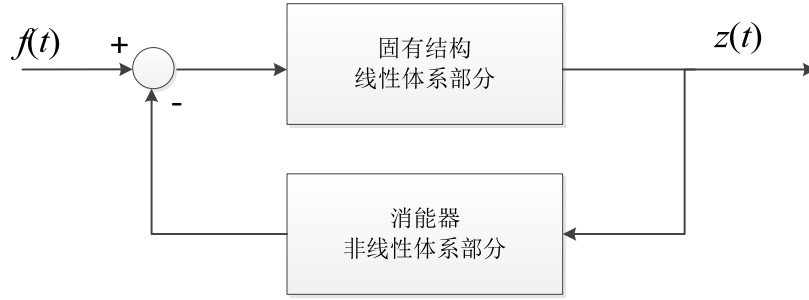


图 3.2 非线性结构闭环系统

3.2 非线性系统状态空间描述

假设系统具有 n 个自由度，部分或者全部自由度之间具有集中非线性弹簧或阻尼装置。非线性系统动力方程可表示为如(3.1)所示：

$$M\ddot{z}(t) + G\dot{z}(t) + Kz(t) + \sum_{j=1}^p \mu_j L_{nj} g_j(t) = f(t) \quad (3.1)$$

式中， M 、 G 和 K 分别为固有结构本身的质量、阻尼和刚度矩阵； $z(t)$ 为 t 时刻系统各自由度组成的位移向量； $f(t)$ 为 t 时刻系统作用于 n 个自由度的外力向量； $\sum_{j=1}^p \mu_j L_{nj} g_j(t)$ 为系统的非线性部分； p 为系统非线性类型的种类数； μ_j 为未知带识别非线性系数； $g_j(t)$ 为标量非线性类型的数值模型； L_{nj} 为非线性类型的位置向量，其元素取值为 1、-1 或 0。

将式(3.1)中的非线性部分移到等式右侧，如式(3.2)：

$$M\ddot{z}(t) + G\dot{z}(t) + Kz(t) = f(t) - \sum_{j=1}^p \mu_j L_{nj} g_j(t) = f(t) + f_{nl}(t) \quad (3.2)$$

该式可以理解为固有结构在外力和非线性力的合力作用下的动力方程。令系统的状态向量为 $x = [z \quad \dot{z}]^T$ ，系统输入向量为 $u = [f(t) \quad -g_1(t) \quad \cdots \quad -g_p(t)]^T$ ，系统状态空间方程可以写成式(3.3)：

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{h \times h} & I_{h \times h} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{h \times h} & \mathbf{0}_{h \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{h \times 1} \\ M^{-1} & M^{-1}\mu_1 L_{n1} & \cdots & M^{-1}\mu_p L_{np} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(t) \\ -g_1(t) \\ \vdots \\ -g_p(t) \end{Bmatrix} \\
 y &= \begin{bmatrix} I_{h \times h} & \mathbf{0}_{h \times h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{h \times h} & \mathbf{0}_{h \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{h \times 1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(t) \\ -g_1(t) \\ \vdots \\ -g_p(t) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中, A_c 、 B_c 、 C 和 D 表示为

$$\begin{aligned}
 A_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{h \times h} & I_{h \times h} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}G \end{bmatrix} \\
 B_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{h \times h} & \mathbf{0}_{h \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{h \times 1} \\ M^{-1} & M^{-1}\mu_1 L_{n1} & \cdots & M^{-1}\mu_p L_{np} \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} I_{h \times h} & \mathbf{0}_{h \times h} \end{bmatrix} \\
 D &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{h \times h} & \mathbf{0}_{h \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{h \times 1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3.3 子空间法非线性系统识别

由 3.2 节的论述将非线性系统识别问题转化为线性系统识别问题。下面对线性状态空间方程进行分析。

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= A_c x + B_c u \\
 y &= Cx + Du
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

对状态空间方程进行傅里叶变换, 得到式(3.5)。

$$\begin{aligned}
 i\omega X(\omega) &= A_c X(\omega) + B_c U(\omega) \\
 Y(\omega) &= CX(\omega) + DU(\omega)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中, $i = \sqrt{-1}$ 。

进而可得到系统输入与输出关系:

$$Y(\omega) = \left[D + C(i\omega I - A_c)^{-1} B_c \right] U(\omega) \quad (3.6)$$

$$H_E(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} = D + C(i\omega I - A_c)^{-1} B_c \quad (3.7)$$

其中, $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$, $U(\omega) = \mathcal{F}[u(t)]$ 。

由 2.3.2 节子空间识别方法统一框架所述,

第一步: 先计算一下斜投影:

$$\Phi = Y_f /_{U_f} Z_p \quad (3.8)$$

第二步: 选择权重矩阵 W_1 和 W_2 :

$$\Upsilon = W_1 \Phi W_2 \quad (3.9)$$

第三步: 进行 SVD, 将其较大奇异值的个数作为系统阶次, 即取 Λ_1 的阶次:

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} O_1 & O_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

第四步: 从上式得到增广观测矩阵和状态向量的估计:

$$\hat{\Gamma}_f = W_1^{-1} O_1 \Lambda_1^{1/2} \quad (3.11)$$

$$\hat{X}_f = \Gamma_f^\dagger \Phi \quad (3.12)$$

其中, 根据所使用具体求解斜投影计算的方法不同, 如 N4SID、MOESP、CVA, 计算第二步时需要不同的左右加权矩阵 W_1 、 W_2 。以通过增广观测矩阵 $\hat{\Gamma}_i$ 推导 A 、 B 、 C 、 D 为例,

$$\begin{aligned} A &= (\hat{\Gamma}_i)^\dagger \hat{\Gamma}_i \\ C &= \hat{\Gamma}_i(1:m,:) \end{aligned} \quad (3.13)$$

可以看出，由于所选用的加权矩阵不同，所求得状态空间矩阵也不相同。但是不同计算方法所得到的状态空间矩阵可以通过相似变换相互转换^[28]。用可逆矩阵 T 来表示这个变换：

$$\begin{aligned} A &= T\hat{A}T^{-1} & B &= T\hat{B} \\ C &= \hat{C}T^{-1} & D &= \hat{D} \end{aligned} \quad (3.14)$$

式中，符号 $\hat{\bullet}$ 表示估计矩阵。实际计算中，可以推得到传递函数 $H_E(\omega)$ 并不随矩阵 T 而变化，即 $H_E(\omega)$ 为不变矩阵。由式(3.7)得到传递函数 $H_E(\omega)$ 可以表示为：

$$H_E(\omega) = D + C(i\omega I - A_c)^{-1}B_c \quad (3.15)$$

由第二章式(2.81)所述，可知连续时间状态空间矩阵和离散时间状态空间矩阵转换关系为：

$$\begin{aligned} A &= e^{A_c\Delta t} \in R^{n \times n} \\ B &= (e^{A_c\Delta t} - I)A_c^{-1}B_c = (A - I)A_c^{-1}B_c \in R^{n \times m} \end{aligned} \quad (3.16)$$

由(3.14)、(3.16)可推导如下关系：

$$\begin{aligned} \hat{B}_c &= \hat{A}_c(\hat{A} - I)^{-1}\hat{B} \\ &= T^{-1}A_cT(T^{-1}AT - T^{-1}IT)^{-1}T^{-1}B \\ &= T^{-1}A_cTT^{-1}(A - I)^{-1}TT^{-1}B \\ &= T^{-1}A_c(A - I)^{-1}B \end{aligned} \quad (3.17)$$

则(3.15)可推导得：

$$\begin{aligned} \hat{H}_E(\omega) &= \hat{D} + \hat{C}(i\omega I - \hat{A}_c)^{-1}\hat{B}_c \\ &= D + CTT^{-1}(i\omega I - A_c)^{-1}TT^{-1}A_c(A - I)^{-1}B \\ &= D + C(i\omega I - A_c)^{-1}B_c = H(\omega) \end{aligned} \quad (3.18)$$

可知， $H_E(\omega)$ 的值与相似变换矩阵 T 无关。

令 $N = i\omega I - A_c$ ，展开式如：

$$N = i\omega I - A_c = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\omega I & -I \\ M^{-1}K & i\omega I + M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

令矩阵 N 的逆 N^{-1} 为:

$$\begin{aligned} P &= N^{-1} \\ &= (i\omega I - A_c)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_{11}^{-1}(I + N_{11}^{-1}N_{21}S^{-1}N_{12}) & -N_{11}^{-1}N_{12}(N_{22} - N_{21}N_{11}^{-1}N_{12})^{-1} \\ -N_{11}^{-1}N_{21}(N_{22} - N_{21}N_{11}^{-1}N_{12})^{-1} & (N_{22} - N_{21}N_{11}^{-1}N_{12})^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

则传递函数 $H_E(\omega)$ 可以写成如(3.21)形式:

$$\begin{aligned} H_E(\omega) &= D + C(i\omega I - A_c)^{-1}B_c \\ &= \mathbf{0}_{h \times (h+p)} + \begin{bmatrix} I_{h \times h} & \mathbf{0}_{h \times h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{h \times h} & \mathbf{0}_{h \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{h \times 1} \\ M^{-1} & M^{-1}\mu_1 L_{n1} & \cdots & M^{-1}\mu_p L_{np} \end{bmatrix} \\ &= P_{12}M^{-1} \begin{bmatrix} I & \mu_1 L_{n1} & \cdots & \mu_p L_{np} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中, 由式(3.20)得到 $P_{12} = -N_{11}^{-1}N_{12}(N_{22} - N_{21}N_{11}^{-1}N_{12})^{-1}$, 将式(3.19)相应项代入 P_{12} 得到:

$$\begin{aligned} P_{12} &= \frac{1}{i\omega} \left(M^{-1}C + i\omega I + M^{-1}K \frac{1}{i\omega} \right)^{-1} \\ &= (M^{-1}K + i\omega M^{-1}C - \omega^2 I)^{-1} \\ &= (K + i\omega C - \omega^2 M)^{-1} M \end{aligned} \quad (3.22)$$

将 P_{12} 代入式(3.21)得:

$$H_E(\omega) = \begin{bmatrix} H & H\mu_1 L_{n1} & \cdots & H\mu_p L_{np} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

其中, $H = H(\omega) = (K + i\omega C - \omega^2 M)^{-1}$ 。

当 $\omega=0$ 时, 传递函数 $H_E(0)$ 为式(3.23)形式:

$$\begin{aligned} H_E(0) &= D - CA_c^{-1}B_c \\ &= \begin{bmatrix} K^{-1} & K^{-1}\mu_1 L_{n1} & \cdots & K^{-1}\mu_p L_{np} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

故我们可以不通过计算出矩阵 T , 就能得到与包含系统相关的参数的传递矩阵 $H_E(0)$, 进而获得系统相关参数。

3.4 状态矩阵到物理参数映射

由 3.3 节的推导证明, 本节总结基于输出反馈的子空间法非线性识别法的框架如图 3.3 所示:

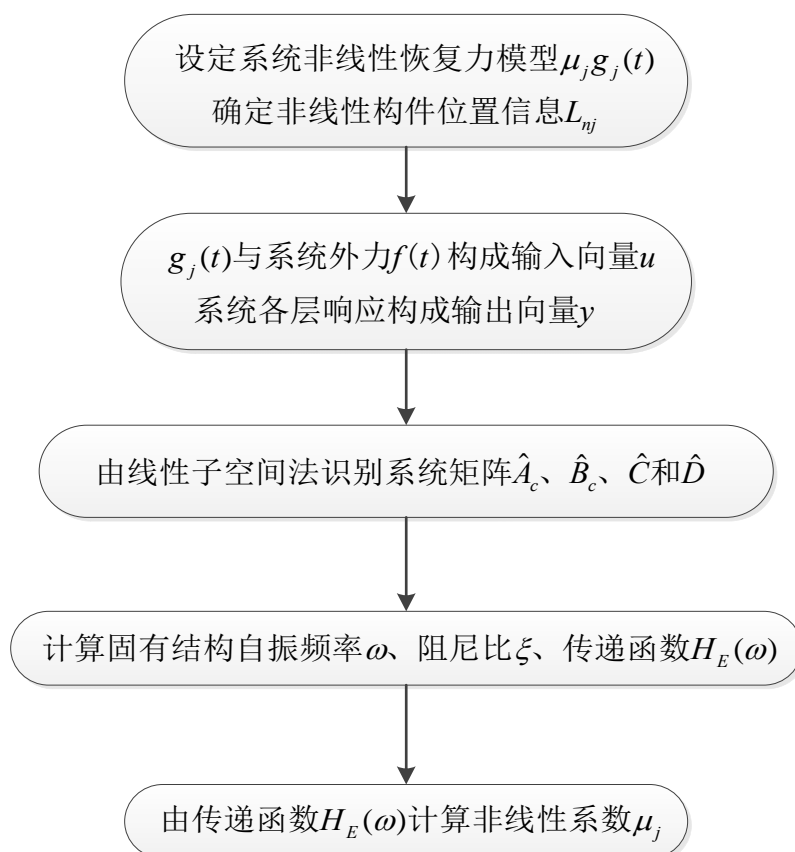


图 3.3 非线性系统子空间方法识别流程图

第一步, 假设系统的非线性恢复力由一组层间相对位移和相对速度构成幂级数多项式来表示, 用 $g_j(t)$ 表示:

第二步, 将非线性恢复力 $g_j(t)$ 与外界激励 $f(t)$ 组成的向量作为系统输入 $u = [f(t) \quad -g_1(t) \quad \cdots \quad -g_p(t)]^T$, 系统各自由度的位移响应向量 y 作为系统输出,

利用子空间法，获得系统状态空间估计矩阵 \hat{A}_c 、 \hat{B}_c 、 \hat{C} 和 \hat{D} ；

第三步，根据传递函数的不变性，将 \hat{A}_c 、 \hat{B}_c 、 \hat{C} 和 \hat{D} 代入传递函数公式(3.18)，

$$\begin{aligned} H_E(0) &= \hat{D} - \hat{C}\hat{A}_c^{-1}\hat{B}_c \\ &= D - CA_c^{-1}B_c \\ &= \begin{bmatrix} K^{-1} & K^{-1}\mu_1 L_{n1} & \cdots & K^{-1}\mu_p L_{np} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

进而获得非线性参数，以及固有系统相关参数；

第四步，通过识别得到的系统参数，模拟输出时程与实测输出时程进行对比验证。

3.5 数值验证

为了研究本文论述的非线性识别方法的可靠性和鲁棒性，本节讨论该方法对于不同的非线性系统（如达芬系统、分段线性系统）的非线性行为的识别能力。

3.5.1 方法简介

数值模拟的目的是要验证识别算法针对不同的非线性模型的可行性与适用性。采用 MATLAB 程序中的 simulink 模块，建立非线性结构模型，然后对模型高斯随机信号进行激励，生成相应动力响应时程信息。再通过本文前述算法，利用输入输出数据分析结构的动力特性，固有结构本身的系统参数。与直接由质量-弹簧-阻尼值计算得到的结构系统参数进行对比。

经过计算实践，发现子空间法中 MOESP 法的辨识效果更好，故本文算例均采用 MOESP 法进行计算。

3.5.2 达芬系统

本小节中，如图 3.4 中所示利用 simulink 模拟软件建立达芬非线性系统。达芬系统就是用达芬方程描述的动力系统，其非线性特性可以直接通过具有三次方特性的达芬振荡器表征，并取其三次方项对应的系数 k_{nl} 为 1.8×10^8 。

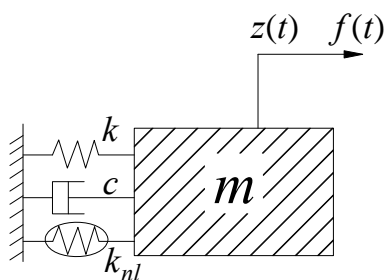


图 3.4 达芬系统

图 3.4 中所示的非线性系统的固有系统参数如表格 3.1 所示, 非线性的强度、类型和位置分别由参数 μ_1 、 $g_1(t)$ 、 L_{n1} 确定, 其中 $\mu_1=k_{nl}$, $g_1(t)=-z^3(t)$, 显然 $L_{n1}=1$ 。

表格 3.1 达芬系统参数

$m(\text{kg})$	$k(\text{N/m})$	$c(\text{N}\cdot\text{s/m})$	$k_{nl}(\text{N/m}^3)$
1500	6×10^4	1600	1.8×10^8

该系统动力学方程可以写为:

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) + k_{nl}z^3(t) = f(t) \quad (3.26)$$

其状态空间矩阵为:

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} & \frac{1}{m} & \frac{k_{nl}}{m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

由式(3.27)状态空间矩阵, 计算系统不变量 $H_E(\omega=0)$ 如式(3.28):

$$H_E(\omega=0) = D - CA_c^{-1}B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{c}{k} & -\frac{m}{k} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{k_{nl}}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & \frac{k_{nl}}{k} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

本节选取均值为 0、均方根为 1 的高斯白噪声作为系统输入信号, 作用时间

为 50 秒，时间步长为 0.02 秒，结构响应根据四阶四段龙格库塔(Runge-Kutta)法计算得到。通过 simulink 模型获得响应模拟输出信号。根据输入和输出信号，使用本论文所述方法进行系统识别，与数值计算结果对比，分析方法的可靠性。

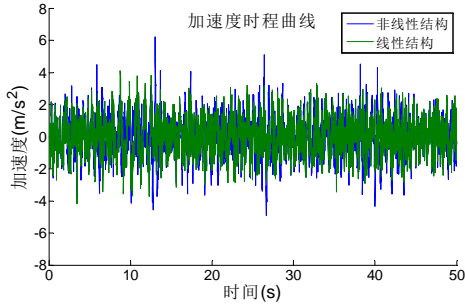


图 3.5 系统加速度响应时程

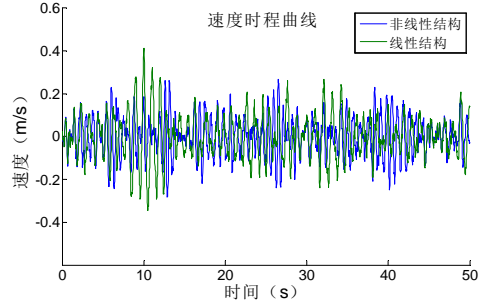


图 3.6 系统速度响应时程

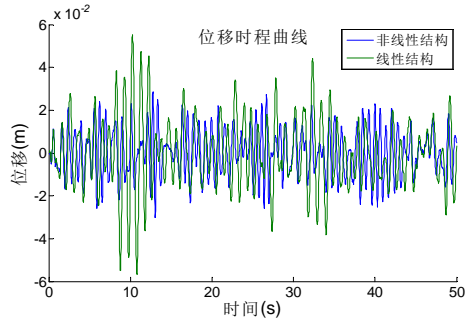


图 3.7 系统位移响应时程

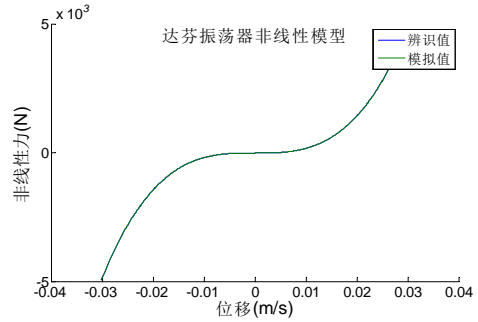


图 3.8 达芬振荡器非线性模型

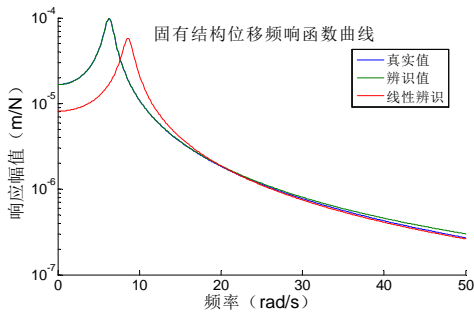


图 3.9 固有结构位移频响函数曲线

计算得 $\omega = 0$ 时，传递函数为 $H_E(\omega = 0) = [1.661 \times 10^{-5} \quad 2.996 \times 10^3]$ ，由式(3.28)

进而可求得非线性系数为 $\mu = \frac{2.996 \times 10^3}{1.661 \times 10^{-5}} = 1.804 \times 10^8$ 。响应固有体系结构信息的

理论计算值和辨识值如表 3.2 所示。

表格 3.2 达芬系统参数辨识结果

项目	固有结构圆频率(rad/s)	固有结构阻尼比	非线性系数
数值计算	6.32	0.084	1.8×10^8
子空间非线性辨识	6.32	0.084	1.804×10^8
拟线性辨识	8.63	0.071	—
非线性辨识误差分析	0.035%	-0.045%	0.21%

根据辨识结果可知,由于系统增加了位移相关型达芬振子,使固有结构系统增加了附加刚度,因而增大了系统的自振频率,如图 3.9 所示频响函数峰值右移。如果仍然按照常规线性子空间辨识法进行系统辨识,则不能得到固有结构系统的真实动力特性。非线性子空间法的应用,使得我们可以准确识别固有结构的动力特性,同时也可以将系统的非线性强度系数较为准确的辨识出来。

3.5.3 分段线性系统

作为一类比较特殊的非线性动力系统,分段线性系统中的非线性恢复力是系统相对速度的分段线性函数,根据分段部分采用的强度系数的差异性,分段线性模型具有不同的表现形式,几种典型的分段线性模型如图 3.10 所示,其中图 3.10(a)相当于存在不灵敏区域,图 3.10(b)相当于存在饱和区域,而图 3.10(c)相当于带间隙的多弹簧体系^[29]。

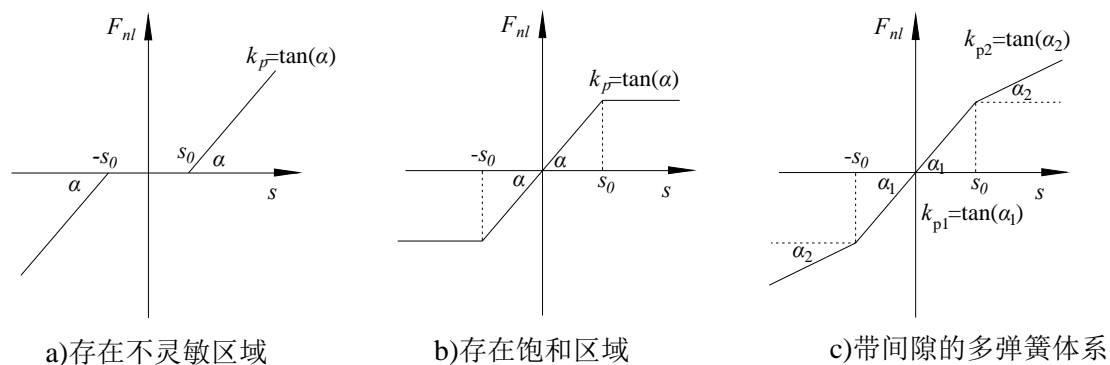


图 3.10 几种常见的分段线性模型

该模型可以用来模拟带间隙的非线性系统,其模型的恢复力表达式为:

$$F_{nl} = \begin{cases} (k_{p1} - k_{p2}) \times s_0 + k_{p2} \times s & s > s_0 \\ k_{p1} \times s & -s_0 \leq s \leq s_0 \\ -(k_{p1} - k_{p2}) \times s_0 + k_{p2} s & s < -s_0 \end{cases} \quad (3.29)$$

本小节采用图 3.11 所示的非线性系统。其中的非线性构件此时采用图 3.10(a)所示的分段线性模型。该分段线性模型系统参数如表格 3.3 所示。选取均值为 0、

均方根为 1 的高斯白噪声作为系统输入信号,作用时间为 50 秒,时间步长为 0.02 秒。现就此类非线性系统在高斯噪声信号的激励下的识别结果讨论如下。

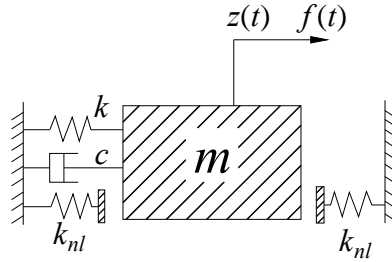


图 3.11 分段非线性系统

表格 3.3 分段线性模型系统参数

$m(\text{kg})$	$k(\text{N/m})$	$c(\text{N}\cdot\text{s/m})$	$s_0(\text{m})$	$k_{nl}(\text{N/m})$
1500	40000	800	0.0225	30000

该非线性系统的动力学方程可以写为:

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) + F_d(z) = f(t) \quad (3.30)$$

其中,非线性项定义为位移相关函数,如式(3.31):

$$\begin{aligned} F_d(z) &= 0 & |z| \leq s_0 \\ F_d(z) &= k_{nl}(z - s_0 \cdot \text{sgn}(z)) & |z| > s_0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

运用子空间法对数据进行辨识,取输入项 $g_j(z)$ 为,

$$\begin{aligned} g_j(z) &= 0 & |z(t)| \leq s_j \\ g_j(z) &= \mu_j(z - s_j \cdot \text{sgn}(z)) & |z(t)| > s_j \end{aligned} \quad (3.32)$$

为了能够准确判断系统的不敏感区间 s_0 ,由系统的位移时程响应曲线得到结构位移区间 $[0, \max(z)]$ ($\max(z) = 0.08\text{m}$),并将其划分为 8 个小的区间 $[s_j, s_{j+1}]$ ($s_1 = 0$),构建 8 个输入项 $g_j(z)$,与 $f(t)$ 共同构成输入向量。进而通过本文所述子空间辨识方法,获得各输入项 $g_j(z)$ 所对应的非线性强度系数。显然,若非线性强度系数 $\mu_{nl} \leq 0$,则该项舍去。对于 $\mu_{nl} > 0$ 的输入项,进一步计算 $\mu_{nl}g_j(z)$ 的系统的输入力 RMS 值,若该项所对应的 RMS 值小于一定阈值,则说明该项对系

统响应贡献不大,可以舍去。根据剩余输入项,判断出不敏感区间 s_0 大致的位置,再对该区域进行进一步区间细分,重复上述步骤,直到获得满足精度要求的不敏感区间 s_0 值。系统的输入输出响应时程如图 3.12~图 3.14 所示。

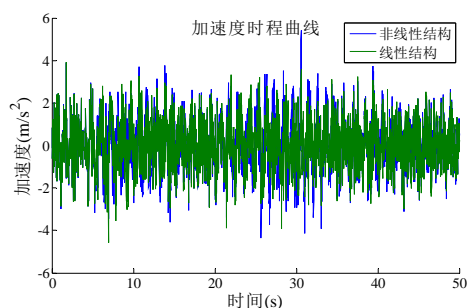


图 3.12 系统加速度响应时程

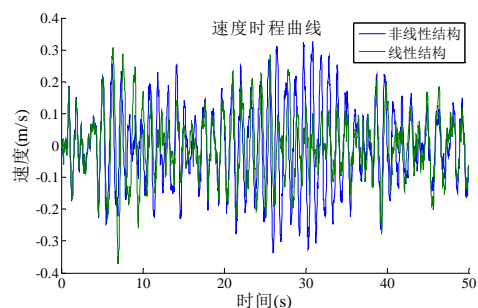


图 3.13 系统速度响应时程

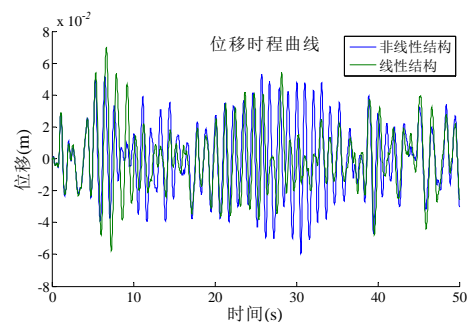


图 3.14 系统位移响应时程

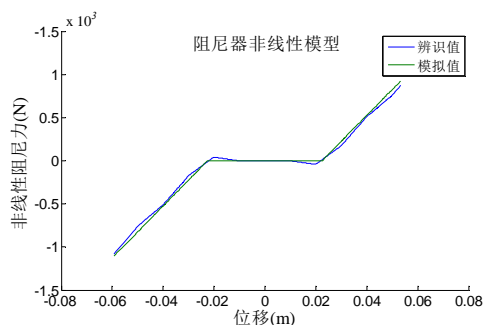


图 3.15 附加阻尼恢复力辨识

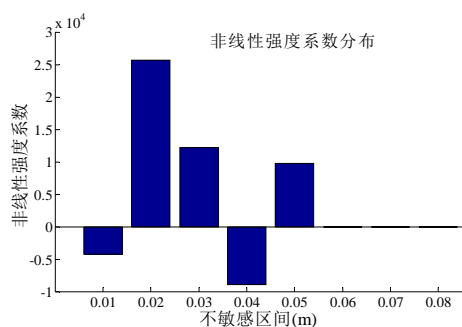


图 3.16 非线性强度系数分布

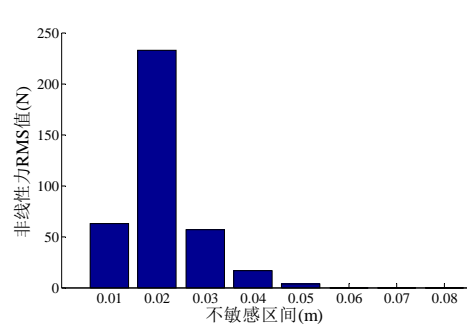


图 3.17 不敏感区间-非线性力 RMS

经过本文所述算法进行识别,获得各输入项非线性系数如图 3.16。根据所获得的非线性强度系数和输入项画出附加阻尼恢复力曲线如图 3.15 所示,从图中可以看出,辨识恢复力曲线与模拟值之间存在一定误差。进一步计算各非线性输入项非线性力 RMS 值分布如图 3.17 所示,可以判断非线性强度主要分布于 $s_j=0.01、0.02、0.03$ 。故将 $[0.01,0.03]$ 区间进一步划分为 8 个区间,以同样的方法

进行第二次辨识。

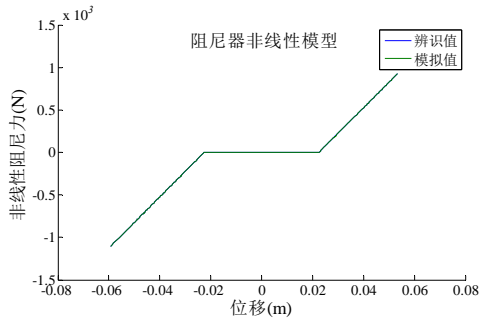


图 3.18 附加阻尼恢复力辨识

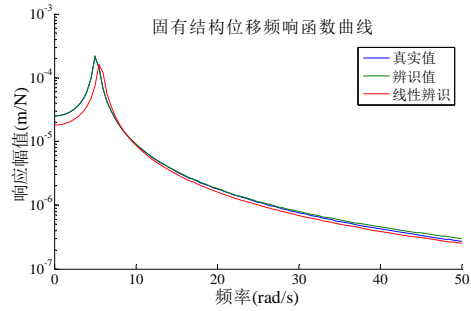


图 3.19 固有结构位移频响函数曲线

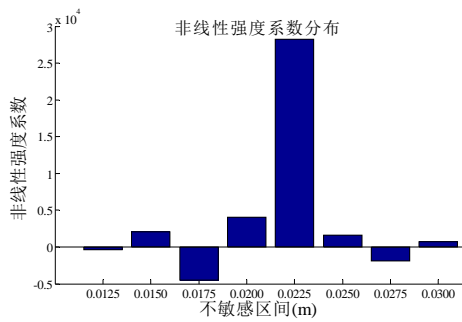


图 3.20 非线性强度系数分布

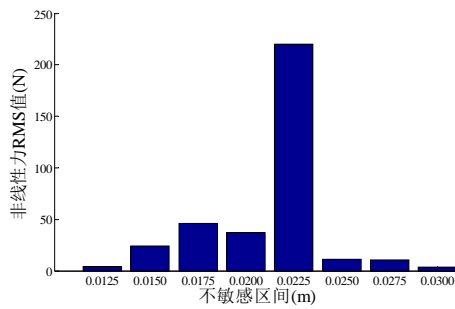


图 3.21 不敏感区间-非线性力 RMS

由图 3.20 和图 3.21 所示不敏感区间不同的非线性项的非线性系数和非线性力 RMS 值，可以明显判断出该非线性系统的不敏感区值 $s_0=0.0225\text{m}$ ，非线性系数为 $\mu=2.82\times 10^4$ 。同时固有系统相关参数辨识结果如表格 3.4 所示。

表格 3.4 分段线性系统参数辨识结果

项目	固有结构频率(rad/s)	固有结构阻尼比	非线性系数
数值计算	5.16	0.052	30000
辨识结果	5.16	0.052	28208
辨识误差	-0.0042%	0.34%	5.97%

3.6 本章小结

本章推导论证了基于输出反馈的非线性系统识别的子空间法实现方式。并通过达芬系统和分段线性系统两个典型的非线性系统的数值模拟，对该方法进行了数值验证。该方法基于系统的输出反馈建立非线性振子力学模型，并将其非线性强度系数引入到系统状态空间矩阵中，再通过将非线性振子承担的层间剪力转化为外力施加在固有结构上的方式，将非线性体系进行解耦。最终，使其能够利用线性子空间辨识法达到识别固有结构动力特性和非线性振子的强度系数的目的。

该非线性识别方法完全基于结构的激励和响应时程，不需要从中提取模态信息，方法简单易行。

第4章 消能减震结构非线性系统识别数值模拟

4.1 单自由度非线性滞回系统模拟

4.1.1 前提假设

对于本章所述针对消能减震结构的非线性系统辨识作如下几点前提假设：

- 1) 在外加荷载激励下，固有结构体系保持弹性状态，不发生非线性变化；
- 2) 系统的质量矩阵为已知，故可以根据激励信号的加速度时程计算出各自由度上的激励力时程；
- 3) 多自由度系统刚度、阻尼信息未知，待辨识；
- 4) 系统的消能构件力学模型为已知，其中非线性强度参量未知，待辨识。

4.1.2 阻尼器力学模型

本章以速度型阻尼器模型为例进行算法验证。其力学模型可以用(4.1)式表示：

$$F_{damp} = \mu_{nl} v^\alpha \quad (4.1)$$

式中， F_{damp} 为阻尼力， v 为阻尼器速度， μ_{nl} 为阻尼器系数， α 为阻尼器指数。对该模型进行进一步推演，当 $\alpha=0$ 时，阻尼模型为摩擦性阻尼器；当 $0 < \alpha < 1$ 时，阻尼模型为常见的粘滞型阻尼器；当 $\alpha=1$ 时，阻尼模型为线性阻尼器^[30]。本章，针对这三种不同的情况，进行辨识分析，验证方法的适用性。

假设具有一个集中质点的单自由度动力系统，该集中质点上具有一个水平自由度，在该结构上安装有能够提供非线性恢复力的非线性构件，如图 4.1 所示。

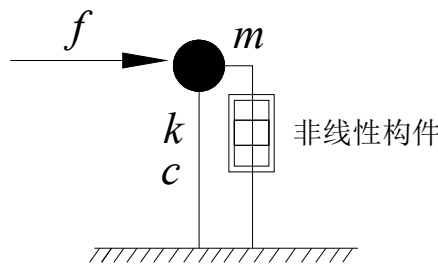


图 4.1 单自由度非线性系统

4.1.3 粘滞阻尼器系统

如公式(4.1)中所示的非线性阻尼器构件力学模型所示，将其非线性特性表示为 $k_{nl} v^\alpha$ ，并取其非线性强度系数 k_{nl} 为 1200，速度幂级数 α 为 0.5，即常见的粘

滞型阻尼器阻尼模型。系统的固有系统参数如表格 4.1 所示，非线性的强度、类型和位置分别由参数 μ_1 、 $g_1(t)$ 、 L_{n1} 确定，其中 $\mu_1=k_{nl}$ ， $g_1(t)=-v^{0.5}(t)$ ，显然 $L_{n1}=1$ 。

表格 4.1 粘滞型阻尼系统参数

$m(\text{kg})$	$k(\text{N/m})$	$c(\text{N}\cdot\text{s/m})$	$k_{nl}(\text{N}\cdot\text{s}^{0.5}/\text{m}^{0.5})$	α
1500	6×10^4	1600	1200	0.5

该系统动力学方程可以写为：

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) + k_{nl}v^{0.5}(t) = f(t) \quad (4.2)$$

其状态空间矩阵为：

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} & \frac{1}{m} & \frac{k_{nl}}{m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

由式(4.3)状态空间矩阵，计算系统不变量 $H_E(\omega=0)$ 如式(4.4)：

$$H_E(\omega=0) = D - CA_c^{-1}B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{c}{k} & -\frac{m}{k} \\ \frac{1}{m} & \frac{k_{nl}}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{k_{nl}}{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} & \frac{k_{nl}}{k} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

本节同样选取高斯白噪声均值为 0、均方根为 1 的高斯随机波作用于此单自由度非线性系统的集中质点上，作用时间为 50 秒，时间步长为 0.02 秒，结构响应根据四阶四段龙格库塔(Runge-Kutta)法计算得到。根据输入和输出信号，使用本章所述方法进行系统识别，与数值计算结果对比。

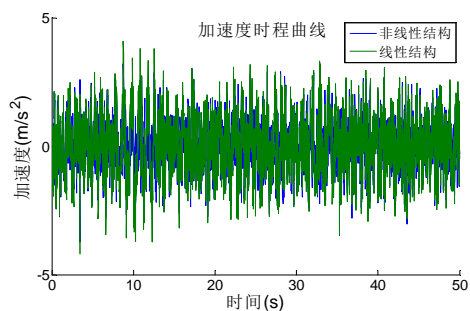


图 4.2 系统加速度响应时程

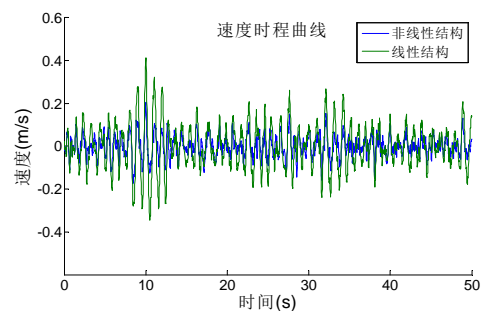


图 4.3 系统速度响应时程

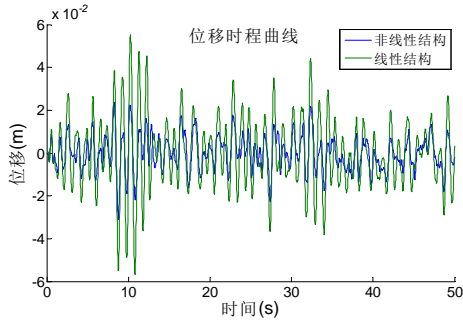


图 4.4 系统位移响应时程

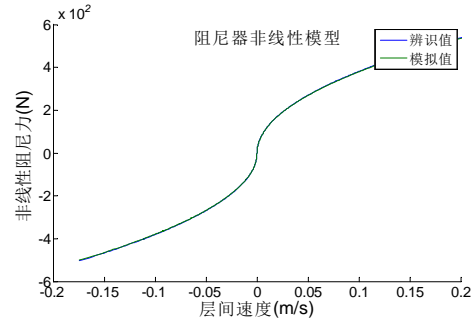


图 4.5 附加阻尼恢复力辨识

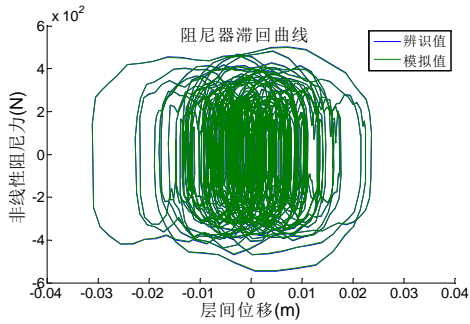


图 4.6 附加阻尼滞回曲线辨识

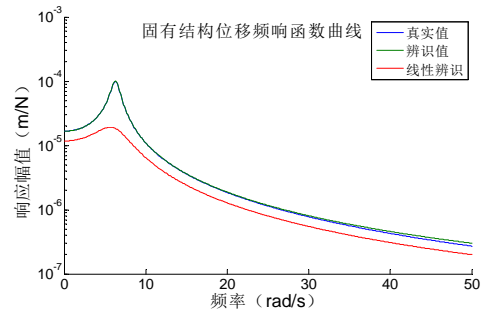


图 4.7 固有结构位移频响函数曲线

计算得 $\omega = 0$ 时，传递函数为 $H_E(\omega = 0) = [1.664 \times 10^{-5} \quad 2.006 \times 10^{-2}]$ ，进而可求

得非线性系数为 $\mu = \frac{2.006 \times 10^{-2}}{1.664 \times 10^{-5}} = 1205$ 。响应固有体系结构信息的理论计算值和

辨识值如表格 4.2 所示。

表格 4.2 粘滞型阻尼系统参数辨识结果

项目	固有结构圆频率(rad/s)	固有结构阻尼比	非线性系数
数值计算	6.324	0.084	1200
子空间非线性辨识	6.324	0.083	1205
拟线性辨识	6.319	0.321	—
误差分析	0.0052%	1.5%	0.45%

由于系统增加了粘滞阻尼器，系统加速度、速度和位移时程响应明显减小。如果采用线性系统辨识方法进行系统辨识，辨识得到的系统自振频率与固有结构系统真实值差别较小，但是阻尼比明显增大，所获得的系统频响函数曲线幅值小于固有结构本身的频响函数曲线，如图 4.7 所示。根据本文所述非线性子空间辨识法则能够较为准确的辨识出固有结构系统的自振频率和阻尼比参数，误差最大为 1.5%，且能较高精度地识别出消能器的非线性强度系数，误差仅为 0.45%。

4.1.4 摩擦阻尼器系统

图 4.1 中所示的非线性构件取其非线性系数 k_{nl} 为 350，速度幂级数 α 为 0，即摩擦型阻尼器阻尼模型。系统的固有系统参数如表格 4.1 所示，非线性的强度、类型和位置分别由参数 μ_1 、 $g_1(t)$ 、 L_{n1} 确定，其中 $\mu_1 = k_{nl}$ ， $g_1(t) = -1$ ，显然 $L_{n1} = 1$ 。

表格 4.3 摩擦型阻尼系统参数

$m(\text{kg})$	$k(\text{N/m})$	$c(\text{N}\cdot\text{s/m})$	$k_{nl}(\text{N})$	α
1500	6×10^4	1600	350	0

该系统动力学方程可以写为：

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) + k_{nl} = f(t) \quad (4.5)$$

同样，以高斯白噪声均值为 0、均方根为 1 的高斯随机波作用于此单自由度非线性系统的集中质点上，作用时间为 50 秒，时间步长为 0.02 秒。

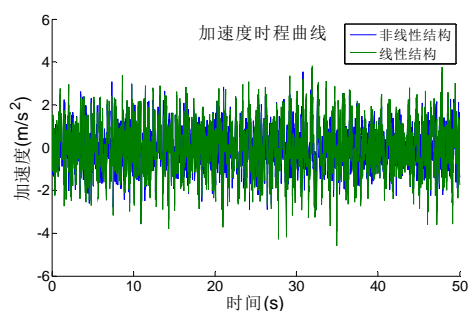


图 4.8 系统加速度响应时程

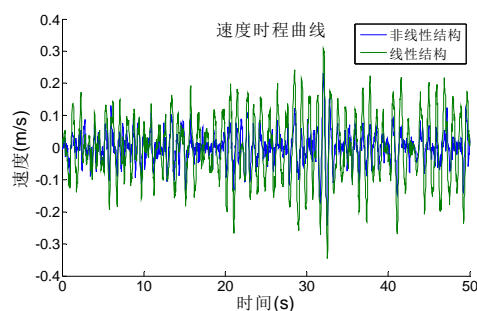


图 4.9 系统速度响应时程

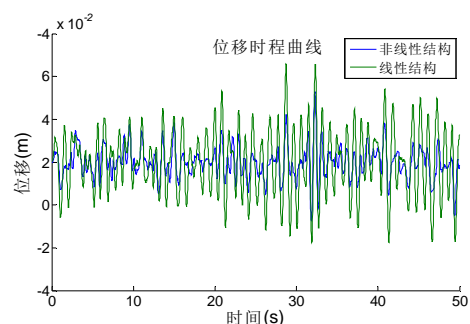


图 4.10 系统位移响应时程

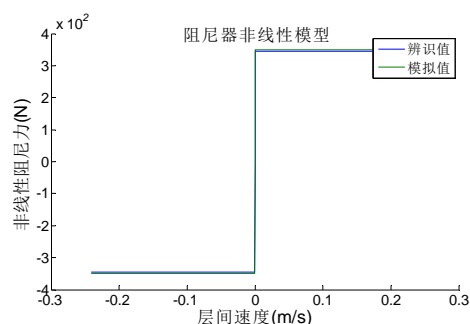


图 4.11 附加阻尼恢复力辨识

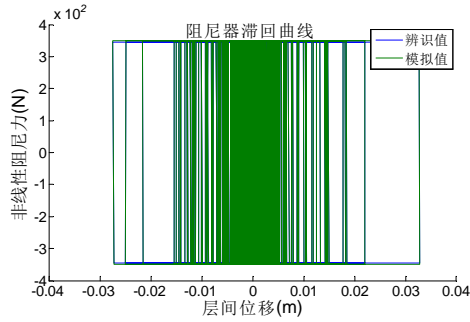


图 4.12 附加阻尼滞回曲线辨识

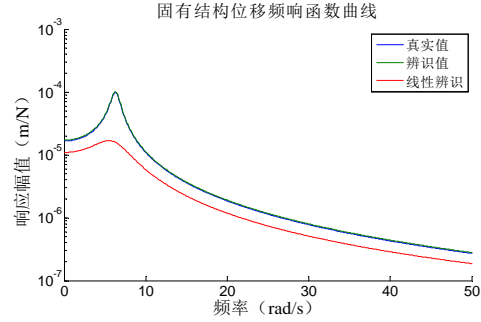


图 4.13 固有结构位移频响函数曲线

计算得 $\omega = 0$ 时，传递函数为 $H_E(\omega = 0) = [1.660 \times 10^{-5} \quad 5.745 \times 10^{-3}]$ ，进而可求得非线性系数为 $\mu = \frac{5.745 \times 10^{-3}}{1.660 \times 10^{-5}} = 346$ 。响应固有体系结构信息的理论计算值和辨识值如表格 4.4 所示。

表格 4.4 摩擦型阻尼系统参数辨识结果

项目	固有结构圆频率(rad/s)	固有结构阻尼比	非线性系数
数值计算	6.324	0.084	350
子空间非线性辨识	6.361	0.083	346
拟线性辨识	6.294	0.346	—
误差分析	0.57%	-1.22%	1.14%

辨识效果同粘滞型阻尼系统一样，系统增加了摩擦型阻尼器，系统加速度、速度和位移时程响应明显降低。线性系统辨识方法进行系统辨识，辨识得到的系统自振频率与固有结构系统真实值差别较小，但是阻尼比明显增大，获得的系统频响函数曲线幅值会小于固有结构本身的频响函数曲线，如图 4.13 所示。本文所述非线性识别方法同样适用于摩擦阻尼器结构系统辨识。

4.1.5 线性阻尼器系统

图 4.1 中所示的非线性构件取其非线性系数 k_{nl} 为 1800，速度幂级数 α 为 1，即线性阻尼器阻尼模型。系统的固有系统参数如表格 4.5 所示，非线性的强度、类型和位置分别由参数 μ_1 、 $g_1(t)$ 、 L_{nl} 确定，其中 $\mu_1 = k_{nl}$ ， $g_1(t) = -v(t)$ ，显然 $L_{nl} = 1$ 。

表格 4.5 非线性滞回系统参数

$m(\text{kg})$	$k(\text{N/m})$	$c(\text{Ns/m})$	$k_{nl}(\text{Ns/m})$	α
1500	6×10^4	1600	1800	1

该系统动力学方程可以写为：

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) + k_m v(t) = f(t) \quad (4.6)$$

同样，以高斯白噪声均值为 0、均方根为 1 的高斯随机波作用于此单自由度非线性系统的集中质点上，作用时间为 50 秒，时间步长为 0.02 秒。

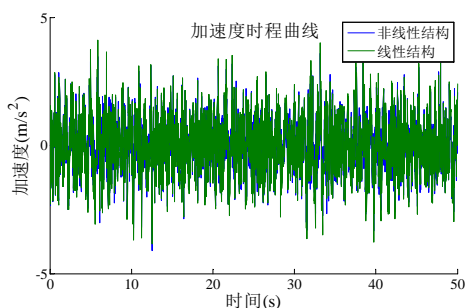


图 4.14 系统加速度响应时程

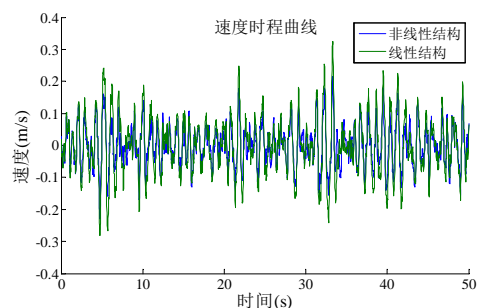


图 4.15 系统速度响应时程

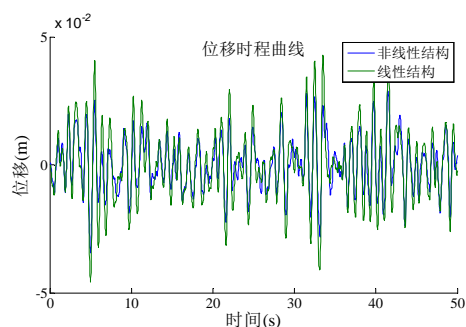


图 4.16 系统位移响应时程

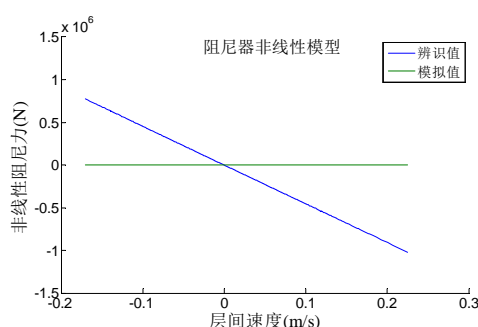


图 4.17 附加阻尼恢复力辨识

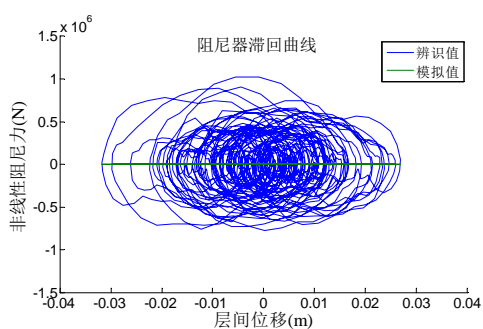


图 4.18 附加阻尼滞回曲线辨识

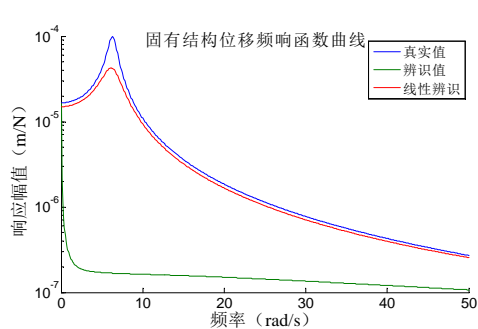


图 4.19 固有结构位移频响函数曲线

计算得 $\omega = 0$ 时，传递函数为 $H_E(\omega = 0) = [1.635 \times 10^{-5} \quad -74.229]$ ，进而可求得非线性系数为 $\mu = \frac{-74.229}{1.635 \times 10^{-5}} = -4.540 \times 10^6$ 。响应固有体系结构信息的理论计算值和辨识值如表格 4.6 所示。

表格 4.6 线性阻尼系统参数辨识

项目	固有结构圆频率(rad/s)	固有结构阻尼比	非线性系数
数值计算	6.325	0.0841	1800
子空间非线性辨识	42.093	1.000	-4.540×10^6
拟线性辨识	6.325	0.179	—
误差分析	-565.5%	-1085.8%	-252300%

阻尼器幂级数 $\alpha=1$ ，其产生的阻尼力与速度成正比，阻尼器产生的阻尼力与固有结构本身所提供的阻尼力同属线性关系，无法对其进行区分。故本文所述非线性系统辨识方法不适用于线性阻尼器结构的系统辨识。

4.1.6 黑箱系统

对于粘滞阻尼器，有时并不能准确预知消能器力学模型中的幂级数 α 的值，或者幂级数 α 的值发生变化，从而影响辨识结果。因此，本节提出对于非线性强度系数和力学模型中幂级数 α 均未知的黑箱系统的辨识方法。

在实际地震活动中，根据地震波不同阶段幅值变化，可以把地震波分成三个阶段增大阶段、平稳阶段和削弱阶段。以 EL-centrol 波为例，根据地震波的均方根，可以取出强度不同的五个阶段，如图 4.20 所示。^{[31][31]}

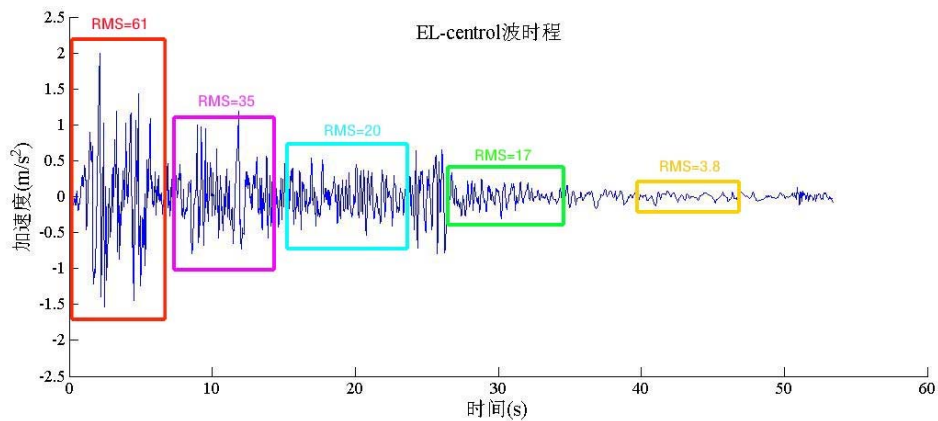


图 4.20 EL-centrol 波提取图示

不同强度地震波激励下，消能器承担的地震响应力占总地震响应力的比例不同，为结构提供的阻尼效果也有所不同。故可以先设定阻尼幂级数为某一个值，然后分别采用地震波中强度不同的多段输入输出信号，通过本文所述方法进行多次系统辨识，获取不同强度地震激励下的系统参数（自振频率、阻尼比、非线性强度系数）。如果预先设定的幂级数与真实值有较大差别，则对结构的解耦效果不好，不能较好的提取出非线性对系统识别的影响，因而在不同强度激励信号下

辨识所得系统参数就会有很大变异性,表现为均方差较大。本节首先从 0.1 至 0.9 之间,每隔 0.1 取 1 个数,设定为阻尼幂级数。每个设定的幂级数,采用 EL-centrol 波中预先划分好的几段波的输入输出信号分别进行系统辨识,并计算其辨识系统参数的均值与均方差。取均方差最小的区间,进行进一步划分,重复上述步骤,直到所得均方差值小于预设的一定阈值,则认为其结果可信。将均方差满足要求的数据组辨识结果作为最终结果。

本节同样采用图 4.1 中所示非线性系统,其非线性系数 k_{nl} 为 150, 阻尼幂级数 α 为 0.325。系统的固有系统参数如表格 4.7 所示,非线性的强度、类型和位置分别由参数 μ_1 、 $g_1(t)$ 、 L_{n1} 确定,其中 $\mu_1=k_{nl}$, $g_1(t)=-v(t)$,显然 $L_{n1}=1$ 。其中,非线性系数 k_{nl} 和阻尼幂级数 α 为未知,待识别。以 EL-centrol 波作用于此单自由度非线性系统的集中质点上,作用时间为 52 秒,时间步长为 0.02 秒。

表格 4.7 黑箱系统结构参数

$m(\text{kg})$	$k(\text{N/m})$	$c(\text{Ns/m})$	$k_{nl}(\text{Ns/m})$	α
1500	6×10^4	1600	150	0.325

根据输入信号不同强度阶段的系统响应输出,计算不同阶段消能器承担层间剪力 RMS 值、固有结构承担层间剪力 RMS 值如图 4.22 和图 4.23 所示,由此获得不同阶段消能器承担层间剪力占总层间剪力比值如图 4.24 所示。可以看出,结构在输入信号不同阶段由于信号强度不同,其消能器参与抵抗地震响应的程度不同。

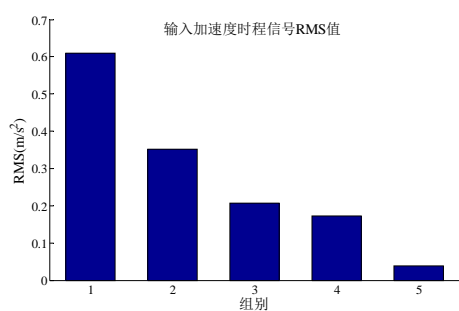


图 4.21 不同阶段输入加速度时程信号 RMS 值

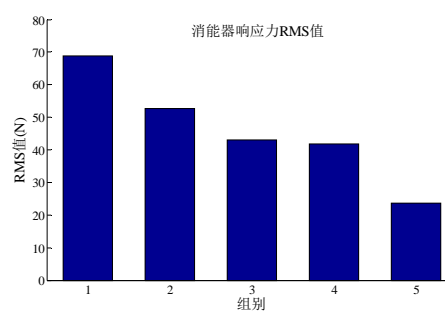


图 4.22 不同阶段消能器承担响应力 RMS 值

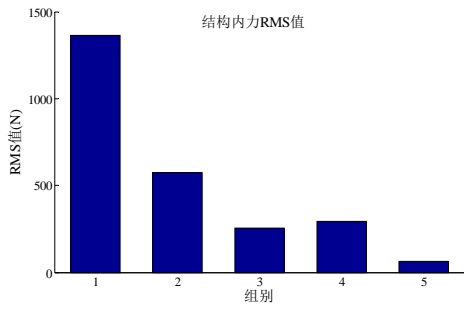


图 4.23 不同阶段固有结构承担
响应力 RMS 值

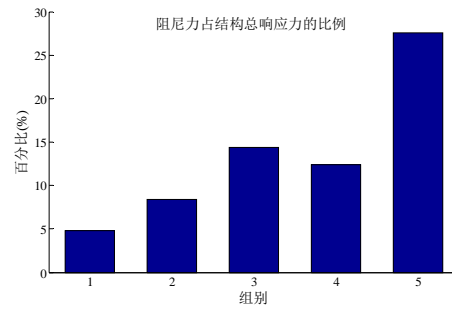


图 4.24 不同阶段消能器承担
响应力占总响应力比值

阻尼非线性幂级数 α 在 0.1 至 0.9 之间每隔 0.1 取一个值进行计算。每个设定一个幂级数，采用 EL-centrol 波中预先划分好的几段波的输入输出信号分别进行系统辨识，并计算其辨识系统参数的均值与均方差。获得系统的固有结构体系自振频率、阻尼比和非线性强度系数的均值和均方差如图 4.25~图 4.30 所示。

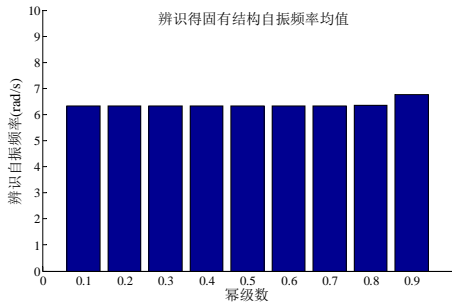


图 4.25 辨识得固有结构自振频率均值

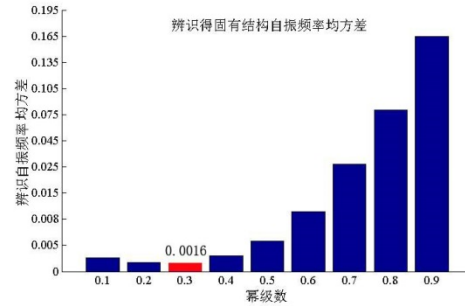


图 4.26 辨识得固有结构自振频率均方差

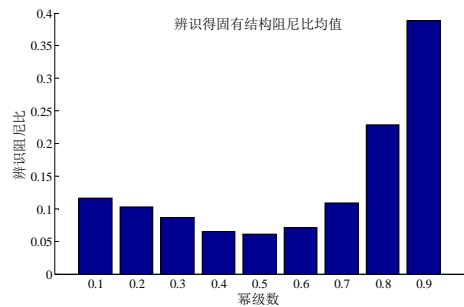


图 4.27 辨识得固有结构阻尼比均值

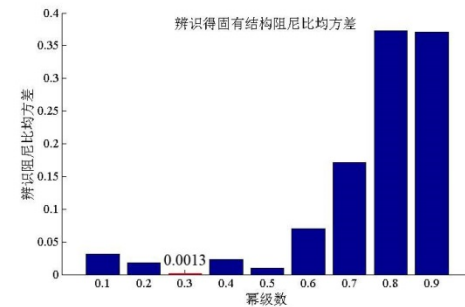


图 4.28 辨识得固有结构阻尼比均方差

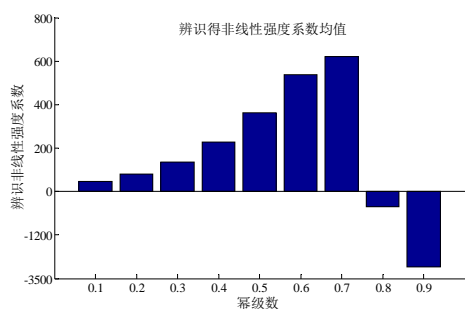


图 4.29 辨识得非线性强度系数均值

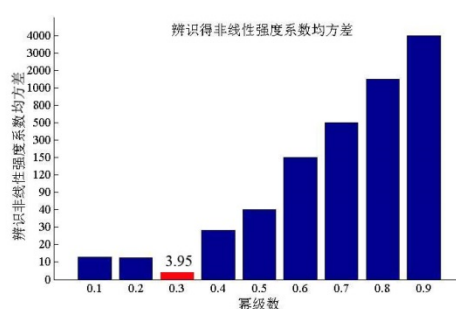


图 4.30 辨识得非线性强度系数均方差

依据辨识结果均方差所示，当非线性幂级数 $\alpha=0.3$ ，不同阶段辨识得到的系统参数离散型最小。为了能够进一步获得更精确的辨识数据，将幂级数从 0.2 至 0.4 之间每隔 0.02 取一个值重复上述辨识步骤，获得系统固有结构自振频率、阻尼比和非线性强度系数的均值和均方根如图 4.31~图 4.36 所示。

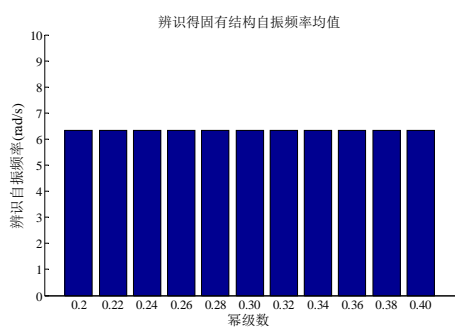


图 4.31 辨识得固有结构自振频率均值

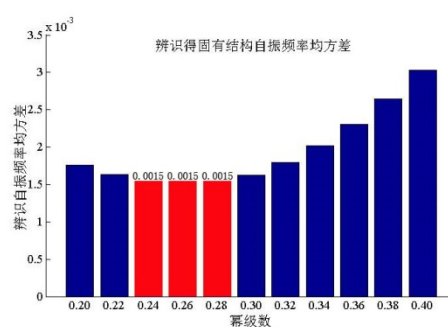


图 4.32 辨识得固有结构自振频率均方差

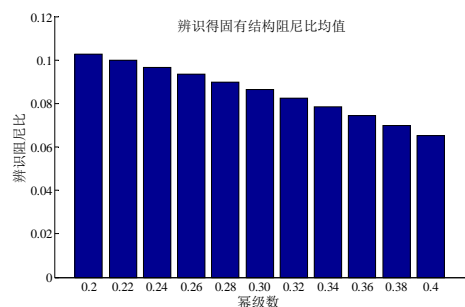


图 4.33 辨识得固有结构阻尼比均值

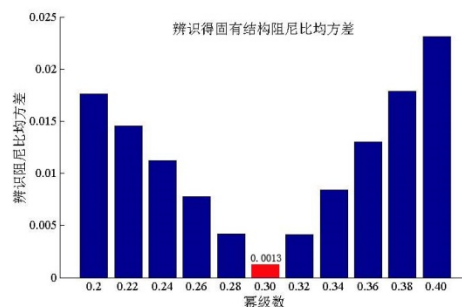


图 4.34 辨识得固有结构阻尼比均方差

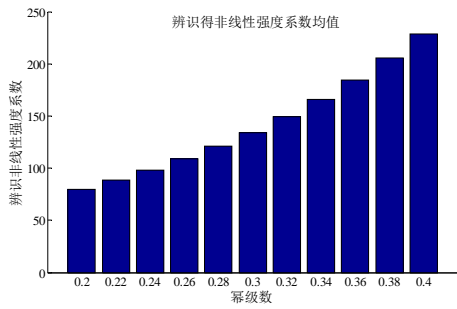


图 4.35 辨识得非线性强度系数均值

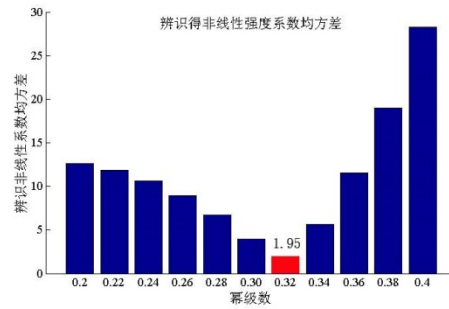


图 4.36 辨识得非线性强度系数均方差

依据辨识结果所示，当非线性幂级数 α 取值为 0.2~0.4 之间时，不同阶段辨识得到的系统自振频率基本保持不变，且当 α 取 0.2~0.34 之间时，辨识均方差相差不大。从辨识得到的阻尼比和非线性强度系数来看，其均值随不同阶段信号强度大小不同呈现出一定的变化，且在 α 分别取 0.3 和 0.32 时，辨识均方差到达最小值，即离散型最小。分别以辨识阻尼比均方差最小原则和辨识非线性强度系数均方差最小原则，即 α 分别取 0.3 和 0.32，对结构进行系统参数辨识，辨识结果如表格 4.8 所示。

表格 4.8 黑箱系统参数辨识结果

取值原则	非线性幂级数 α	自振频率(rad/s)	阻尼比	非线性强度系数
理论值	0.325	6.325	0.0841	150
辨识阻尼比均方差最小	0.30	6.324	0.0863	134
辨识非线性强度系数均方差最小	0.32	6.324	0.0825	149

根据表格 4.8 辨识结果所示，依据不同原则获取的自振频率和阻尼比误差水平相当，但是若采用辨识非线性强度系数均方差最小原则获取的非线性强度系数辨识值误差更小，非线性幂级数 α 也达到较小误差。因而，通过本节所述辨识方法，采用“辨识非线性强度系数均方差最小”的原则对于黑箱系统辨识分析，可以获取较好的辨识结果。

4.2 多自由度非线性滞回系统模拟

4.2.1 完整激励下多自由度系统辨识模拟

假设一个具有三个集中质点的多自由度动力系统，每个集中质点上具有一个水平自由度，在该结构的各层上安装有能够提供非线性恢复力的非线性构件，其中的非线性构件设为速度相关型消能器，即 $g_j(t) = -\Delta_v^\alpha(t)$ 。如图 4.37 所示。结构各层的质量、刚度和非线性信息如表格 4.9。系统阻尼采用瑞利阻尼 $G = 0.919M + 0.0021K$ 。系统模型如图 4.37。

表格 4.9 多自由结构信息

楼层	$m(\text{kg})$	$k(\text{N/m})$	$k_{nl}(\text{Ns}^{0.3}/\text{m}^{0.3})$	α
第一层	1800	6×10^5	350	0.3
第二层	1500	6×10^5	350	0.3
第三层	1200	6×10^5	350	0.3

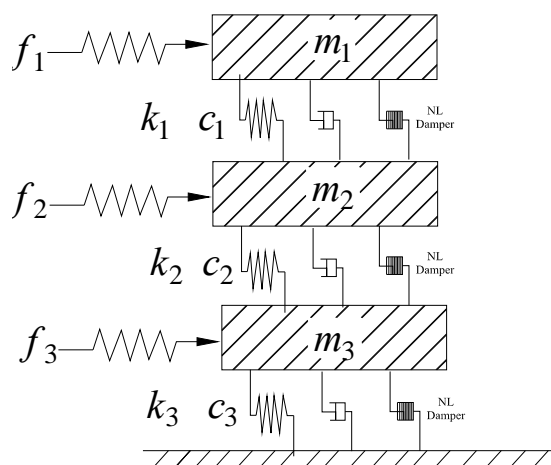


图 4.37 多自由度非线性系统

由本论文第四章所述非线性识别思路，依据阻尼器的非线性力学模型将图 4.37 中非线性阻尼器提供的层间剪力转化为外力，施加在相邻楼层，将系统转化为线性系统，如图 4.38 所示。

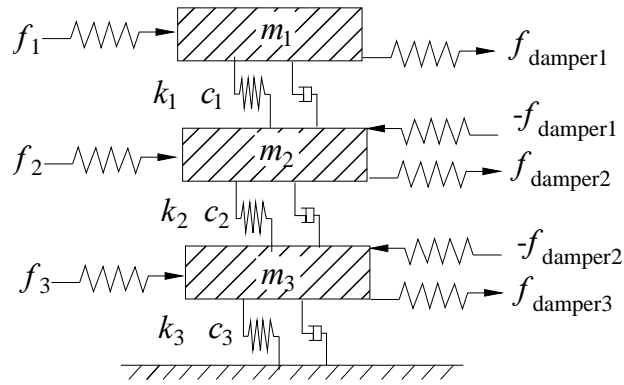


图 4.38 非线性多自由度系统线性化

显然，系统的非线性项表示为：

$$\mu_1 L_{n1} g_1(t) = k_{n1} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} (v_1 - v_2)^{0.3} \quad \mu_2 L_{n2} g_2(t) = k_{n2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} (v_2 - v_3)^{0.3} \quad \mu_3 L_{n3} g_3(t) = k_{n3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} v_3^{0.3} \quad (4.7)$$

结构各层分别选取均值为 0，均方跟为 1 的高斯随机波作为系统输入信号，作用时间为 30 秒，时间步长为 0.01 秒。Simulink 数值模拟系统输出响应如图 4.39 ~图 4.41。

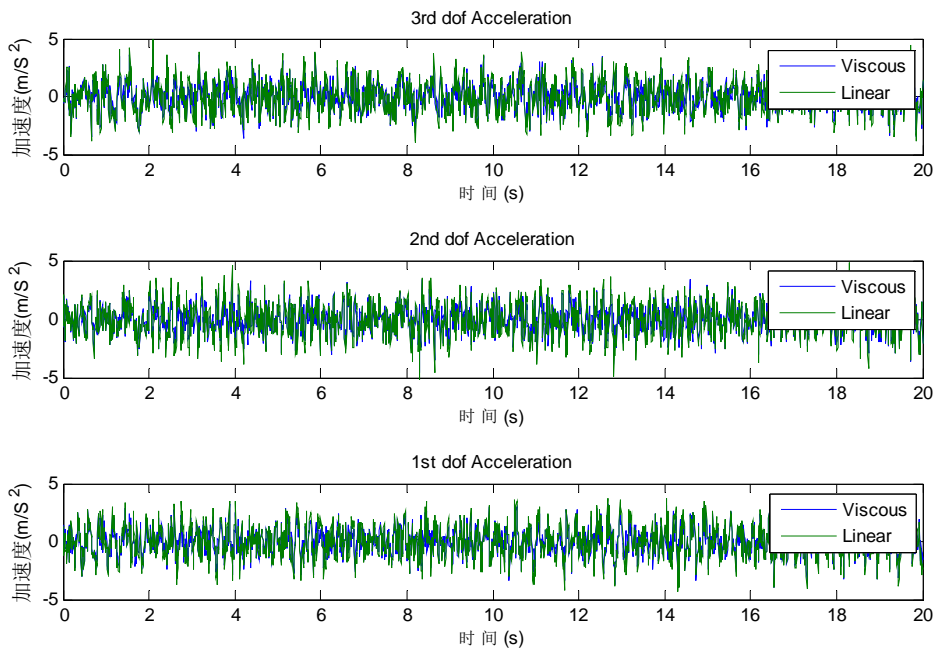


图 4.39 系统加速度时程

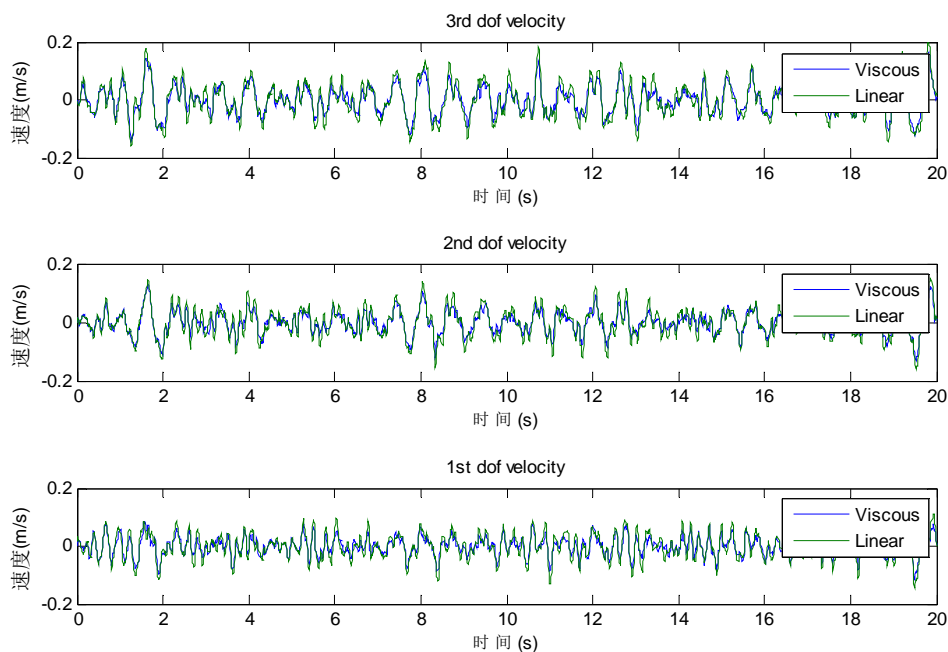


图 4.40 系统速度时程

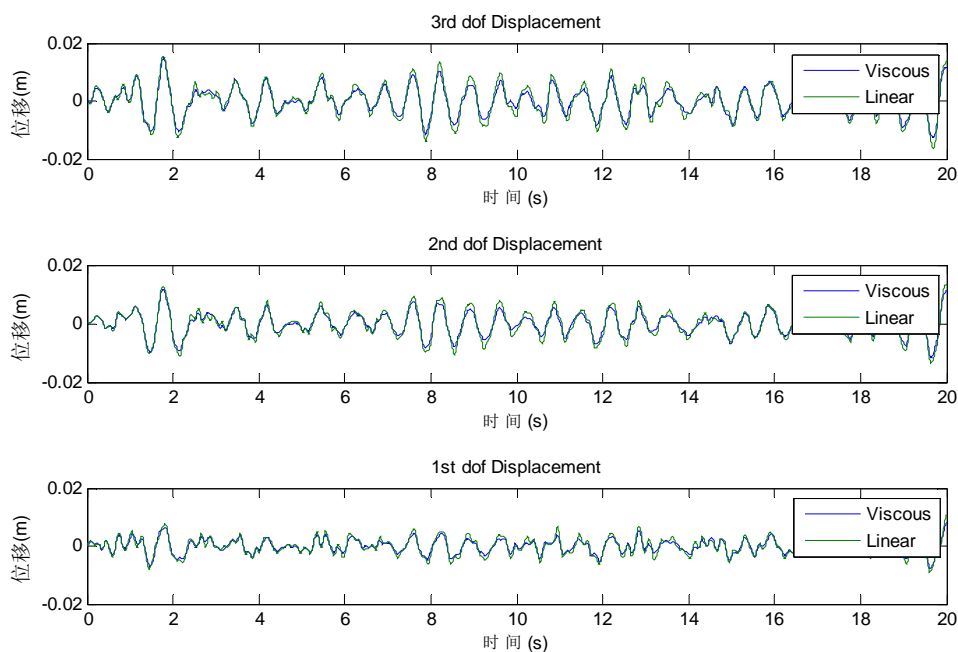


图 4.41 系统位移时程

获得系统的输出响应后，分别采用数值算法、线性子空间辨识法和非线性子空间辨识法，根据系统状态空间矩阵 A 分析得固有结构系统自振频率和阻尼比信息如表格 4.10 所示。由辨识结果可以看出，采用子空间线性辨识方法和非线性辨识方法都能够较为准确的辨识出系统自振频率。然而，对于阻尼比的辨识，

由于增加了附加阻尼,故按照线性辨识方法得到的系统阻尼比会明显大于结构自身阻尼。非线性子空间辨识方法则能够较为准确的辨识出固有结构体系的阻尼比。

表格 4.10 辨识得固有结构系统信息

阶次	固有频率(rad/s)			阻尼比		
	数值计算	非线性辨识	线性辨识	数值计算	非线性辨识	线性辨识
第一阶	9.301	9.301	9.304	0.0445	0.0469	0.0832
第二阶	24.573	24.563	24.562	0.0504	0.0538	0.1070
第三阶	35.726	35.662	35.650	0.0592	0.0595	0.1436

根据辨识得到的系统状态矩阵 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 、 \hat{D} ,使用式(2.16)所示方法,将离散系统状态空间矩阵转化为连续状态空间矩阵 \hat{A}_c 、 \hat{B}_c 。进而根据式(3.25)由系统状态空间矩阵获得系统不变量 $H_E(\omega)$ 如式(4.10),其中 H 代表固有结构体系的频响函数矩阵。据式(4.10)可知非线性系数的计算方法。 $H_E(\omega=0)$ 辨识结果如表格 4.11 所示。根据 Dis_3 行数据计算得到各层阻尼器非线性强度系数如表格 4.12,辨识最大误差小于 3%。

$$\begin{aligned}
 H_E(0) &= D - CA_c^{-1}B_c \\
 &= [H \quad H\mu_1L_{n1} \quad H\mu_2L_{n2} \quad H\mu_3L_{n3}] \\
 &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & \mu_1(H_{11} - H_{12}) & \mu_2(H_{12} - H_{13}) & \mu_3H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \mu_1(H_{21} - H_{22}) & \mu_2(H_{22} - H_{23}) & \mu_3H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & \mu_1(H_{31} - H_{32}) & \mu_2(H_{32} - H_{33}) & \mu_3H_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

表格 4.11 $H_E(\omega=0)$ 辨识结果

项目	f_1	f_2	f_3	$-g_1$	$-g_2$	$-g_3$
Dis_1	4.99×10^{-6}	3.33×10^{-6}	1.66×10^{-6}	5.67×10^{-4}	5.95×10^{-4}	5.68×10^{-4}
Dis_2	3.34×10^{-6}	3.32×10^{-6}	1.66×10^{-6}	7.42×10^{-6}	5.76×10^{-4}	5.62×10^{-4}
Dis_3	1.67×10^{-6}	1.67×10^{-6}	1.66×10^{-6}	2.56×10^{-6}	3.37×10^{-6}	5.71×10^{-4}

表格 4.12 各层阻尼器非线性系数辨识结果

项目	第一层	第二层	第三层
真实值	350	350	350
辨识值	341	356	343
误差	-2.6%	1.8%	-2.1%
阻尼器层间剪力占比	11.8%	13.8%	12.3%

根据非线性子空间识别法辨识得系统各层消能构件非线性恢复力及滞回曲线如图 4.42、图 4.43。根据式(4.8)计算得各层阻尼器的非线性强度系数辨识结果如表格 4.12 所示。

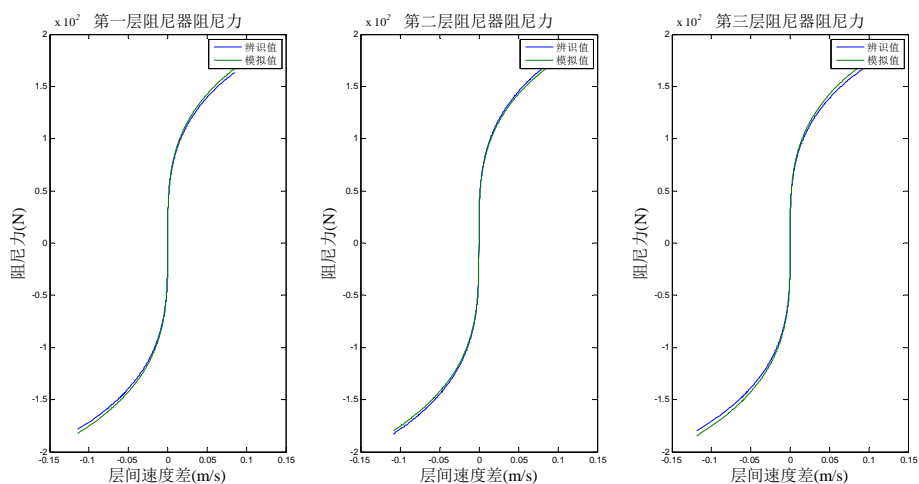


图 4.42 各层阻尼器恢复力模型

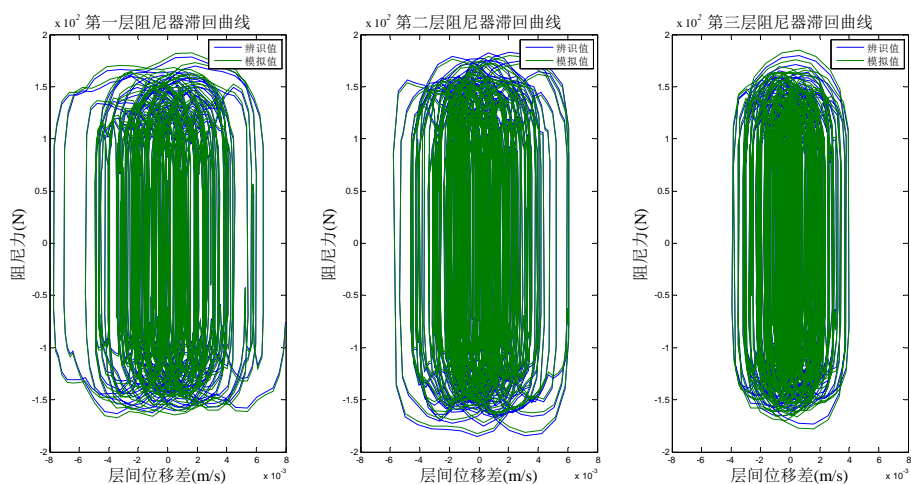


图 4.43 各层阻尼器滞回曲线

进一步可以根据式(4.10)获得系统频响函数曲线如图 4.44 到图 4.49 所示, 由于频响函数具有对称性, 故对称部分不予以列出。由辨识结果可以看出, 本文所述非线性子空间法在中低频部分基本能准确识别出结构固有体系部分的频响函数曲线, 但是高频部分会出现较大误差。由于系统阻尼器附加阻尼的作用, 按照线性子空间辨识方法辨识得到的系统频响函数曲线, 会略低于结构固有体系的频响函数曲线。且第二阶和第三阶自振频率辨识效果不佳。

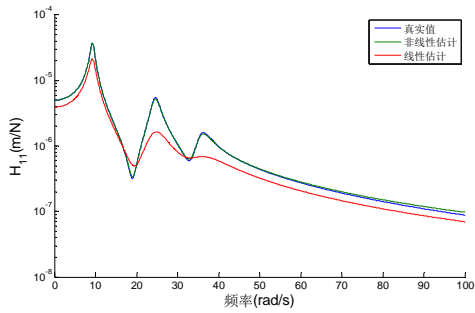


图 4.44 H_{11} 频响曲线

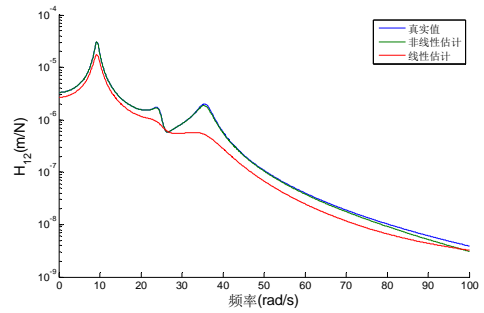


图 4.45 H_{12} 频响曲线

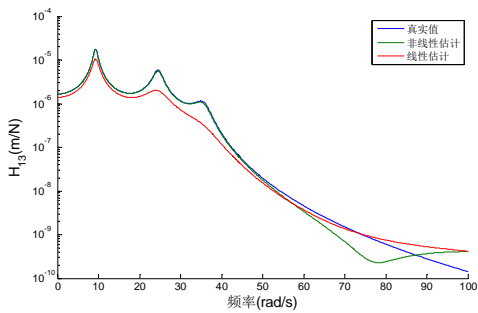


图 4.46 H_{13} 频响曲线

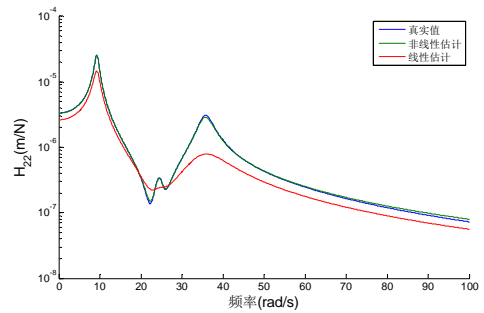


图 4.47 H_{22} 频响曲线

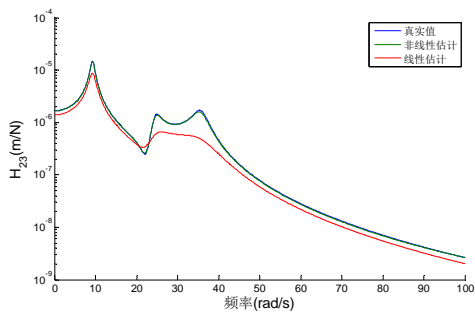


图 4.48 H_{23} 频响曲线

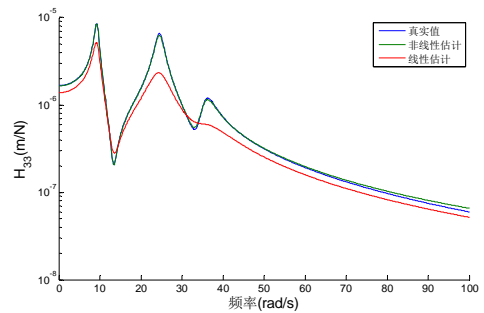


图 4.49 H_{33} 频响曲线

4.2.2 不同强度激励下辨识结果对比

结构体系仍然采用 4.2.1 节中使用的非线性体系,系统参数如表格 4.9 所示。对结构分别施加均值为 0, 均方根为 0.1、0.5 和 1 的高斯白噪声信号,并通过本文所述非线性辨识方法对结构进行辨识。对比分析不同强度激励信号下,本文所述辨识方法的可靠性。模拟中消能器提供的层间剪力占比如表格 4.13 所示,各层消能器的非线性强度系数辨识结果如表格 4.14 所示,固有结构体系的动力特性辨识结果如表格 4.15 所示。

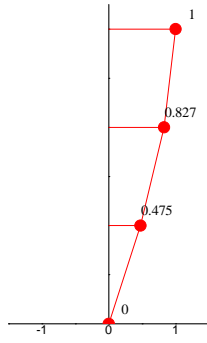
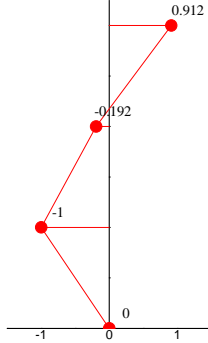
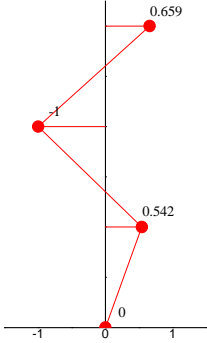
表格 4.13 不同激励信号下消能器提供的层间剪力占比

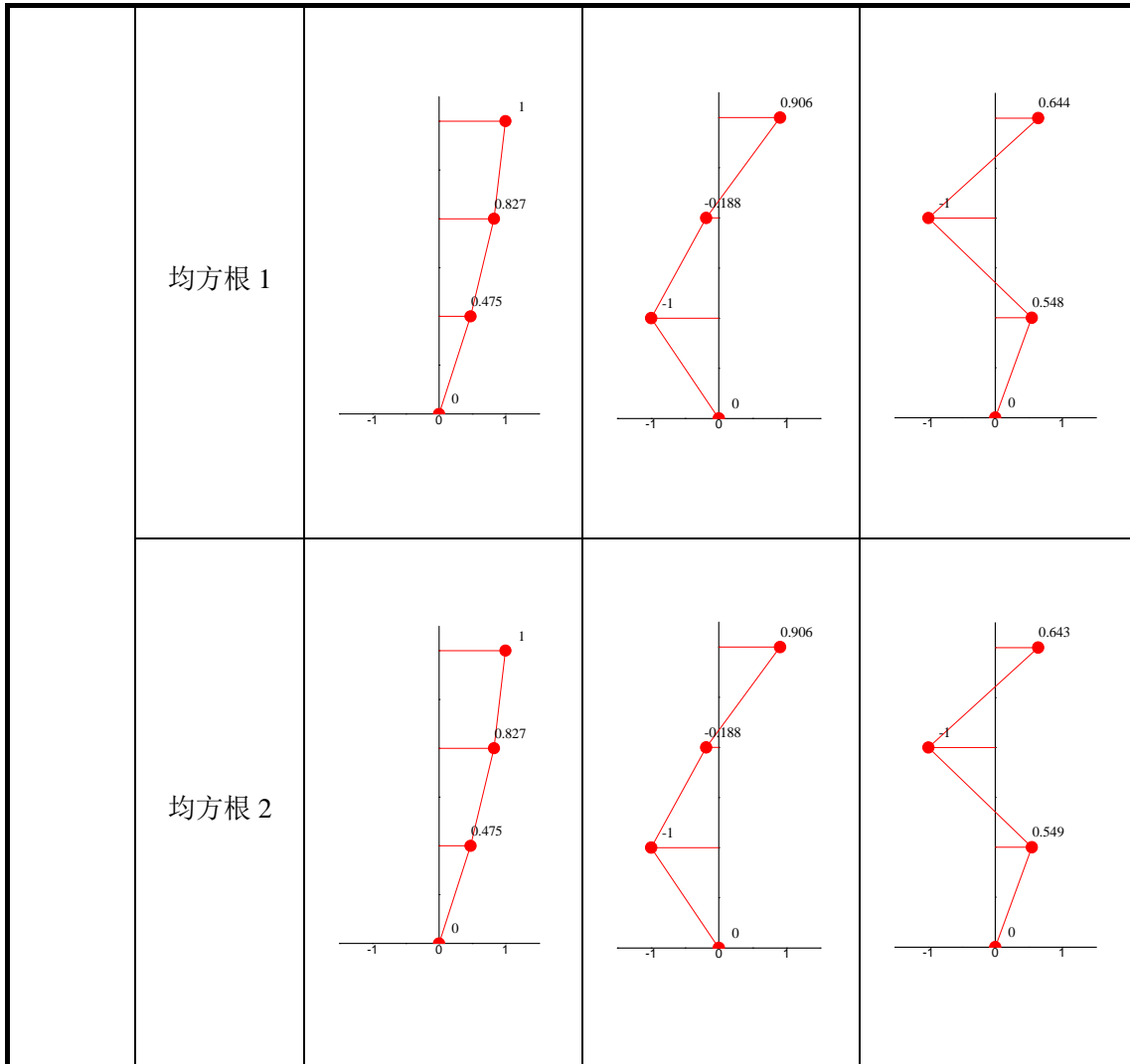
信号强度	第一层	第二层	第三层
均方根 0.5	19.9%	22.2%	19.5%
均方根 1	12.3%	13.9%	11.8%
均方根 2	7.5%	8.5%	7.1%

表格 4.14 不同激励信号下消能器非线性强度系数辨识结果

信号强度	第一层	第二层	第三层
均方根 0.5	339	346	330
均方根 1	342	356	341
均方根 2	349	354	320

表格 4.15 非线性多自由度系统辨识结果

辨识项目		第一阶	第二阶	第三阶
自振 频率 (rad/s)	均方根 0.5	9.301	24.596	35.775
	均方根 1	9.301	24.573	35.726
	均方根 2	9.301	24.573	35.720
阻尼比	均方根 0.5	0.0482	0.0563	0.0607
	均方根 1	0.0445	0.0504	0.0592
	均方根 2	0.0455	0.0519	0.0593
振型	均方根 0.5			



通过对比不同强度激励信号下系统的辨识结果，可以发现：激励信号强度不同，结构中阻尼器承担的层间剪力占比也不相同，但是辨识得到的固有结构体系动力特性变化不大，辨识结果较为稳定，能够反映固有体系的真实动力特性。

4.2.3 不完整激励多自由度系统识别模拟

对于某在役消能减震结构，很多时候并没有机会获得该结构在地震激励下的完备的响应数据，或者即使有该结构在地震激励下响应数据，也有可能无法满足本识别方法对数据的要求，不符合本文 3.5.1 方法简介所述的假设前提。因此，需要提出一种针对在役消能减震结构非线性系统辨识的解决方案。

对于在役结构进行系统辨识，通常采取的方式是在结构的施加人工激励，同时在该结构的各层收集结构的响应。再依据系统输入输出辨识结构信息，即由结构不完整激励下的输入输出数据进行辨识。故本节，探讨本文所述方法在不完整激励下非线性结构的系统识别。

本节提出的检测方案为，在结构顶层使用激振设备施加正弦激励，同时在结构各层设置加速度传感器，将每一楼层假设为一个自由度，收集系统各自由度输出响应，如图 4.50 所示。

同样采用本章 4.1 节所采用的三自由度消能减震结构模型。在结构的顶层施加幅值为 0.5m/s^2 正弦激励选取 $\omega=2\pi\text{rad/s}$ ，作用时间为 20 秒，信号收集时间步长为 0.01 秒。Simulink 数值模拟系统输出响应如图 4.51~图 4.53。

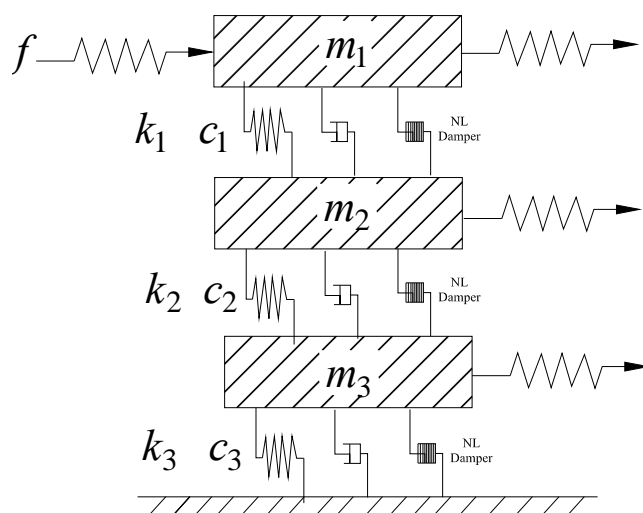


图 4.50 非线性多自由度系统线性化

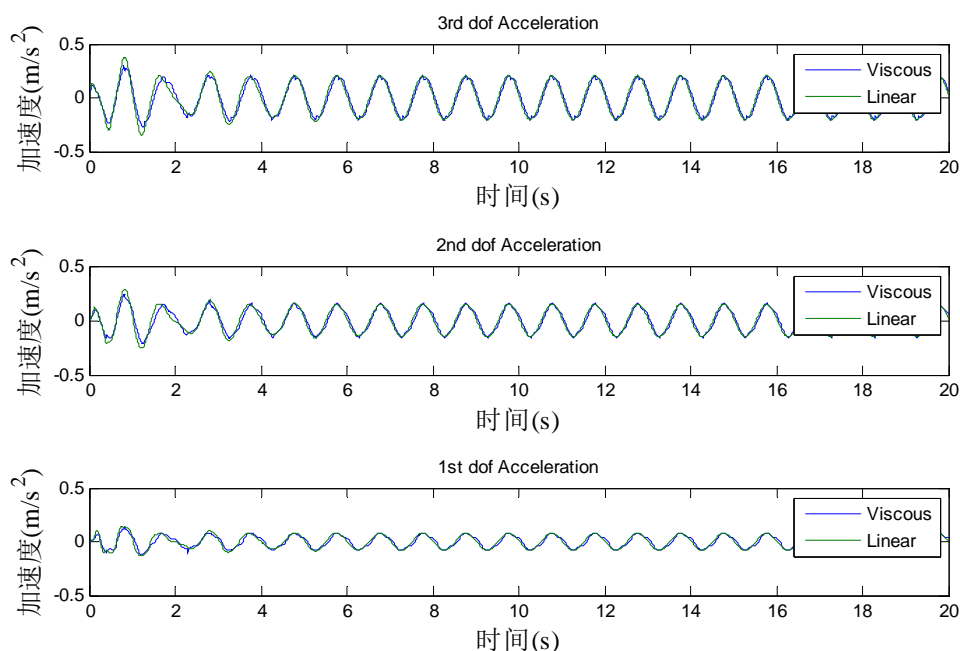


图 4.51 系统加速度时程

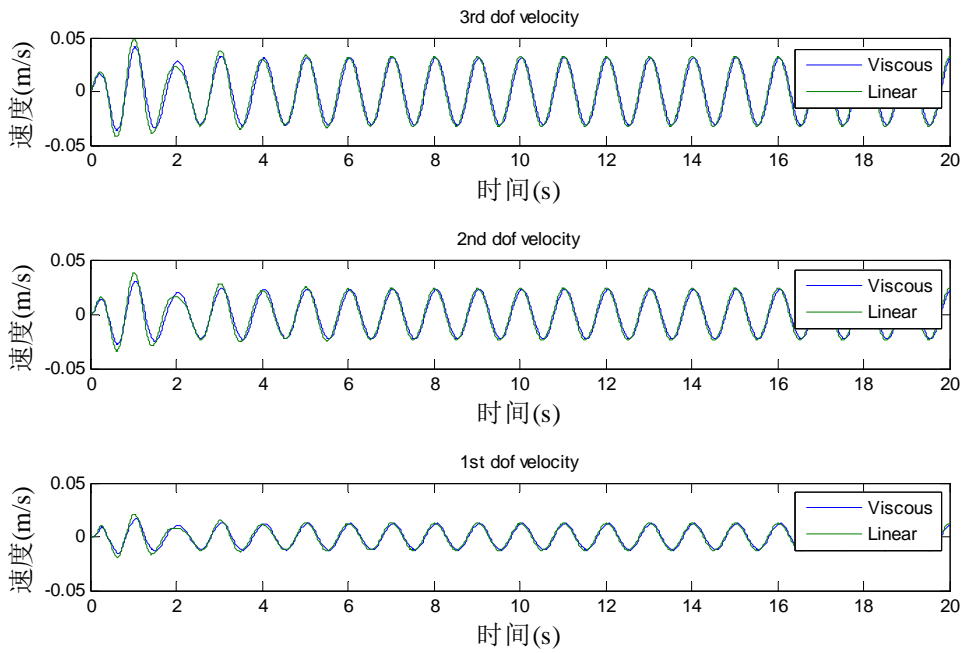


图 4.52 系统速度时程

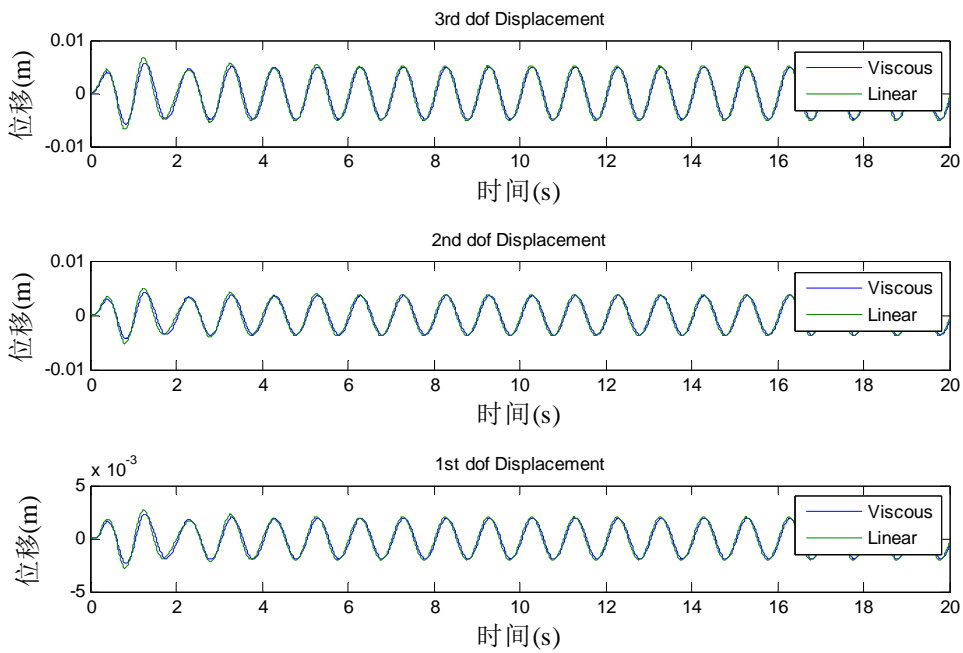


图 4.53 系统位移时程

此时，系统输入项则为 $u = \{f(t) \ 0 \ 0 \ -g_1(t) \ -g_2(t) \ -g_3(t)\}$ 。系统非线性项表达式仍为式(4.1)所示。但由系统状态空间矩阵获得系统不变量 $H_E(\omega)$ 如式(4.3)，其中 H 代表固有线性结构体系的频响应函数矩阵。因为系统为不完整输入，故仅能获得与输入激励相关位置的频响应函数。但是根据频响应函数的对称性，可以

得到对称位置上的频响函数值如式(4.9)所示。据式(4.9)可知非线性系数的计算方法。 $H_E(\omega=0)$ 辨识结果如表格 4.16 所示。根据 Dis_1 行数据计算得到各层阻尼器非线性强度系数如表格 4.17。辨识最大误差为 7.1%。

$$\begin{aligned}
 H_E(\omega) &= D + C(i\omega - A_c)^{-1} B_c \\
 &= [H \quad H\mu_1 L_{n1} \quad H\mu_2 L_{n2} \quad H\mu_3 L_{n3}] \\
 &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{21} & H_{31} & \mu_1(H_{21} - H_{11}) & \mu_2(H_{32} - H_{31}) & \mu_3 H_{31} \\ H_{21} & ? & ? & ? & ? & ? \\ H_{31} & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

表格 4.16 $H_E(\omega=0)$ 辨识结果

项目	f_1	f_2	f_3	g_1	g_2	g_3
Dis_1	4.99×10^{-6}	-2.43×10^{-16}	9.36×10^{-16}	5.65×10^{-4}	5.38×10^{-4}	6.23×10^{-4}
Dis_2	3.32×10^{-6}	-2.38×10^{-16}	7.86×10^{-16}	-4.18×10^{-5}	5.88×10^{-4}	6.02×10^{-4}
Dis_3	1.67×10^{-6}	-1.51×10^{-16}	4.58×10^{-16}	-5.78×10^{-7}	-2.24×10^{-5}	6.03×10^{-4}

表格 4.17 各层阻尼器非线性系数辨识结果

项目	第一层阻尼器系数	第二层阻尼器系数	第三层阻尼器系数
真实值	350	350	350
辨识值	338	325	374
误差	-3.4%	-7.1%	6.9%
阻尼器层间剪力占比	10.9%	4.8%	4.2%

由辨识得到的系统状态空间矩阵 \hat{A} 辨识得固有结构系统信息如表格 4.18 所示：

表格 4.18 辨识得固有结构系统信息

阶次	固有频率 (rad/s)			阻尼比		
	数值计算	辨识结果	线性辨识	数值计算	辨识结果	线性辨识
第一阶	9.301	9.295	9.304	0.0445	0.0391	0.0226
第二阶	24.573	24.634	19.463	0.0504	0.0498	0.0283
第三阶	35.726	36.766	31.497	0.0592	0.0592	0.1248

根据非线性子空间识别法辨识得系统各层消能构件非线性恢复力及滞回曲线如图 4.54、图 4.55 所示。

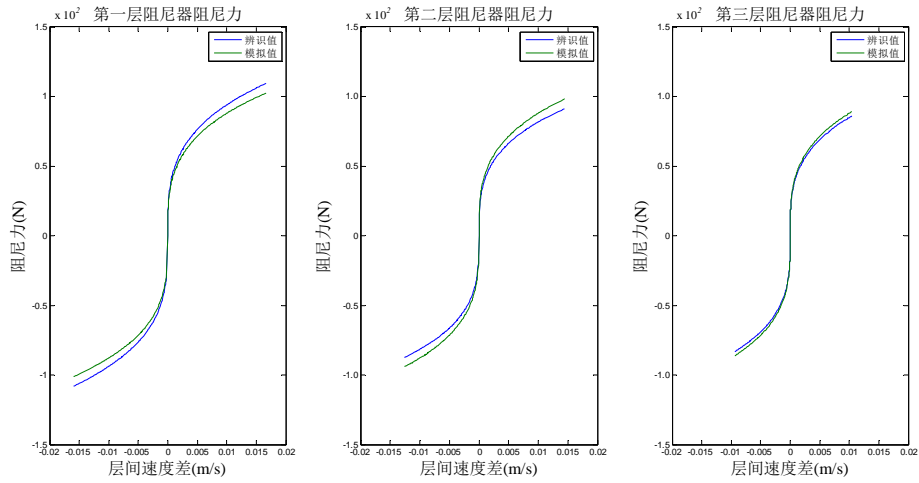


图 4.54 各层阻尼器恢复力模型

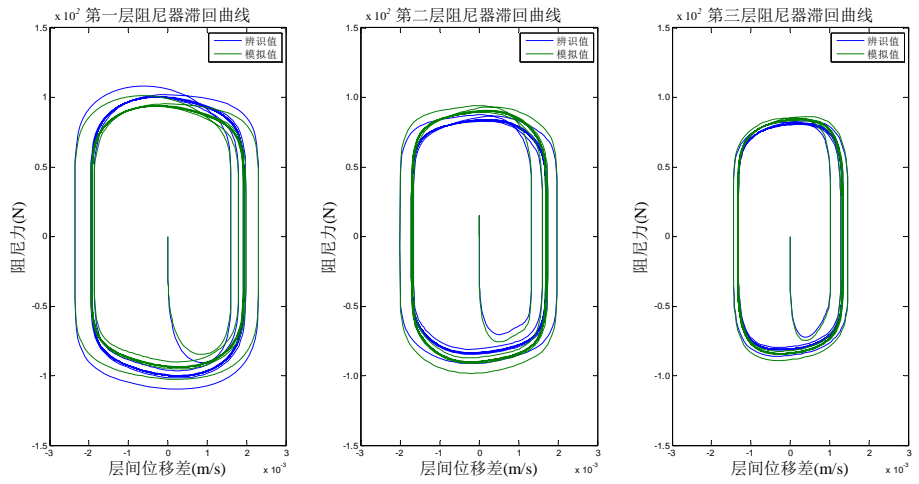


图 4.55 各层阻尼器滞回曲线

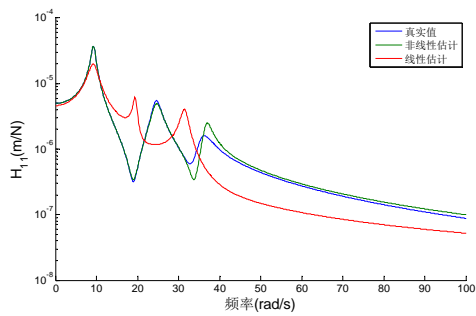


图 4.56 H_{11} 频响曲线

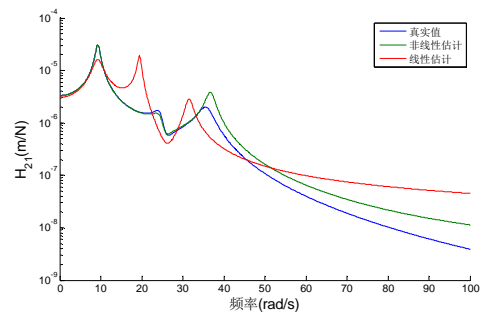
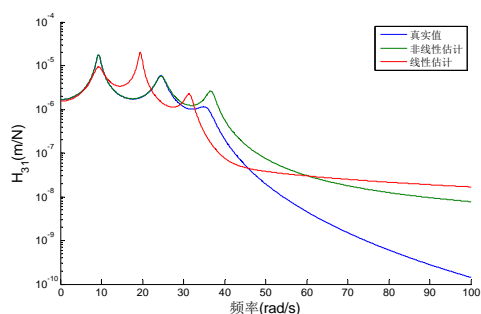


图 4.57 H_{21} 频响曲线

图 4.58 H_{31} 频响曲线

对比完整激励的辨识结果，非完整激励的辨识效果略差，尤其是非线性强度系数最大辨识误差达到 7.1%，频响函数曲线在高频部分产生了较大的误差。但是其操作简单，数据更容易获得。且对于工程技术人员更关注的中低频部分基本能满足精度要求。其更大的优点在于，激励只需在一个频率点进行激励就可以获得结构的全频率范围内的系统频响函数，原因在于本方法求取频响函数并非采用简单的各频率点最小二乘拟合，而是先获得包含有系统质量、刚度和阻尼信息的状态空间矩阵，进而求得系统频响函数。

4.3 本章小结

本章论述了利用线性子空间法实现消能减震结构非线性系统识别的方法。通过 MATLAB 软件中的 Simulink 可视化模块等工具建立具有不同力学模型消能器的单自由度、多自由度的非线性系统数值模型，对本文所述非线性辨识方法进行了数值验证，且与常规线性子空间辨识方法进行了对比，发现该方法对于粘滞型阻尼器结构和摩擦型阻尼器结构都能得到较好的辨识效果，但是速度相关型线性阻尼器结构则无法适用。

提出对粘滞型阻尼器的非线性强度系数 μ_{nl} 和力学模型中阻尼指数 α 均未知的黑箱系统的辨识方法。分别采用地震波中强度不同的多段输入输出信号，通过本文所述方法进行多次系统辨识，获取不同强度地震激励下的系统参数（自振频率、阻尼比、非线性强度系数），并计算辨识所得的系统参数的均值和均方差，以“辨识非线性强度系数均方差最小”为原则，获取阻尼指数 α 和非线性强度系数 μ_{nl} 最优辨识值。

提出了针对在役消能减震结构非线性系统辨识的解决方案。即在结构顶层使用激振设备施加正弦激励，同时在结构各层设置加速度传感器，收集系统各自由度输出响应。通过本文所述方法，利用单输入多输出的监测数据实现非线性辨识。根据数值模拟结果，发现该方法辨识得到的系统参数存在一定误差，但是其操作

简单，数据更容易获得。且对于工程技术人员更关注的中低频部分基本能满足精度要求。

第5章 结论

5.1 本文工作总结

本文利用基于输出反馈的子空间非线性识别方法实现了对消能减震结构的固有结构体系的线性特性及附加消能器构件的非线性特性进行定量的识别的目的。首先,该方法基于系统的输出反馈建立消能器力学模型,将其力学模型中非线性强度系数引入到系统状态空间矩阵中,同时将消能器承担的层间剪力转化为外力作为系统输入,实现对非线性体系的解耦。其次,以系统位移响应为输出,系统外界激励和消能器内力为输入,通过线性子空间辨识方法获得固有结构体系的状态空间矩阵。最后,由辨识得到的状态空间矩阵计算出固有结构体系的动力特性,并利用传递函数不变性计算出消能器力学模型中的非线性参数。主要工作及研究结论包括以下几个部分:

(1) 系统地介绍了传统结构的物理方程向状态空间的转换、子空间识别的基本概念、状态矩阵的推导方法。通过数值模拟算例说明了常规子空间辨识算法在线性结构体系的系统识别中能够达到良好的辨识效果。但是,对于非线性系统采用线性子空间法进行等效线性化辨识,自振频率的辨识结果稳定,与真实值误差较小。但是阻尼比和振型的辨识结果,会随系统输入的强度不同而发生变化,辨识结果不具有稳定性,不能够反映结构的真实系统信息。

(2) 论述了利用线性子空间法实现消能减震结构非线性系统识别的方法。通过 MATLAB 软件中的 Simulink 可视化模块等工具建立具有不同力学模型消能器的单自由度、多自由度的非线性系统数值模型,对本文所述非线性辨识方法进行了数值验证,且与常规线性子空间辨识方法进行了对比,发现该方法对于粘滞型阻尼器结构和摩擦型阻尼器结构都能得到较好的辨识效果,但是速度相关型线性阻尼器结构则无法适用。

(3) 提出对于非线性强度系数 μ_{nl} 和力学模型中阻尼指数 α 均未知的黑箱系统的辨识方法。先假设阻尼指数为某一个值,然后分别采用地震波中强度不同的多段输入输出信号,通过本文所述方法进行多次系统辨识,获取不同强度地震激励下的系统参数(自振频率、阻尼比、非线性强度系数),计算辨识得到的系统参数的均值和均方差。最终,通过数值模拟发现以“辨识非线性强度系数均方差最小”为原则,可以获取较高精度的阻尼指数 α 值。

(4) 提出了针对在役消能减震结构非线性系统辨识的解决方案。即在结构顶层使用激振设备施加正弦激励,同时在结构各层设置加速度传感器,收集系统各自由度输出响应。通过本文所述方法,利用单输入多输出的监测数据实现非线

性辨识。根据数值模拟结果,发现该方法辨识得到的系统参数存在一定误差,但是其操作简单,数据更容易获得。且对于工程技术人员更关注的中低频部分基本能满足精度要求。其更大的优点在于,激励只需在一个频率点进行激励就可以获得结构的全频率范围内的系统频响函数,原因在于本方法求取频响函数并非采用简单的各频率点最小二乘拟合,而是先获得包含有系统质量、刚度和阻尼信息的状态空间矩阵,进而求得系统频响函数。

5.2 本课题继续研究展望

本文在论述证明基于输出反馈的消能减震结构非线性系统子空间识别方法中,设定了部分假设前提,对于输入输出数据有较特殊的要求,故实际应用中仍有许多问题值得深入研究探讨。对本文所述方法尚存在的问题论述如下:

(1) 由于对状态空间方程特殊限制,在计算中输入数据要求为各自由度的输入力时程,即地震波加速度时程与各自由度质量相乘,输出数据要求为各自由度的输出速度时程或者位移时程。但是在实际结构中,信号采集多为加速度时程信号,故要将其转化为本方法可以用的输入数据,需要已知结构的质量矩阵,因此本文所述方法需要配合能够高效地识别系统质量矩阵的方法,对系统的质量矩阵进行预辨识。对于本方法的输出数据,则需要对收集到的各自由度加速度时程信号进行数值积分,获得各自由度的速度时程或位移时程曲线。显然,对于质量矩阵的预辨识和对加速度信号的数值积分,都会给算法带来新的误差和数值不稳定现象。如何减少这两个问题带来的影响,尚须进行进一步的研究。

(2) 实际结构中消能器力学模型一般为速度型或者速度位移混合型,故对该方法为了辨识消能器的力学模型,需具有消能器相邻楼层响应时程,即在实际结构中在每个加装消能器的楼层安装信号采集设备。实际中,这样操作的成本和经济性必然会得到质疑。故是否能够对算法提出进一步的改进,使其能够适应数据不完备情况下的系统固有结构线性辨识和消能器构件非线性辨识。是否能提出传感器的优化布置方案,使获得的信号数据既能满足算法需要,又能具有一定的经济性。

(3) 本文在验证算法的过程中使用的消能器力学模型,均为层间速度的指数次幂。考虑消能器的性能退化问题时,也假设了消能器力学模型不变,性能退化仅体现为消能器的非线性系数发生变化。实际结构中,消能器的力学模型很多时候并不能满足本文假设的,且消能器的性能退化原理尚须进一步研究,并非简单的非线性强度系数发生变化,也可能伴随力学模型的变化。故对于本文所述方法中消能器力学模型的引入尚须进行更多的研究。

致谢

两年多的同济时光转眼即逝。回首自己这两两年来的硕士生活，有刚考上研究生的兴奋和欢畅，也有面对人生抉择的彷徨和迷茫。但更多的时间，我都脚踏实地地在为各个小目标奋斗努力。这段不长不短的时光书写着我美好的人生画卷，也必将成为我生命中一段特别而又难忘记忆。

本文能得以完成，首先感谢我的导师薛松涛教授与副导师谢丽宇讲师，论文的选题、撰写到定稿，都渗透着两位导师的悉心指导。薛老师性格洒脱、学识渊博，广阔的国际视野、严谨的治学态度、勤奋的工作作风以及低调的处事风格都给我留下了非常深刻的印象。谢丽宇老师年轻有为，思维活跃，视野开阔，知识渊博，工作勤奋，时刻关注学子的研究进展，对于学生的指导更是毫无保留。而本文从论文选题到研究方法的选择以及最后的修改定稿都是在副导师谢丽宇讲师的悉心指导下完成的。同时我也从谢老师那里学到了很多宝贵的研究思路与方法。这两年多来如果没有谢老师对我研究工作的指导和帮助，我定将走很多弯路。

此外，研究室的唐和生老师在我的研究生学习阶段也给予了很大的指点和鼓励，在此也发自内心的感谢。

感谢研究室的博士生白杰师兄，虽然他已经毕业一年多，我们很久没有见过面了，但是他依然是我心中的大哥。

同时要感谢的还有：我的同门王航航、李大伟、牟晓彤、陈微，感谢他们两年多的相伴，以及在日常生活、学习中给予我的帮助，与他们的友谊将成为人生的又一笔财富；以及博士后师姐张毅捷，她对学术的虔诚、积极向上的人生态度都无时无刻在激励着我；以及博士生苏瑜师姐、荀阳师兄，感谢她在 MATLAB 程序调试中给予的莫大帮助；还要感谢研二的王兵、梅佳河师弟和研一的杨桂权师弟、李林师弟、余必龙师弟、蒋灿师弟、黄志云师妹，与他们的相处非常融洽，整个研究室的氛围始终是团结、活泼、快乐的。

最后，要感谢是远方的父母，谢谢他们的养育之恩。辛苦工作的父母，永远都是我努力学习的动力和精神支柱，希望他们能身体健康、开心幸福。

2015 年 4 月

参考文献

- [1] Arora V. Structural damping identification method using normal FRFs[J]. *International Journal of Solids and Structures*. 2014, 51(1): 133-143.
- [2] Weng J H, Loh C H, Yang J N. Experimental Study of Damage Detection by Data-Driven Subspace Identification and Finite-Element Model Updating[J]. *Journal of Structural Engineering*. 2009, 135(12): 1533-1544.
- [3] Jssi. Summary of Response-Controlled Buildings in Japan[R]. Japan Society of Seismic Isolation (JSSI), 2012.
- [4] 谢丽宇, 唐和生, 薛松涛. 减振高层建筑的极限破坏及性能再生的研究现状及前景[J]. *结构工程师*. 2014, 30(3): 205-212.
- [5] Housner G W, Bergman L A, Caughey T K, et al. Structural control: past, present, and future[J]. *Journal of engineering mechanics*. 1997, 123(9): 897-971.
- [6] Sohn H, Farrar C R. Damage diagnosis using time series analysis of vibration signals[J]. *Smart materials and structures*. 2001, 10(3): 446.
- [7] Jeary A P. The description and measurement of nonlinear damping in structures[J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1996, 59(2-3): 103-114.
- [8] Chao S H, Loh C H, Tseng M H. Structural damage assessment using output-only measurement: Localization and quantification[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2014, 25(9SI): 1097-1106.
- [9] 吴亚锋. 子空间系统辨识方法及其在复杂结构中的应用[D]. 西北工业大学, 2000.
- [10] Ljung L. *System Identification-Theory for the User*[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.
- [11] Kalman R E. Effective construction of linear state variable models from input output data[C]. 1965.
- [12] Juang J N P R S. An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Modal Reduction[J]. *J.Guid.Control,and Dyn*. 1985: 620-627.
- [13] Van Overschee P, De Moor B. Subspace identification for linear systems: Theory, implementation[J]. *Methods*. 1996.
- [14] Kerschen G, Worden K, Vakakis A F, et al. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2006, 20(3): 505-592.
- [15] Demarie G, Sabia D. Non-linear Damping and Frequency Identification in a Progressively Damaged R.C. Element[J]. *Experimental Mechanics*. 2011, 51(2): 229-245.
- [16] 朱全民. 非线性系统辨识[J]. *控制理论与应用*. 1994.
- [17] 徐小平, 钱富才, 王峰. 非线性系统辨识方法研究[J]. *计算机工程与应用*. 2010, 46(6): 19-22, 25.
- [18] 萧龙翔, 曹树谦, 张文德. *振动结构模态分析—理论、试验与应用*[M]. 天津: 天津大学出版社, 2000.
- [19] 傅志方, 华宏星. *模态分析理论与应用*[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2000.

- [20] Gandino E, Garibaldi L, Marchesiello S. Covariance-driven subspace identification: A complete input-output approach[J]. *Journal of Sound and Vibration*. 2013, 332(26): 7000-7017.
- [21] Van Overschee P, De Moor B. Subspace identification for linear systems: Theory, Implementation, Methods[Z]. 1996.
- [22] Verhaegen M, Dewilde P. Subspace model identification part 1. The output-error state-space model identification class of algorithms[J]. *International journal of control*. 1992, 56(5): 1187-1210.
- [23] Verhaegen M. Subspace model identification part 3. Analysis of the ordinary output-error state-space model identification algorithm[J]. *International Journal of control*. 1993, 58(3): 555-586.
- [24] Verhaegen M. Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations form from input-output data[J]. *Automatica*. 1994, 30(1): 61-74.
- [25] Chou C T, Verhaegen M. Subspace algorithms for the identification of multivariable dynamic errors-in-variables models[J]. *Automatica*. 1997, 33(10): 1857-1869.
- [26] Larimore W E. Canonical variate analysis in identification, filtering, and adaptive control[C]. IEEE, 1990.
- [27] Noel J P, Marchesiello S, Kerschen G. Subspace-based identification of a nonlinear spacecraft in the time and frequency domains[J]. *Mechanical systems and signal processing*. 2014, 43(1-2): 217-236.
- [28] Noel J P, Kerschen G. Frequency-domain subspace identification for nonlinear mechanical systems[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2013, 40(2): 701-717.
- [29] 贺佳. 结构非线性行为及动力荷载时域识别研究[D]. 湖南大学, 2012.
- [30] 陈廷君. 消能减震结构设计方法的比较研究[D]. 同济大学, 2008.
- [31] 刘东霞. 基于随机子空间法的梁桥模态参数识别[D]. 西南交通大学, 2008.

个人简历、在读期间发表的学术论文与研究成果

个人简历:

宋琛琛, 男, 1989 年 12 月生。

2012 年 6 月毕业于中南大学土木工程专业, 获学士学位。

2012 年 9 月入同济大学攻读硕士学位。

已发表论文:

[1] 宋琛琛, 于明博. 考虑温度应力的某大底盘双塔结构裙楼楼板地震反应分析.佳木斯大学学报

[2] 宋琛琛, 谢丽宇, 薛松涛. 压电阻抗技术在结构健康监测中的应用研究.结构工程师

[3] 苏瑜, 宋琛琛, 于明博. 某大底盘双塔结构在温度应力作用下的地震反应分析.河北工程大学学报(已录用)