



同濟大學

TONGJI UNIVERSITY

硕士学位论文

基于随机配点法的小时间尺度疲劳裂纹扩展不确定性分析

(国家自然科学基金项目资助 编号: 51178337, 50708076)

(科技部国家重点实验室研究项目 SLDRCE14-B-03)

姓名: 牟晓彤

学号: 1232363

所在院系: 土木工程学院

学科门类: 工学

学科专业: 防灾减灾及防护工程

指导教师: 唐和生 副教授

二〇一五年四月



同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

A dissertation submitted to
Tongji University in conformity with the requirements for
the degree of Master of Science

**Uncertainty Analysis of Small Time Scale model
Based Fatigue Crack Growth Using stochastic
collocation method**

(Supported by the National Natural Science Foundation of China
(Grant No. 51178337 and 50708076), Ministry of Science and
Technology of China (Grant No.SLDRCE14-B-03)).

Candidate: Xiaotong Mou

Student Number: 1232363

School/Department: School of Civil Engineering

Discipline: Civil Engineering

Major: Disaster Prevention Engineering

Supervisor: Hesheng Tang

April, 2015

基于随机配点法的小时间尺度疲劳裂纹扩展不确定性分析

牟晓彤

同济大学

学位论文版权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版；学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构送交论文的复印件和电子版；在不以赢利为目的的前提下，学校可以适当复制论文的部分或全部内容用于学术活动。

学位论文作者签名：

年 月 日

同济大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：

年 月 日

摘要

在土木工程领域，疲劳损伤是结构耐久性研究的基础问题。因而选择正确的疲劳损伤模型和高效的不确定性数值计算方法对于土木工程结构的疲劳损伤不确定性分析是十分必要的。

疲劳损伤是一个综合性强的庞大系统，本文将主要研究单向荷载下金属板的疲劳裂纹扩展不确定性问题。主要思路是两个方向，一是运用小时间尺度模型作为疲劳裂纹扩展模型，二是运用随机配点法进行不确定性分析，主要工作有：

(1) 阐明在土木工程领域中进行疲劳损伤不确定性分析的必要性。介绍疲劳损伤基本理论，阐述解决疲劳损伤方法的发展进程和研究现状，引入小时间尺度模型。介绍不确定性表达理论和求解不确定性问题的数值方法，分析这些方法的优缺点，引入随机配点法。

(2) 介绍小时间尺度裂纹扩展模型的基本概念。在常幅荷载下对铝合金板 2024-T42 进行小时间尺度裂纹扩展计算，并与试验结果进行对比，验证小时间尺度计算方法的可靠性。进一步在一组随机输入的荷载下进行裂纹扩展确定性分析。

(3) 介绍随机配点法求解不确定性问题的基本思想、基本步骤和求解途径，对随机配点法的核心技术——多项式插值技术进行详细的说明。

(4) 以 7075-T6 铝合金板疲劳裂纹扩展实验数据为基础，确定不确定材料参数并评估其分布类型，利用随机配点法分析常幅下的金属板剩余疲劳寿命的统计特征，并与试验结果比较，验证随机配点法计算的可靠性、计算效率和计算精度。

(5) 基于小时间尺度模型和随机配点法，在一组随机荷载下对金属板进行疲劳裂纹扩展分析。分别计算直接积分法和雨流计数转化法下的金属板疲劳裂纹扩展长度的统计特征，分析两种方法的计算效率和计算精度。

最后，对本文的研究进行了总结，给出了相关结论，并指出进一步研究中的展望。

关键词：疲劳损伤，不确定性分析，小时间尺度模型，随机配点法

ABSTRACT

Fatigue damage is the basic problem in the research of durability of engineering structures. The development of reasonable measures to maintain structures relies on accurate prediction of the remaining useful life (RUL) of structures. Choosing an correct model for crack growth and an efficient numerical method in fatigue damage of civil engineering structures is very necessary.

Fatigue damage is a comprehensive system, this paper will focus on uncertainty research for fatigue damage of the metal plate under unidirectional load. It includes two main aspects: small-time scale model based fatigue crack growth analysis, stochastic collocation method based uncertainty analysis. This paper mainly contains:

(1) Firstly, the necessity of fatigue damage and uncertainty analysis in the field of civil engineering is clarified. The basic theory of fatigue damage is introduced, including development process and research status of fatigue damage methods, the small-scale model is mentioned. Uncertainty theory and numerical methods for solving uncertainty problems are introduced, the advantages and disadvantages of these methods are analyzed and the stochastic collocation method is mentioned.

(2) The basic concepts of small time scale model of crack growth is described. The crack growth analysis based on small time scale model of aluminum alloy 2024-T42 plate is calculated under constant amplitude load, and the results are compared with the test in order to verify the reliability of the small time scale model. Further analysis of crack propagation under a random input load is also investigated.

(3) The basic idea of the stochastic collocation method is described. One of the core technology of the stochastic collocation method, the polynomial interpolation technique is explained in detail.

(4) Using the fatigue crack propagation experimental data of Al7075-T6 plate, The uncertain material parameters are determined and their distribution type are assessed. The stochastic collocation method is used to analysis fatigue life statistical features of the metal plate under constant amplitude load. The computing reliability, computational efficiency and accuracy of the proposed method are verified by the test data.

(5) Based on the small time scale model and stochastic collocation method, the fatigue crack growth of metal plates under a set of random load is analyzed. The

statistical characteristics of fatigue crack length of the metal plate using the direct integration method and rainflow counting transformation method are presentd, their computational efficiency and accuracy is also discussed.

Key Words: fatigue damage, uncertainty analysis, small time scale model, stochastic collocation method

目录

摘要.....	I
ABSTRACT.....	III
第 1 章 绪论.....	1
1.1 引言.....	1
1.2 疲劳损伤.....	2
1.2.1 疲劳损伤过程.....	3
1.2.2 疲劳裂纹扩展速率模型.....	4
1.2.3 小时间尺度裂纹扩展模型.....	6
1.3 不确定性分析理论及数值计算方法.....	7
1.3.1 不确定性分类及分析理论.....	7
1.3.2 不确定性分析理论.....	8
1.3.3 不确定性数值计算方法.....	10
1.4 本文的主要研究内容.....	14
第 2 章 小时间尺度裂纹扩展模型.....	16
2.1 应力强度因子的计算方法.....	16
2.2 小时间尺度裂纹扩展模型的基本概念 ^[32]	18
2.2.1 裂纹扩展增量动力学.....	19
2.2.2 正向和反向塑性区裂纹增长的相互作用.....	20
2.2.3 小时间尺度模型与经典裂纹增长模型的关系.....	23
2.3 常幅荷载下疲劳裂纹扩展.....	23
2.3.1 试验数据介绍.....	23
2.3.2 基于小时间尺度模型的疲劳裂纹扩展寿命计算.....	25
2.4 随机荷载下的小时间尺度模型.....	26
2.4.1 通用公式直接积分计算.....	26
2.4.2 雨流计数法转化计算.....	27
2.4.3 两种方法的比较.....	31
2.5 本章小结.....	32
第 3 章 随机配点法.....	33
3.1 引言.....	33
3.2 随机配点法的基本概念.....	33
3.2.1 不确定性问题的描述.....	33
3.2.2 不确定性的量化.....	34
3.2.3 不确定性问题的解.....	36
3.2.4 求解途径.....	37
3.3 随机配点法的计算步骤与方法.....	38
3.3.1 计算步骤.....	38
3.3.2 多项式插值方法.....	39
3.4 一维固定系数插值.....	40

3.4.1 Lagrange 插值	41
3.4.2 分段线性插值	42
3.5 高维固定系数插值	44
3.5.1 张量积 (Tensor Product)	44
3.5.2 全张量积法	45
3.5.3 稀疏网格插值法	46
3.5.4 两种高维插值方法的比较	48
3.6 本章小结	51
第 4 章 常幅加载下金属板疲劳损伤预后不确定性分析	52
4.1 引言	52
4.2 疲劳裂纹扩展实验数据和材料参数评估	52
4.2.1 疲劳裂纹扩展实验	52
4.2.2 不确定性建模和概率分析	55
4.2.3 疲劳裂纹扩展曲线建立	56
4.3 金属板疲劳损伤预后不确定性分析	57
4.3.1 金属板疲劳损伤预后模型	57
4.3.2 金属板疲劳寿命代理多项式	58
4.3.3 剩余疲劳寿命评估	60
4.4 本章小结	64
第 5 章 随机变幅加载下金属板疲劳损伤不确定性分析	65
5.1 引言	65
5.2 小时间尺度直接积分法下的疲劳损伤不确定性分析	65
5.3 雨流计数转化法的疲劳损伤不确定性分析	73
5.4 小时间尺度直接积分法与雨流计数转化法的比较	80
5.5 本章小结	84
第六章 结论与展望	86
6.1 结论	86
6.2 进一步的研究工作	87
致谢	88
参考文献	90
个人简历、在读期间发表的学术论文与研究成果	错误!未定义书签。

第 1 章 绪论

1.1 引言

近年,随着我国城市化进程不断加深,大量土工结构如雨后春笋般拔地而起,异型、超高层、特大型地标性建筑已然成为城市形象的代言,对这些特型建筑结构健康监测的研究也逐渐引起了科研工作者的注意。其中,结构耐久性问题越发得到人们的关注。工程的生命周期包括工程建造过程、使用过程和老化过程。以往的工程设计阶段仅考虑使用过程的安全性,而事实上使用阶段的平均风险率是最低的^[1]。在老化过程中,材料性能在长时间的环境作用中逐渐退化,结构功能不能继续满足人们的使用要求,安全性也随之降低。由此,人们每年需要投入大量资金用于结构的维护和修缮。于是,在工程设计阶段除了应考虑使用过程的安全,还应最大限度地增加结构的耐久性。而损伤预后是工程耐久性问题中所需研究的最基本问题。损伤预后是指根据结构当前损伤状态的精确信息及结构未来服役环境的预测信息,以结构损伤演化模型为基础,预测结构的剩余使用寿命^[2,3]。

目前,我国工程建设的规模公认世界第一,每年用于工程建设领域的投资占到 GDP(国内生产总值)的 15%左右^[1]。随着工程技术和国民经济的飞速发展,土木结构正朝着高层次、大柔度方向迈进^[4],其中大型土木结构的数量已稳居世界前列。大型土木结构包括特超高层建筑、大跨桥梁和大型体育场馆等重要的土木基础设施^[5]。在全球前十的超高层建筑中,有六座出自我国,平均高度为 590 米。而我国已建和在建的跨海大桥已达到 31 座,容纳观众数在 1 万以上的大型体育场馆已超过 200 座。这些结构通常构形复杂、施工难度大且耗时长,建成后不可避免地存在先天性细观缺陷,简称初始缺陷或初始损伤。初始缺陷,在结构服役期内受到环境侵蚀、材料性能退化、荷载的长期疲劳效应等因素的综合作用,逐步演化发展,导致结构损伤累积和抗力衰减,如不及时制定有效的维修策略,最终会引起结构失效。而且,大型土木结构一般是所在地的地标性建筑,一旦发生破坏,不仅会造成重大人员伤亡和巨大经济损失,而且会产生极坏的社会影响^[5]。因此,解决大型土木结构的安全服役问题,在我国具有重大的现实意义。损伤预后,是基于结构的损伤演化规律,得到大型土木结构的剩余使用寿命的预测值,为制定合理的维修措施提供理论依据,进而防止结构在正常使用条件下发生突然倒塌。

众所周知,砖、石、木材、混凝土和钢筋混凝土等土木工程中常用的建筑材料,绝大部分是非均质的。由于制作工艺、材料配比和养护等因素的影响,材料

物性能参数具有不确定性,例如:如弹性模量、泊松比、断裂韧性等。而且,在不同构件上的测量值或在同一构件不同部位上的测量值也是不同的。在土木结构的施工和建造过程中由于人员素质、施工机械设备、施工工艺和施工环境的差异,材料和构件初始缺陷的分布和尺寸具有不确定性。结构在服役过程中又可能会受到地震、降雨、风、雪等自然现象的作用,导致荷载也具有不确定性[6]。此外,损伤演化跨越微观、细观和宏观,是一种多尺度、跨层次和非线性的演化过程^[5]。人们对于损伤演化规律的认知具有差异性,导致数学计算的“物理模型”具有不确定性。由于在土木工程实践的设计、施工和使用等环节中存在大量的不确定性因素,将不确定性分析引入疲劳损伤预后中是自然而合理的选择。

不确定性分析在原确定性问题的基础上增加了不确定性因素的影响,使得原问题的求解更为复杂,但更符合工程实际。早期人们一般采用基于随机分析理论的方法求解不确定性问题的解析解,其中比较著名的方法有 Ito 积分、Stratonovich 积分和 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK)方程。事实上,很多工程实际问题的解析解是很难找到或根本不存在。因此,这些方法只适用于求解某些特定的工程问题。目前,随着计算机技术的飞速发展,数值计算方法被广泛用于不确定性问题的求解中,比较常用的方法有蒙特卡洛(Monte Carlo)法、区间法和广义多项式混沌(Generalize Polynomial Chaos, GPC)法等。高效数值计算方法的开发使复杂系统的不确定性分析得以实现,如高层结构抗震、桥梁抗风、结构的稳定性及失效等。

1.2 疲劳损伤

目前,疲劳损伤分析方法不外乎两类^[78]:第一类是基于材料试验曲线($s-N$ 曲线或 $\varepsilon-N$ 曲线)和累积损伤准则的裂纹萌生分析;第二类是基于断裂力学的裂纹扩展分析,假定构件存在初始微裂纹。其中,第一类分析方法不考虑荷载加载次序和初始裂纹长度等影响,没有定义明确的失效状态,是一种纯经验的统计方法。第二类分析方法通过引入应力强度因子 K (线弹性断裂力学)和裂纹张开位移 δ 或 J 积分(弹塑性断裂力学)^[6],表征裂纹尖端的应力应变场,为结构剩余寿命的估计提供依据。显然,基于断裂力学的第二类分析方法更能反映疲劳损伤的本质。

在断裂力学中,线弹性断裂力学是最简单且理论研究比较成熟的一个分支。它认为材料在断裂以前基本处于弹性范围,用线弹性力学理论研究裂纹尖端的应力场,建立应力强度因子与裂纹扩展长度之间的关系,并利用表征裂纹扩展过程的物理模型,进行疲劳损伤分析。本章的研究主要基于线弹性断裂力学,下文将

简要介绍疲劳损伤过程、裂纹扩展速率模型和应力强度因子的计算方法。

1.2.1 疲劳损伤过程

疲劳损伤是一个横跨微观和宏观的多尺度演化过程，大致可分为三个阶段^[79]：裂纹萌生阶段、裂纹稳定扩展阶段和失稳断裂，如图 1.1 所示。

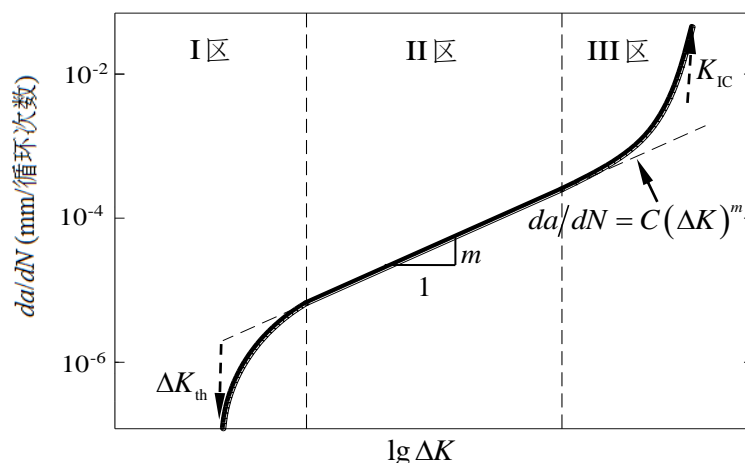


图 1.1 $da/dN - \Delta K$ 关系曲线

该图为双对数坐标下的 $da/dN - \Delta K$ 关系曲线，常用于描述疲劳裂纹扩展的一般规律。当作用于裂纹尖端的应力强度因子幅度 ΔK 高于应力强度因子幅度门槛值 ΔK_{th} 时，裂纹发生扩展。在 ΔK 略高于 ΔK_{th} 的范围内，裂纹低速扩展且随着 ΔK 的增加扩展速率的增幅较高，定性地称这一阶段的扩展为近门槛值扩展区（I 区）。随着 ΔK 的继续增加，裂纹扩展速率逐渐以某种恒定的数值缓慢升高，称这一部分为中部稳态扩展区（II 区）。当 ΔK 进一步增加，裂纹扩展速率将再次快速升高直至发生断裂，称这一阶段为快速扩展区（III 区）。图中的这三个区域：近门槛区、中部稳定区和快速扩展区，分别属于疲劳损伤过程的裂纹萌生阶段、稳定扩展阶段和失稳断裂。

裂纹萌生阶段是疲劳破坏中的初始阶段，疲劳破坏大都始于应力集中区域，如含有缺陷、切口或夹杂物的地方。裂纹萌生阶段可细分为三个过程：初始循环变形和损伤、微裂纹形核和微裂纹扩展。金属材料循环变形和损伤过程最重要的现象是循环硬化或软化，即材料应力-应变滞回曲线随循环次数的增加逐渐扩张或逐渐收缩，这一现象将导致材料表面产生微区塑性变形。当塑性变形累积到一定程度后，位错的继续运动将引发位错崩，形成新的滑移带，最终萌生微裂纹。微裂纹形核有三种机制：持续滑移带微裂纹，晶界微裂纹和杂物附近微裂纹。微裂纹的长度一般为 0.5-1.0mm，在同样的名义驱动力下，具有比长裂纹更高的扩展速率。长裂纹属于裂纹的稳定扩展阶段。微裂纹的扩展速率具有先减速后加速

的特征，加速阶段对应于上文提到的门槛区。裂纹萌生阶段比较漫长，几乎占据整个疲劳寿命的 80%^[8]。一般，该阶段中材料或构件发生失效的风险较低，进行损伤预后的意义不大。

裂纹稳定扩展阶段（II 区）是研究和观测最早进行的区域，其中，有关金属材料的研究成果最多，这里将予以简要讨论。金属材料在裂纹稳定扩展阶段的扩展机制有四种：条带机制、微孔连接、微区解理和晶间分离。其中，最常见的是条带机制，普遍认为条带是由裂纹尖端区域交替锐化和钝化产生的。微孔连接机制认为：裂纹尖端前方的三轴应力区域内将出现微孔，微孔在循环荷载作用下逐渐长大，导致与裂纹尖端连接的韧带变薄而最终引起裂纹扩展。条带机制和微孔连接机制是两种塑性扩展机制。微区解理机制通常在含有脆性第二相质点的合金中观察到。晶间分离机制主要在回火和淬火的中碳高强度钢中被观察到。本文主要关注以塑性机制扩展的疲劳损伤的寿命预测。

失稳断裂（III 区）的时间非常短，占据疲劳总寿命的极小一部分，且材料或构件在失稳阶段中已丧失了正常服役的能力，因此疲劳损伤预后时可忽略这部分的计算。

1.2.2 疲劳裂纹扩展速率模型

由上文可知，疲劳损伤预后主要关注裂纹稳定扩展阶段。目前，用于描述这一阶段裂纹扩展规律的物理模型有很多，如 Paris 公式、Walker 公式和 Forman 公式等。这些模型的形式虽不相同，但都是基于 Paris 公式，综合考虑应力比、断裂韧性或迟滞效应等的影响。

Paris(1961)^[7]认为在恒幅循环加载中，一个应力循环过程中的裂纹扩展速率 da/dN 与应力强度因子幅度 ΔK 具有如下关系：

$$da/dN = C(\Delta K)^m, \quad (1.1)$$

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min}, \quad (1.2)$$

其中， a 为裂纹长度的一半； N 为荷载循环次数，后文将此作为疲劳寿命； C 和 m 为拟合的材料参数； K_{\max} 和 K_{\min} 分别为一次荷载循环过程中的最大和最小应力强度因子。对公式（1.1）两边取对数可得：

$$\lg(da/dN) = \lg C + m \lg(\Delta K). \quad (1.3)$$

公式（1.3）表明在双对数对标中，Paris 公式表达的 da/dN 与 ΔK 呈线性关系（图 1.1 中的 II 区），由此可通过拟合疲劳试验数据获得材料参数 C 和 m 。Paris 公式是一种半经验性质的公式，自提出后，不少学者试图对它进行修正，使之的物理

意义更完善。

Forman(1967)^[9]等在 Paris 公式中增加了应力比和断裂韧性的影响, 为此提出下列模型:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^m}{(1-R)K_{IC} - \Delta K}, \quad (1.4)$$

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}, \quad (1.5)$$

其中, R 为应力比; σ_{\min} 为最大循环应力值; σ_{\max} 为最小循环应力值; K_{IC} 为断裂韧性, 属于材料的固有属性, 可由实验测定。

Wallker(1970)^[10]认为应力比对裂纹扩展速率的影响为指数关系, 提出模型:

$$\frac{da}{dN} = C \left[\frac{\Delta K}{(1-R)^n} \right]^m. \quad (1.6)$$

Wolf(1970)^[11]提出裂纹闭合概念——在循环拉伸荷载作用下开裂表面相互接触, 认为疲劳裂纹传播不仅受到裂纹尖端前方区域的影响, 还应受到裂纹尖端后方的裂纹闭合的影响, 故 Wolf 建议用有效应力强度因子范围 ΔK_{EFF} 替代 Paris 模型中的 ΔK 。 ΔK_{EFF} 的定义式为:

$$\Delta K_{EFF} = K_{\max} - K_{OP}. \quad (1.7)$$

其中, K_{\max} 是上文提到的最大应力强度因子, K_{OP} 是裂纹张开的应力强度因子。

Willenborg 等(1971)^[12]和 Wheeler(1972)^[13]认为裂纹尖端前方塑性区的相互作用影响裂纹的扩展行为, 过载会导致裂纹尖端前方存在较大的塑性区域, 进而引起裂纹迟滞, 为此在 Paris 公式中引入迟滞系数表示过载下的裂纹扩展速率模型, 如公式 (1.8)。

$$(da/dN)_{\text{retarded}} = \phi_R \cdot C(\Delta K)^m, \quad (1.8)$$

其中, ϕ_R 为迟滞系数, 依赖于应力水平、裂纹形状和荷载谱。

Forman 和 Mettu(1992)^[14]在原 Forman 公式 (1.4) 的基础上, 考虑应力强度因子幅门槛值 ΔK_{th} 和断裂韧性 K_{IC} 的影响, 提出四参数 Forman 公式 (1.9)。

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(1-f)^n \Delta K^n \left[1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K}\right]^p}{(1-R)^n \left[1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_{IC}}\right]^q}, \quad (1.9)$$

其中, f 为裂纹张开函数; C 、 n 、 p 和 q 为材料参数。该公式综合考虑了疲劳

裂纹扩展全过程中的各种因素的影响,能基本描述裂纹扩展速率 da/dN 全过程的规律。

纽曼^[15,16]通过运用带屈服模型分析了裂纹闭合问题,模型是基于由材料塑性变形引起的裂纹增长的相互作用效应的假设。布狄安斯基和哈钦森^[17]进行了在持续受到循环加载下的疲劳裂纹扩展的理论研究,计算在平面应力状态下满足小时间尺度屈服条件时可塑性诱发的裂纹闭合。常等人^[18]把这项研究^[17]扩展至更一般的情况,它可以评估的试样的厚度,应力状态的影响以及在更大应力范围内裂纹尖端应变硬化水平。

虽然疲劳裂纹闭合概念已经得到了很多实验和理论研究的支持,但某些研究对裂纹闭合的概念还存在质疑。瓦苏德万等^[19]指出,当所施加的一直是拉应力时,疲劳裂纹在卸载过程中仍然保持开放。Riemelmoser 和 Pippin^[20]指出裂纹闭合只在在特殊情况下存在,由于与其它位移的相互作用裂纹尖端后面的位移比相应的位移边缘高度更大。近几年张某某进行了一系列实验研究^[21,22]表明了裂纹闭合的概念无法解释小疲劳裂纹的快速扩展速率。

反向塑性区概念是另一种解释复杂疲劳裂纹扩展行为的方法。常^[18]建议的反向塑性区应当做为疲劳裂纹扩展行为的主要参数。一些研究者^[23]表明,在考虑了施加的应力水平影响,试样厚度和裂纹闭合等条件的情况下,反向塑性区的大小可以作为评估疲劳裂纹扩展的更好参数。麦克朗^[24]提出了一个用于估算反向塑性区大小,基于欧文 - 赖斯模型的简单模型,欧文 - 赖斯模型可以反应裂纹张开应力和反向塑性区大小关系。

上述工作都是常幅加载下的疲劳裂纹扩展。对于变幅加载,疲劳裂纹扩展将更为复杂。目前的模型有屈服区模型^[12,13],裂纹闭合模型^[25-28]等。屈服区模型考虑了裂纹尖端的塑性区影响,如惠勒模型^[12,13]和 Willenborg 模型^[13]等已经在疲劳损伤中广泛运用的方法。这两种模型需要不同的荷载比下裂纹扩展速率的数据来进行校准,但它们都不能考虑卸载效果。拉伊等人^[29]在纽曼提出的裂纹闭合理论^[30,25]的基础上开发了一种状态空间模型。

1.2.3 小时间尺度裂纹扩展模型

以上是已有的裂纹扩展相关研究,可以看到尽管有多种模型,但它们都是基于循环荷载的 (da/dN)。目前,有少部分对于小时间尺度疲劳分析的研究。波米耶和 Risbet^[31]以热力学的耗散过程为基础提出了一组以时间为变量的疲劳裂纹方程,但此模型并未考虑裂纹闭合效应。张等人^[21,22]提出了在常幅加载下的裂纹扩展增量假设。但是没有给出详细的建模机制和不同的应力比下的实验数据以评估模型参数。近几年来卢孜孜^[32]提出了一种新的疲劳裂纹扩展模型——小时间尺

度模型^[32]，它可以直接对时间进行积分。它的核心理论是在一个荷载周期里任意时间($t+dt$)的疲劳扩展增量动力学。从图 1.2 中可以看出加载时，裂缝会随着瞬时时间 dt 的增长而扩展增加 da 。对于给定的裂纹扩展时间 Δt ，裂纹长度可以通过时间积分通过直接计算。

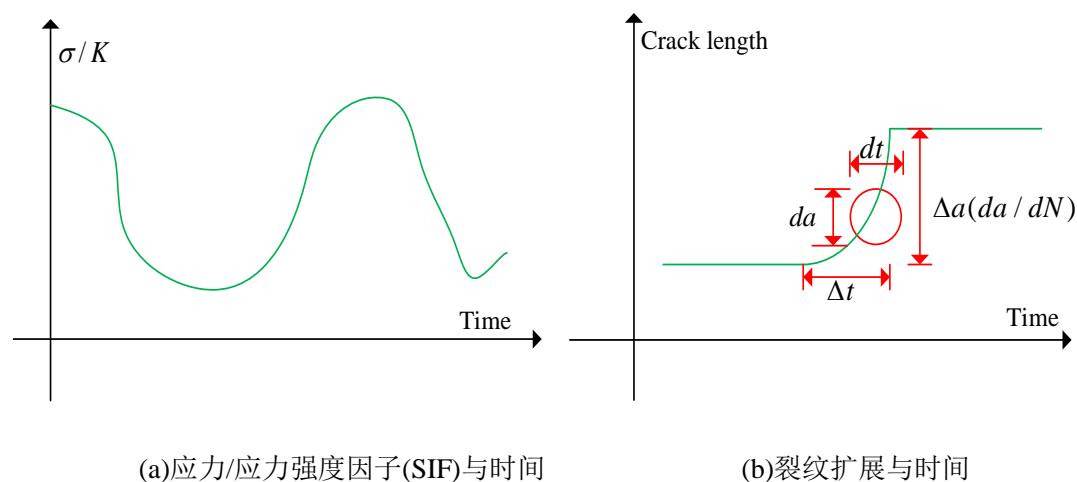


图 1.2 小时间尺度的裂纹扩展模型示意图

小时间尺度模型的提出，将极大地提高材料层面的疲劳损伤的理解，并且使结构层面的疲劳损伤预后成为可能。通用的多尺度疲劳分析和复杂裂缝扩展仿真模拟对于结构系统中各部件的曲线裂纹增长是至关重要的，比如直升机的桅杆，变速箱系统的滚动接触疲劳，以及车辆传输系统的旋转弯曲。

本文将采用这一全新的方法，后面将详细展示其推导过程。

1.3 不确定性分析理论及数值计算方法

1.3.1 不确定性分类及分析理论

不确定性分析需建立在不确定性合理表达的基础之上，而对不确定性的合理表达则首先需要对不确定性进行正确的理解和分类。不确定性的分类方法有很多，工程中常根据不确定性的本质，将其分为偶然不确定性和认知不确定性^[33-36]。偶然不确定性，也称不可约不确定性、随机不确定性或变异性^[37]，是指数量变化遵循一定规律的不确定性。当样本数量足够时，偶然不确定性可用概率密度函数或累积分布函数进行表征。其中，累积分布函数是概率密度函数的简单积分。认知不确定性，也称可约不确定性或无知不确定性，是指人们在建模和仿真时由于缺乏知识而产生的不确定性。如果增加知识（通过实验、数值逼近的改进、专家意见和逼真度更高的物理建模等），则可减少甚至消除这种不确定性。通常，认

知不确定性可用不相关的置信区间或信任函数进行表征。

工程实践中存在很多的不确定性来源，如材料物理性能、几何尺寸、初始缺陷、边界条件、荷载条件等，同时科学计算中也存在许多不确定性来源，如离散误差、迭代收敛误差、舍入误差、由计算机编码错误引起的误差、模型形式的误差等。这些不确定性来源最终可归类为：纯偶然不确定性、纯认知不确定性或混合偶然-认知不确定性。但这种分类不是绝对的，随着人的认知水平的提高或采集的信息量的增加，认知不确定性来源将不断减少，而混合偶然-认知不确定性将转化为偶然不确定性。工程实际中，应尽量减少认知不确定性的影响。对于偶然不确定性，工程中有成熟的概率理论进行分析；而对于认知不确定性，则应根据具体的情况选择合适的 uncertainty 理论对不确定性进行表达或量化，这对工程结构的计算和设计具有重要意义。

1.3.2 不确定性分析理论

目前，工程领域中应用较为广泛的不确定性理论有概率论和模糊集理论，但二者均需知道大量不确定性参量的信息以确定其概率密度函数或模糊隶属度函数。当可获知的信息量不足以确定不确定性参量的分布时，人为假定将引入较大的分析误差^[38]。为此，区间理论、证据理论、粗糙集理论、凸集模型理论等适用于信息量不充分的不确定性分析理论逐渐新兴起来。不确定性分析理论逐渐从单一的经典概率理论过渡到多元化的发展，人们对工程中的不确定性的认识与了解也将更深入^[39]。

(1) 概率论

概率论 (Probability Theory) 起源于机会游戏，是不确定性分析中的经典理论，主要用于研究随机现象。概率论用区间 $[0,1]$ 中的一个实数表示事件发生的可能性大小，0 表示不可能事件，1 表示必然事件。事件的发生概率需满足概率公理 (Kolmogoro 公理)：概率具有非负性；所有可能事件发生的概率之和为 1；不相关事件的发生概率可以叠加。概率论需要建立在大量随机试验的基础上，利用数理统计工具，找出随机现象的数量变化规律，获得相应的概率分布特征。工程中常用的概率分布类型有：高斯分布 (亦称正态分布)、对数正态分布、均匀分布、泊松分布和指数分布等。

(2) 贝叶斯概率理论

贝叶斯概率理论 (Bayesian Probability Theory, BPT) 定义了一种的新的概率测度——信任程度，采用似然函数而不是频率来描述概率。在基于贝叶斯概率理论评估一种假设的概率时，人们首先需要提出具体的先验概率，然后根据新的数据，修正先验概率。BPT 的基础早在 200 年由 Bernoulli、Bayes 和 Laplace 建

立，但在当时没有得到人们的认可，直到最近的几十年才开始了一场“贝叶斯革命”^[40]。现在，BPT 普遍应用于自然学科中。它常用来判断在噪声、稀疏数据或不确定性数据存在的情况下假设的相对有效性，也可用于模型中参数的调整。

(3) 区间概率理论

区间概率理论 (Interval Probability Theory, IPT) 基于概率公理，可用于描述信息的模糊性和不完备性。区间概率用区间数 $[a, b]$ 表达事件发生的概率，可认为是一种信任测度^[41]。区间数的下界 a 表示相信事件发生或可靠的程度，而 $1-b$ 表示不相信事件发生或事件不可靠的程度，区间数的范围 $b-a$ 表示信息的完备程度。当信息足够多时，区间的上下界数值相等时，区间概率实为点概率——经典概率理论描述的情形。

(4) 模糊集理论

模糊集理论 (Fuzzy Set Theory, FST) 自 1965 年首先由美国自动控制专家 Zadeh 教授在他发表的论文《模糊集》(Fuzzy Sets)^[42]中提出之后，发展十分迅速，已应用于工程实际的各个领域。与经典的集合论不同，FST 引入不确定性程度，承认差异的中间过渡状态，用介于 $[0,1]$ 之间的隶属度描述元素与集合之间的关系，将逻辑真值域由二元域 $\{0,1\}$ 拓展到区间域 $[0,1]$ 。基于 FST 的不确定性分析，关键在于构造不确定性参量的隶属函数，常用的方法包括 Fuzzy 统计、三分法等。模糊集隶属函数的建立引入了人的心理测量，具有较大的主观经验性。

(5) 粗糙集理论

粗糙集理论 (Rough Set Theory, RST) 于 1982 年由波兰学者 Pawlak 提出，类似于模糊集和证据理论，是一种表达不完备、模糊性知识的数学方法。RST 采用上、下近似两个集合对事件进行描述。下近似是事件所有确定性信息的集合；而上近似是事件所有可能性信息的集合。上、下近似之间相异的信息称为边界区域。集合的近似是 RST 中最基本的操作，也是处理模糊性、不确定性数据的主要手段^[43]。

(6) 凸集模型理论

凸集模型理论，顾名思义，采用凸集描述不确定性信息。所谓凸集，是指在向量空间中集合内部任意两点的连线全部包含在该集合内。严格地说，模糊集也属于凸集。模糊集可看作是所有模糊截集的并集，而每一个上下有界的模糊截集本质上是区间（套），这些区间同样属于凸集。凸集模型理论将不确定性参量的取值限定在凸集范围内，并在凸集内分析结构功能函数不确定性输出的“最不利情形”^[44]。凸集的不确定性表达较符合工程实际所遭遇的情况，分析结果也符合工程习惯，为大多数工程人员所广泛接受。

(7) 证据理论

上个世纪 60 年代 Dempster 在发表的一系列文章中提出了证据理论的基本概念^[45]。此后, Shafer 进一步发展了该理论,并在著作《证据的数学理论》(mathematical theory of evidence)中明确了相关术语和提法^[46]。由于 Dempster 和 Shafer 为该理论的发展做出了重要贡献,故证据理论又称 D-S 理论。证据理论引入数学似然率处理人的主观判断,是主观贝叶斯理论的推广,同时具备对“不知道”和“不确定”的表达能力。其中对“不知道”的表达能力是人对真实世界主观认知不确定性的数值量化。概率理论需对每一种可能的结果赋予相应的概率值,即基本事件的概率描述必须是完备的。而证据理论则提供了一种更为灵活的方式,它由互不相容的基本命题(假定)组成完备集合,给各命题分配信任程度,亦称基本概率分配(BPA 或 mass 函数)。证据理论可看作是对概率理论的推广,而贝叶斯的条件概率公式则可认为是 Dempster 证据组合规则的特例。

1.3.3 不确定性数值计算方法

数学上习惯用一系列的数学方程组表征工程实际问题,则求解不确定性工程问题归根结底为求解具有不确定性参数、不确定性输入或不确定性边界条件的偏/常微分方程,简称不确定性微分方程。不确定性微分方程的数值解法有很多,大致可分为两类:采样法和非采样法。采样法的基本思想是:在不确定性参数的值域空间中选取一些节点,计算选定节点上确定性的系统输出量,最后根据这些系统输出量的确定值计算得到系统输出量的统计特性。采样法的特点是对数学模型的要求低,适用范围广,但收敛速度慢,达到理想精度需要耗费大量的计算时间。非采样法利用优化算法或谱分解法直接得到系统不确定性输出量的统计值。非采样法的特点是收敛速度快,但对数学模型的要求高,适用范围比较窄。本节将介绍几种常用的求解不确定性问题的数值方法:蒙特卡洛法、摄动法、区间法、随机有限元法和广义多项式混沌法。其中,蒙特卡洛法是典型的采样法,而摄动法、区间法和随机有限元法是非采样方法。广义多项式混沌法中的随机 Galerkin 法属于非采样法,而随机配点在此被纳入采样法的范畴。

(1) 蒙特卡洛法

蒙特卡洛(Monte Carlo)法,又称随机模拟法,是工程计算中最常用的方法。该方法基于大数定律和随机取样实验,是一种经典的、随机采样方法。蒙特卡洛需严格根据随机参数的概率分布特征,利用计算机模拟随机采样过程,获得一系列的样本点,并求解生成的每个样本点上的系统输出,最后利用数理统计原理得到系统输出的概率特征,如概率密度函数、均值、方差等。蒙特卡洛法的原理简单,易于编程实现,不仅可用于求解随机微分方程,还能用于求积分运算。但蒙特卡洛法的收敛速度慢且对不确定性变量要求高,限制了它的应用范围。蒙特卡

洛法只能用在基于概率理论描述的不确定性问题中，它在求解之前需明确随机参数的概率分布类型。此外，蒙特卡洛法的精度依赖于样本点的数目。对于复杂的工程问题，一次确定性问题的求解已十分耗时，而蒙特卡洛法需反复多次进行确定性问题的求解。已有研究表明：当随机参数的数目大于 5 时，基于蒙特卡洛法的求解是非常耗时且困难的。因此，高阶随机问题或信息不完备的不确定性问题的求解，需借助于其他数值方法，如区间法、随机伽辽金法和随机配点法等。

(2) 摄动法

摄动法 (Perturbation Method)，又称小参数展开法，基于小参数假定，认为受到微小扰动的系统输出函数可近似展开成小参数的幂级数的形式。目前，对于求解基于摄动法的不确定性问题，有两种求解方案。第一种求解方案是将所有随机变量在其均值附近展开成 Taylor 级数。该方案仅适用于小扰动或随机变量方差很小的情况，并且不能获得系统输出的高阶统计量。同时，当随机变量的展开阶数高于二阶时，基于该方案的系统控制方程的展开式将变得非常复杂。第二种求解方案是将随机算子的逆运算展开成 Neumann 级数，该方案同样仅适用于小扰动的情况。小参数的假定极大地限制了摄动法的应用范围。1997 年 Liu^[47]提出了一种新的摄动方法，在系统的控制方程中嵌入人工参数，并假定人工参数为小参数。然而由于人工参数的选取具有一定的主观性，该方法在大多数情况下不能获得一致逼近的近似解。于是，He 在此基础上提出同伦摄动法，即将摄动法与同伦方法结合起来，用于解决非线性问题^[48]。该方法通过规定嵌入参数的取值范围为 [0,1]，充分利用传统摄动法的优势，将摄动法推广到大参数问题。

(3) 区间法

区间法 (Interval Analysis) 是一种求解非概率建模问题的方法，利用区间描述不确定性参数，适用于基于区间概率理论和凸集模型理论的不确定性问题。该方法只需利用较少的信息，获取不确定性变量的上下界，求解得到不确定性系统输出的上下界。区间法最初用于研究计算机运算中的浮点舍入误差。自 1966 年 Moore 发表了第一部关于区间法的专著以来^[49]，该方法已迅速发展成为数学研究领域的一个新的分支，且逐渐应用到诸多工程领域中。按照具体的求解方法，区间法可分为三类：区间有限元法、区间迭代法和区间优化方法。

区间有限元法，类似于确定性有限元法，计算程序中包含单元离散、单刚集成、单元组装、边界条件和荷载离散化以及结构方程求解等功能模块；不同的是，区间有限元中含有以区间参数表示的不确定性变量。区间参数的相关性会引起模

型输出区间的放大, 为获得足够精确的模型输出区间, 确定性有限元的集成方式将不再适用于区间有限元法。Hughes 等人提出了一种单元接单元技术 (EBE)^[50], 将有限元分析中的一部分数值计算转移到单元上进行, 可避免单元集成总体刚度矩阵时的重叠。

区间迭代法是 Moore 于 1979 提出的一种新型迭代法^[51], 具有全局收敛性, 在给定非线性方程组右端项时能自动搜索全部重根。全宗凯等人^[52]利用区间迭代法的这一性质, 将其应用在结构后屈曲分析中。

区间优化方法是将不确定性问题的求解转化为含约束条件的最值问题, 并利用最优化算法找寻系统随机输出的最大值和最小值。常用的优化算法有: 模拟退火算法、遗传算法、粒子群优化算法、蚁群算法和微分演化算法。区间优化方法的计算效率高, 在工程应用体现了很好的经济性。李方义等^[53]将该方法与基于拉丁方试验设计的近似模型结合, 提出了一种高效的不确定多目标优化方法, 应用在复杂工程优化问题中。

(4) 随机有限元法

随机有限元法 (Stochastic Finite Element Method) 是随机分析理论与有限元方法的结合, 是在传统有限元分析的基础上发展起来的随机数值计算方法^[54]。随机分析是概率论的一个分支, 因此随机有限元法适用于求解以概率论描述不确定性参量的问题。早期随机有限元方法将 Monte Carlo 仿真方法与有限元直接结合^[55], 利用传统的有限元程序计算大量随机样本点处的系统输出, 属于采样法的范畴, 计算效率低, 计算成本高。为了克服采样法的上述缺陷, Cornel 提出将一次二阶矩法与有限元法相结合的非采样思想, 用于土壤基础或堤防的变形及稳定性分析中^[56]。该思想随后发展形成了 Taylor 展开随机有限元法 (TSFEM)。在此框架下, Hisada 和 Nakagiri 提出了基于摄动技术的随机有限元法^[57], 将随机参数或随机方程的摄动展开式直接与有限元法结合, 显式处理随机参数, 定量得到系统输出的统计矩, 简单易行。摄动有限元法 (PSEFM), 现已成功用于多种复杂结构应力、位移等非线性随机问题中。由于受摄动法小参数假定的影响, 该方法仅适合用于随机性不强的问题。近年来, 随机有限元法得到了进一步的发展和应用。研究人员发展了其他非采样方法, 例如、Neumann 展开随机有限元 (NSFEM)、谱随机有限元法、直接积分法和最大熵随机有限元法。其中谱随机有限元法起源于 Wiener 提出的齐次混沌理论^[58], 将随机变量进行多项式展开。Ghanem 和 Spanos^[59]对该方法进行了详细的描述。随机有限元法已广泛用于计算结构的动力学问题、结构可靠度、复合材料力学及非线性问题等方面^[60]。

1.3.4 随机配点法

这节将介绍本文所采用的随机配点法, 随机配点法属于广义多项式混沌

(GPC) 法的一个分支,下面对其一一进行介绍。

(1) 广义多项式混沌 (GPC) 法

GPC 与谱随机有限元法类似,均是基于多项式展开理论,即将不确定性问题的解用随机空间的多项式基底表示。谱随机有限元法通常采用 Hermite 多项式 (13 种 Wiener-Askey 多项式混沌之一) 作为基底。而基于 Hermite 多项式的谱分解法在求解湍流问题^[61,62]时,收敛速度慢,因此长期没有受到研究人员的关注。直到本世纪初, Xiu 等人^[63]提出基于广义多项式混沌的谱分解法,高效地解决了流场问题。多项式展开理论才引起人们的重视。所谓“广义”是指采用的多项式基底不局限于 Hermite 多项式,可以是其他 Wiener-Askey 多项式混沌和分段多项式等^[64]。Witteveen 等人^[65]提出任意多项式混沌,用于求解涡轮叶片失速颤振中考虑物理不确定性的非线性动力学问题。该方法基于正交化技术,将任意多项式基底正交化成适用于随机输入类型的正交化基底,本质上是广义多项式混沌的推广。广义多项式混沌法按照求解途径的不同可分为随机 Galerkin 法和随机配点法。

(2) 随机 Galerkin 法

最初, GPC 法主要基于随机正交多项式理论,将随机问题的解展开成随机正交多项式的表达式。随机正交多项式是关于随机变量的多项式,在随机空间中满足正交性。此时的 GPC 法也称为随机伽辽金法 (Stochastic Galerkin Method, SGM),收敛速度快。SGM 利用随机正交多项式的正交性,将系统控制方程离散成多个微分方程。这些微分方程通常是相互耦合的,求解十分困难,故对于比较复杂的系统,基于 SGM 的求解是非常费时的且有时是不可行的。此外,不同工程问题中随机参量的分布类型一般是不同的,而随机正交多项式的选取主要由随机参量的分布类型决定的,例如服从 Gauss 分布的随机参量对应的是 Hermite 多项式基底,而服从均匀分布的随机参量则对应 Legendre 多项式。因此,基于 SGM 的求解程序需依据具体的工程问题而编写,程序的通用性较差。

(3) 随机配点法

近年来,配点法的引入使得 GPC 出现了新的发展,出现了另一种求解随机问题解的多项式展开式的方法——随机配点法。配点法起源于数值积分方法,如 Newton-Cotes 公式、高斯求积法和 Clenshaw-Curtis 法。这些数值积分方法通过选取合适的积分节点和积分权重,将数值积分的解表示成积分节点处的函数值与相应积分权重的乘积之和。其中,积分节点就是配置点。Novak 和 Ritter^[66]基于 Clenshaw-Curtis 法则,利用 Smolyak 算法^[67]构造多维配置点,提出了一种适用于高维等边域上光滑函数的积分法。类似于数值积分方法,数值插值则利用插值节点处的函数与插值权重的乘积之和,计算待求点处的函数值。其中,插值节点

类似积分节点,亦可称为配置点;而插值多项式在待求点上的数值则类似权函数。Barthlmann 等人^[68]将 Chebyshev 多项式的极值点作为插值节点,同样利用 Smolyak 算法构造多维稀疏网格上的配置点,用于高维等边域上的多项式插值。在该高维插值算法的基础上,Xiu 和 Hesthaven^[64]首次提出随机配点法的概念,用于具有随机输入的微分方程的求解。随机配点法(Stochastic Collocation Method, SCM)通过在随机空间域中选取一系列的配置点,构造系统随机输出的插值多项式,并在此基础上利用 Monte Carlo 法计算系统输出的概率特征。

SCM 结合了 Monte Carlo 法和随机 Galerkin 法的优点,避免反复求解控制方程,计算精度高,收敛速度快,受到国内外不少学者的青睐。Foo 等人^[69]利用随机配点法求解了考虑荷载和材料特性具有随机性的固体力学中的三维问题。Babuška 等人^[70]将配点法与 Galerkin 近似法相结合,采用随机空间中的 Gauss 节点求解具有随机系数和随机输入的椭圆偏微分方程。该随机配点法是随机 Galerkin 法的推广,可高效处理非线性相关的随机变量。随后,Jakeman 等人^[71]进一步拓展了随机配点法理论,将其应用在具有认知不确定性的问题中。该研究表明,只需给定一个囊括不确定性参数所有可能取值的有界区间,随机配点法可得到系统输出在此随机域上的近似多项式,并在后处理中统计系统输出的概率特征。史良胜等人^[72]将随机配点法应用在地下水污染的风险评估中。唐云卿等人^[73]利用随机配点法求解土壤水分运动的不确定性问题,并建立了饱和-非饱和水分运动的随机模型。陈海军^[74]利用概率配点法,进行了岩石破坏行为的随机分析。Zhao 等人^[75]将随机配点法应用在齿轮的综合健康预后中。

1.4 本文的主要研究内容

损伤预后是一个综合性强的庞大系统,本文将主要研究金属板的疲劳损伤不确定性问题。主要思路是两个方向,一是运用小时间尺度模型作为疲劳损伤模型,二是运用随机配点法进行不确定性分析。

(1) 阐明在土木工程领域中进行疲劳损伤不确定性分析的必要性,介绍损伤预后的基本概念、基本步骤和研究现状。介绍疲劳损伤基本理论,阐述解决疲劳损伤方法的发展进程和研究现状,引入小时间尺度模型。介绍不确定性表达理论和求解不确定性问题的数值方法,分析这些方法的优缺点,引入随机配点法。

(2) 介绍小时间尺度裂纹扩展模型的基本概念,推导步骤及其和经典裂纹增长模型的关系。在常幅荷载下对铝合金板 2024-T42 进行小时间尺度裂纹扩展计算,并与试验结果进行对比,验证小时间尺度计算方法的可靠性。进行一组随机输入的荷载下的裂纹扩展分析,采用小时间通用公式直接计算;先采用雨流计

数法对随机荷载进行转化，然后用小时间尺度在循环荷载下的简化公式进行计算；最后对两种途径的计算结果进行对比。

(3) 介绍随机配点法求解不确定性问题的基本思想、基本步骤和求解途径，对随机配点法的核心技术——多项式插值技术进行详细的说明，重点介绍基于 Smolyak 的稀疏网格插值法。

(4) 应用小时间尺度模型和随机配点法解决金属板疲劳损伤预后不确定性问题。以 7075-T6 铝合金板疲劳裂纹扩展实验数据为基础，基于断裂力学原理，分析小时间尺度裂纹扩展公式中的材料参数，确定不确定材料参数并评估其分布类型，利用随机配点法分析金属板剩余疲劳寿命的统计特征，并与试验结果比较，验证随机配点法计算的可靠性，分析随机配点法的计算效率和计算精度

(5) 基于小时间尺度模型和随机配点法，在一组随机荷载下对金属板进行疲劳裂纹扩展分析。分别计算直接积分法和雨流计数转化法下的金属板疲劳裂纹扩展长度的统计特征，分析两种方法的计算效率和计算精度。

第 2 章 小时间尺度裂纹扩展模型

2.1 应力强度因子的计算方法

应力强度因子幅度 ΔK 是本文小时间尺度裂纹扩展模型将会用到的核心计算量。为能正确使用小时间尺度公式，本节将介绍应力强度因子 K 的求解方法。

目前，应力强度因子 K 的计算方法有很多，大体上可分为三类：解析法、数值法和实测法。其中，每一类别又包含若干种方法。例如，解析法有：应力函数法、复变函数法、积分变换法等，数值方法有：有限差分法、边界配置法、有限元法和边界元法等，实测方法有：柔度法、网格法、光弹性法和激光全息法等。实测法受场地和加工工艺的影响，应用范围比较局限。解析法常用于简单裂缝体的裂纹扩展问题中。对于复杂裂缝体的裂纹扩展问题，常用数值方法中的有限元法求解。因此，下文将简要介绍解析法和有限元法。

(1) 解析法

这种方法仅能用在能够得到裂纹尖端应力场解析表达式或解析函数的裂纹扩展中。裂纹按照受力形态的不同可分为：张开型（I 型）、剪切型（II 型）和撕裂型（III 型）。无限大板中心穿透裂纹的三种开裂模式对应的裂纹尖端应力场表达式可统一写成公式（2.1）。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_L}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad (2.1)$$

其中， $L = \text{I, II, III}$ 表示开裂的三种模式， r 为裂纹尖端到坐标原点的距离。由上式可立即得到应力强度因子的计算公式（2.2）。

$$K_L = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij} \sqrt{2\pi r} / f_{ij}(\theta) \Big|_{f_{ij}(\theta) \neq 0}. \quad (2.2)$$

有时，直接获取应力场的解析表达式比较困难，但能找到满足边界条件的应力解析函数 $Z_L(\xi)$ ，则可利用解析函数计算裂纹尖端的应力强度因子 K_L ，如公式（2.3）。

$$K_L = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\xi} Z_L(\xi). \quad (2.3)$$

对于复杂的结构，限于数学上的困难，从理论上获得裂纹尖端应力场或解析函数的表达式是比较困难的，因此，解析法仅能应用于少数简单的理想开裂体中，如无限大平板。绝大部分的实际工程问题需要采用数值方法求解应力场，进而获得应力强度因子。

(2) 有限元法

有限元法对于求解复杂结构或构件的裂纹扩展问题十分有效。该方法最初采用常规单元直接计算裂纹尖端的应力强度因子，即利用有限元技术将裂纹尖端附件区域离散，计算出该区域中一些结点的应力分量或位移分量，然后将有限元计算的结果代入裂纹尖端应力场表达式或位移场表达式，计算这些结点处的表观应力强度因子 K_L^* ，最后利用外推技术，计算裂纹尖端处的应力强度因子 K_L 。根据计算表观应力强度因子是基于结点处的位移还是应力，有限元法可分为位移法和应力法。由于有限元求解可直接获取结点的位移值，因此位移法较应力法相比，计算精度更高。下面将以无限大板中心 I 型穿透裂纹为例，介绍位移法的基本计算过程。

无限大板中央 I 型穿透裂纹的尖端附近位移场表达式如公式 (2.4) 所示。

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{2(1+\nu)K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta), \quad i=1,2, \\ g_1(\theta) &= \frac{1}{4} \left[(2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right], \\ g_2(\theta) &= \frac{1}{4} \left[(2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中， u_1 为裂纹扩展方向的位移； u_2 为裂纹张开方向的位移；平面应力状态 $k=(3-\nu)/(1+\nu)$ ，平面应变状态 $k=3-4\nu$ 。在求解 K_I 时，通常取 $\theta=\pi$ 计算裂纹尖端的位移。此时，裂纹的张开位移 u_2 较 u_1 显著，计算 K_I 的精度更高。则由 u_2 得到的 K_I 的精确表达式为

$$K_I = \frac{E}{(1+\nu)(k+1)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} u_2. \quad (2.5)$$

将有限元计算裂纹尖端区域内的 u_2 代入公式 (2.5) 中，可表观应力强度因子 K_I^* 。裂纹尖端区域内 r 很小，则 K_I^* 与 r 可近似为线性关系： $K_I^* = A \cdot r + B$ 。该关系式可通过最小二乘法拟合得到，则裂纹尖端的应力强度因子 $K_I = B$ 。

基于常规单元的有限元法通常无法模拟裂纹前沿的应力奇异性，因而要求在裂纹尖端区域内划分非常细密的网格以保证计算精度，这使得计算负担非常重。为此，研究人员提出了各种奇异单元，可有效模拟应力奇异性，提高了计算效率。

本文中的算例均是金属板的 I 型裂纹，采用应力 σ 下裂纹尖端的应力强度因子 (SIF) 如下式表达：

$$K = Y(\bar{a}) \cdot \sigma \sqrt{\pi \bar{a}} \quad (2.6)$$

其中， $Y(\bar{a})$ 是考虑有限板宽影响的几何形状系数，是 \bar{a} 的函数， $\bar{a} = a/(2w)$ ，

对于无限板：

$$Y(\bar{a})=1 \quad (2.7)$$

对于有限宽度的平板，有如下近似计算公式：

$$Y(\bar{a})=1+0.256\bar{a}+1.152\bar{a}^2+12.20\bar{a}^3 \quad (2.8)$$

$$Y(\bar{a})=\sqrt{\sec(\pi\bar{a})} \quad (2.9)$$

$$Y(\bar{a})=\frac{1}{\sqrt{1-(2\bar{a})^2}} \quad (2.10)$$

对于等幅循环荷载，应力因子强度幅值按下式计算：

$$\Delta K=Y(\bar{a})\cdot\Delta\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.11)$$

在循环荷载作用下裂纹长度将不断扩展，在两种临界条件下达到破坏：

- (1) 裂纹长度 $a=w$ ，即裂纹贯穿板；
- (2) 裂纹尖端应力强度因子超过断裂韧性 K_C ，此时临界裂纹尺寸 a_c 可按下列式计算：

$$a_c=\frac{(1-R)^2 K_{IC}^2}{\pi(\Delta\sigma)^2} \quad (2.12)$$

2.2 小时间尺度裂纹扩展模型的基本概念^[32]

2.2.1 裂纹扩展增量动力学

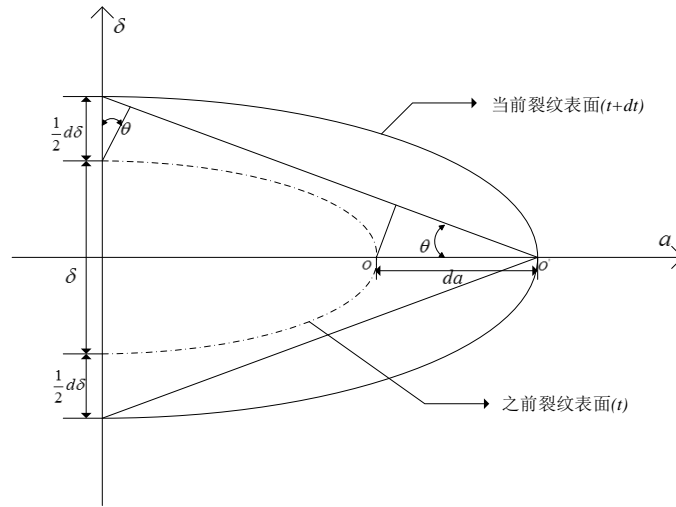


图 2.1 裂纹尖端几何示意图

裂纹扩展增量模型示意图如图 2.1 所示。此模型是在裂纹尖端张开位移 (CTOD) 和瞬时裂纹增长动力学之间的几何关系上得出的。考虑两个瞬时(t 和 $t+dt$) 的裂纹尖端几何关系, CTOD 增量 $d\delta$ 和裂纹扩展长度增量 da 之间的关系可以表示为:

$$da = \frac{ctg\theta}{2} d\delta = Cd\delta \quad (2.13)$$

式中 $C = \frac{ctg\theta}{2}$ θ 是裂纹尖端张角(CTOA)。

根据 CTOA 和裂纹长度之间的关系的实验观察^[76,77],CTOA 在裂纹一开始扩展时是 90 度, 发展到结构失效时 CTOA 变化为一个非常小的角度(4 ~ 6 度)。为了表示所提出的方法, 假定 θ 是一个反应加载和材料基本性质(应力强度因子临界值 ΔK_{th} , 断裂韧性 K_{Ic}) 的函数, 它可以被表示为:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_{Ic} - \Delta K_{th}} \quad (2.14)$$

从式中我们可以看出, 当应力强度因子幅值接近临界值时, CTOA 为 90 度; 当应力强度因子幅值接近断裂韧性时, CTOA 是 0 度。

当前的研究主要是考虑表面裂缝问题, 也就是平面应力问题。裂纹尖端张开位移就可以表示为^[78]:

$$\delta = \frac{4K^2}{\pi E \sigma_y} = \lambda \sigma^2 a \quad (2.15)$$

式中: $\lambda = \frac{4}{E \sigma_y}$ E 是杨氏模量, σ_y 是屈服强度。

如果考虑材料硬化和塑性发展等情况下，可以重新修正为 $\lambda = \frac{3}{E\sigma}$

从图 2.1 可以看出，当时间从 t 增加到 $t+dt$ 时，裂纹尖端从 O 扩展到 O' ，同时 CTOD 从 δ 增长到 $\delta+d\delta$ ；可以被表示为：

$$\delta' = \lambda(\sigma+d\sigma)^2(a+da) \quad (2.16)$$

$$\delta_0 = \lambda\sigma^2 a \quad (2.17)$$

$$\delta_0 = \delta - \delta_0 = \lambda(2\sigma ad\sigma + \sigma^2 da) \quad (2.18)$$

瞬时裂纹增长率可以被表示为：

$$\frac{1}{C\lambda a} \frac{da}{dt} = \frac{2\sigma}{1-C\lambda\sigma^2} \frac{d\sigma}{dt} \quad (2.19)$$

上式基于瞬时裂纹动力学(da/dt)而不是裂纹增长率(da/dN)。任意时间的裂纹扩展长度可以通过下式计算：

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{C\lambda a} \frac{da}{dt} = \int_t^{t+\Delta t} \frac{2\sigma}{1-C\lambda\sigma^2} \frac{d\sigma}{dt} \quad (2.20)$$

上述讨论只在裂纹保持增长的条件成立。然而，裂纹不会在整个加载过程都一直增长。例如，由于能量原则裂纹在卸载阶段不会继续扩展（例如，当裂纹不会扩展，当 $\frac{d\sigma}{dt} \leq 0$ ）。也就是说只有当外加荷载达到一定的应力水平，裂纹才会继续扩展。

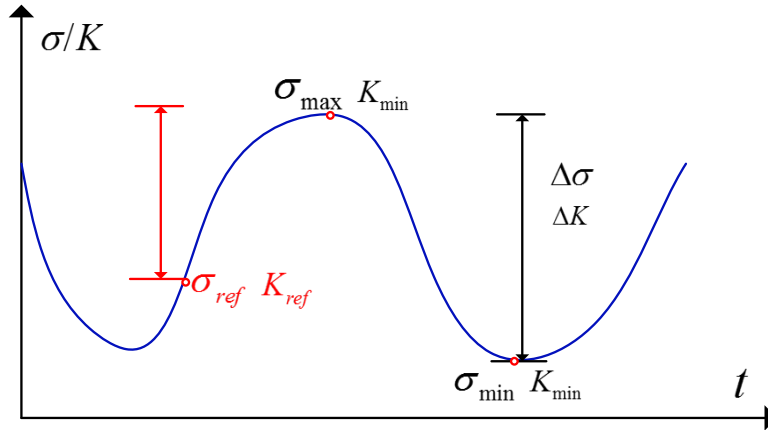


图 2.2 裂纹尖端几何示意图

2.2.2 正向和反向塑性区裂纹增长的相互作用

裂纹尖端塑性对金属材料疲劳裂纹增长至关重要^[79-82]。与单调加载下的裂纹尖端塑性不同，在疲劳循环加载条件下存在两个塑性区：加载时的前塑性区和卸载时的反向塑性区^[83]。卸载后的反向塑性区将会在裂纹尖端产生一个残余应力。裂纹只有在残余压应力反向之后才会继续增长，也就是前面提到的当超过某应力水平 σ_{ref} 之后才会增长（如图 2.2 所示）。

σ_{ref} 可以通过假定当前塑性区大小等于反向塑性区大小来求解。为简单起见,首先讨论在常幅加载下无限板中心贯穿裂纹的 σ_{ref} 计算。如图 2.3 所示,实心区域表示当前塑性区,虚线区域表示前一个反向塑性区。一旦当前塑性区的边界达到前一个反向塑性区的边界时,裂纹就开始扩展。为了计算 σ_{ref} , 要先计算前一个正向塑性区和反向塑性区。

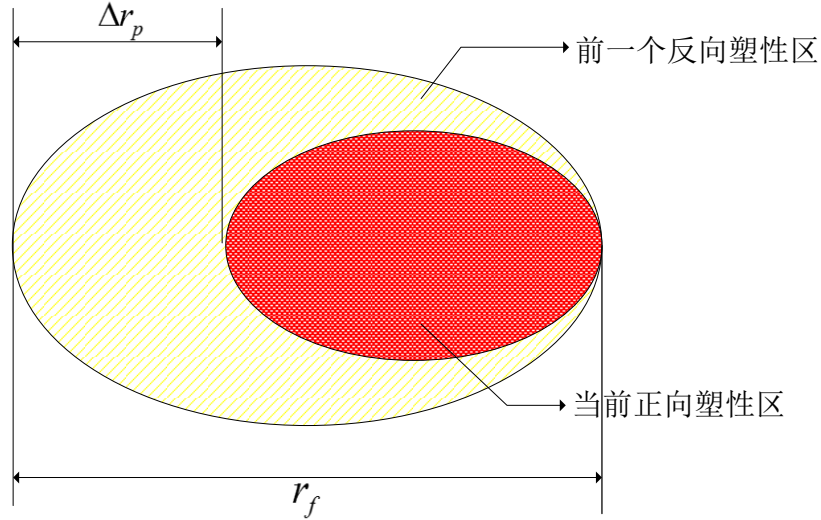


图 2.3 裂纹尖端的反向塑性区和正向塑性区

赖斯首先引入了反向塑性区的概念^[84],可以表示为

$$\Delta r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Delta K}{2\sigma_y} \right)^2 \quad (2.21)$$

需要指出的是,上式是基于材料完全弹性化的,而且,没有考虑裂纹闭合效应。后来的研究表明,反向塑性区由于早期裂纹闭合,其值远远低于由(2.21) 计算出的结果^[17,83]。裂缝闭合后,原始裂纹尖端的应力奇异性消失,反向塑性区在裂缝闭合后也不再增加。本研究沿用麦克朗^[8]提出的一个简单的用于计算反向塑性区大小的模型,即:

$$\Delta r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Delta K_{eff}}{2\sigma_y + (\sigma_{close} - \sigma_{min})} \right)^2 \quad (2.22)$$

式中 σ_{close} 是闭合应力, $\Delta K_{eff} = \Delta\sigma_{eff} \sqrt{\pi a}$ $\Delta\sigma_{eff} = \sigma_{max} - \sigma_{close}$

加载重新开始时,塑性区如图 2.4 所示。据欧文^[85,86]塑性区模型,在裂纹尖端的正向塑性区大小可以表示为

$$r_f = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K^*}{\sigma_y} \right)^2 \quad (2.23)$$

式中 σ_y 是金属屈服强度, K^* 可以表示为^[87]:

$$K^* = (\sigma_{ref} - \sigma_{min})\sqrt{\pi a} \quad (2.24)$$

在加载过程中,当裂纹尖端的正向塑性区大小达到前一个反向塑性区大小时,裂纹开始扩展。在数学上,这种极限状态可以表示为:

$$\Delta r_p = r_f \quad (2.25)$$

假定 $\sigma_{ref} = \sigma_{close}$, 把式 (2.22) 和式 (2.23) 带入式 (2.25), 可以求得 σ_{ref} :

$$\sigma_{ref} = \frac{-(3\sigma_y - 2R\sigma_{max}) + \sqrt{(3\sigma_y - 2R\sigma_{max})^2 - 4\sigma_{max}[R^2\sigma_{max} - (2R+1)\sigma_y]}}{2} \quad (2.26)$$

式中应力比 $R = \sigma_{min} / \sigma_{max}$ 。

以上讨论是在常幅荷载作用下提出的,对于变幅加载上述理论也同样适用,唯一的区别是,需要从先前加载历程中计算出最大的一个反向塑性区。常幅加载下的最大反向塑性区大小总是来自于最近的卸载过程。由于裂纹长度的增加是单调的,外加应力水平也保持不变,最大应力强度因子范围可从最近的卸载循环求得。然而,这并不适用于变幅荷载,变幅下的最大塑性区大小可能来自前于离当前时间点很久之前的一个卸载过程。如图 2.4 所示,当前正向塑性区要超过之前最大的反向塑性区,裂纹才会继续增长。当存在过载时,其裂纹长度是 a_{ol} , 其相应的反向塑性区是 $\Delta r_{p,ol}$ 。当前裂纹长度是 a ,其相应的正向塑性区大小是 r_f 。可以看出之前产生的最大反向塑性区可能影响之后很多周期的裂纹增长。这被称为变幅加载下裂纹增长的“记忆效应”,如过载延迟等。

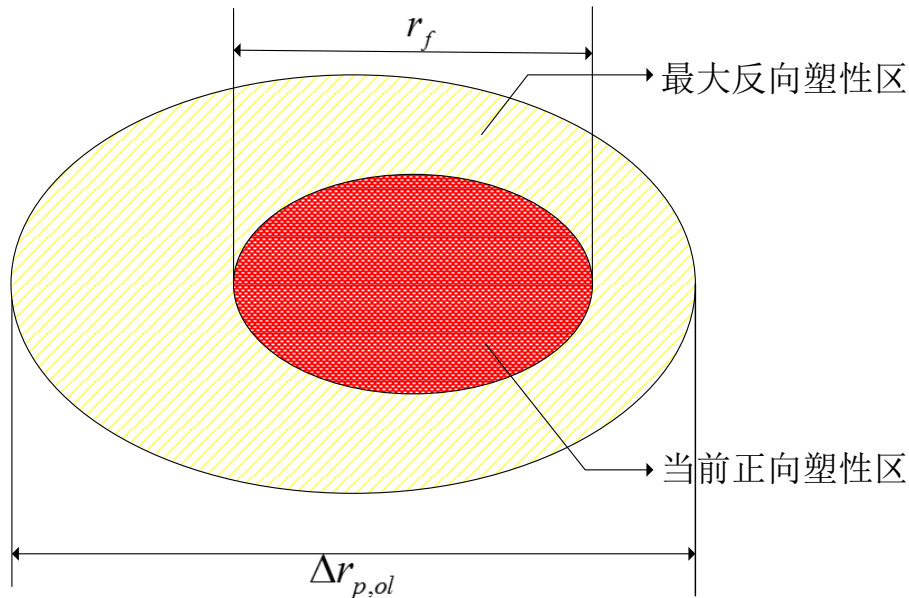


图 2.4 变幅荷载作用下的正向塑性区和反向塑性区

计算 σ_{ref} 的公式修改为:

$$a_{ol} + \Delta r_{p,ol} = a + r_f \quad (2.27)$$

式 (2.27) 的左边计算最大反向塑性区大小, 右边计算当前正向塑性区大小。遵循前面常幅加载下计算过程、可以计算出任意时间点的 σ_{ref} 。任意时间点的瞬时裂纹增长率可以表示为 :

$$\dot{a} = H(\dot{\sigma}) \cdot H(\sigma - \sigma_{ref}) \cdot \frac{2C\lambda\sigma}{1 - C\lambda\sigma^2} \cdot \dot{\sigma} \cdot a \quad (2.28)$$

式中 $H(x)$ 是海维塞德函数 $H(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ 。式 (2.27, 2.28) 就是任意加载条件下

的小时间尺度疲劳裂纹增长模型通用公式。

2.2.3 小时间尺度模型与经典裂纹增长模型的关系

经典的 da/dN 模型可以通过小时间尺度模型在一个循环加载历程中积分求得。式(2.19)提出的增量的裂纹扩展模型可以改写为:

$$\frac{da}{C\lambda a} = \frac{2\sigma d\sigma}{1 - C\lambda\sigma^2} \quad (2.29)$$

在一个循环加载中, 对两边分别进行积分:

$$\int_{a_0}^{a_0 + \Delta a} \frac{da}{C\lambda a} = \int_{\sigma_{min}}^{\sigma_{max}} \frac{2\sigma d\sigma}{1 - C\lambda\sigma^2} = \int_{\sigma_{min}}^{\sigma_{ref}} \frac{2\sigma d\sigma}{1 - C\lambda\sigma^2} + \int_{\sigma_{ref}}^{\sigma_{max}} \frac{2\sigma d\sigma}{1 - C\lambda\sigma^2} \quad (2.30)$$

因为裂纹扩展只发生在部分荷载周期时(即 $\sigma > \sigma_{ref}$), 式 (2.30) 的右边的第一项等于零。一个循环周期里的裂纹增长可以表示为:

$$\Delta a = \frac{da}{dN} = \frac{\pi C\lambda a (\sigma_{max}^2 - \sigma_{ref}^2)}{\pi (1 - C\lambda\sigma_{max}^2)} = \frac{C\lambda (K_{max}^2 - K_{ref}^2)}{\pi (1 - C\lambda\sigma_{max}^2)} \quad (2.31)$$

式中:

$$K_{ref} = \frac{-(3\sigma_y - 2R\sigma_{max}) + \sqrt{(3\sigma_y - 2R\sigma_{max})^2 - 4\sigma_{max}[R^2\sigma_{max} - (2R+1)\sigma_y]}}{2} \sqrt{\pi a} \quad (2.32)$$

2.3 常幅荷载下疲劳裂纹扩展

2.3.1 试验数据介绍

本文采用文献^[88]中给出的疲劳裂纹扩展试验数据。该试验采用 2024-T42 铝合金的 CCT (中心裂纹受拉) 试样, 试件厚度为 4mm, 宽度为 100mm, 采用等幅循环荷载 ($P_{max} = 25.0kN, P_{min} = 12.5kN$), 在液压伺服试验机上进行, 构件受力示意图见图 3.5。试验数据如表 2.1、表 2.2、表 2.3 所示。

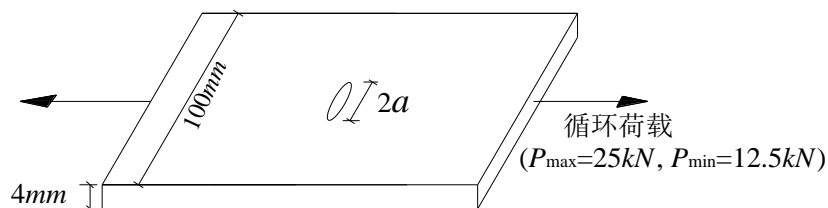


图 2.5 2024-T42 铝合金构件受力示意图

表 2.1 2024-T42 铝合金疲劳裂纹扩展试验数据（裂纹长度为左右两侧平均长度）(mm)

i N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	5.55	5.40	5.30	5.20	5.25	5.30	5.25	5.40	5.30	5.25	5.40	5.30	5.40	5.25
5000	6.15	5.80	5.70	5.50	5.75	5.40	5.55	5.83	5.80	5.60	5.90	5.60	5.75	5.63
10000	6.75	6.30	6.30	6.08	6.45	5.75	6.05	6.35	6.28	6.10	6.30	6.05	6.35	6.20
15000	7.50	6.90	6.90	6.55	7.20	6.20	6.55	6.95	6.90	6.70	6.75	6.55	7.15	6.80
20000	8.25	7.50	7.70	7.10	8.00	6.75	7.25	7.65	7.55	7.25	7.60	7.25	7.90	7.50
25000	9.25	8.25	8.50	7.65	8.85	7.30	8.00	8.45	8.40	8.10	8.35	7.85	8.65	8.38
30000	10.25	9.10	9.45	8.25	10.00	8.00	8.90	9.25	9.15	9.00	9.15	8.60	9.75	9.30
35000	11.25	10.00	10.55	9.05	11.20	8.75	9.80	10.25	10.15	9.90	10.15	9.35	10.90	10.25
40000	12.65	11.10	11.60	9.85	12.60	9.55	11.00	11.20	11.10	11.35	11.25	10.35	12.25	11.40
45000	14.50	12.60	13.00	10.75	14.90	10.45	12.40	12.50	12.35	12.80	12.75	11.50	13.90	12.75
50000	17.25	14.45	14.70	11.75	17.95	11.75	14.10	14.25	14.15	14.75	14.65	13.00	16.60	14.95
52500	19.80	15.55	15.90	12.30	20.00		15.05	15.05	14.90	16.05	15.60	13.85	17.75	16.25
55000	21.85	16.90	17.60	13.20	24.00	13.65	16.35	16.30	16.10	17.60	17.00	15.00	21.75	17.90
57500	26.05	18.55	19.35	14.25			17.90	17.75	17.50	19.50	18.75	16.75	26.25	20.25
60000		20.35	21.75	15.60		16.30	20.00	19.75	19.45	23.00	20.60	18.50		23.90
58000	27.25													
58500	29.25													
59000	31.70													
61000			22.65				21.00	20.55	20.20	25.50		19.45		25.90
62000		22.50	23.75	17.10		20.00	22.25	21.50	21.00	27.35		20.45		29.90
63000			25.30				24.25	22.75	22.30			21.50		
64000		25.00	28.75	18.75			26.60	24.25	23.75			22.55		
65000		27.70		19.75			30.10	25.50	27.10	28.05		24.00		
66000		30.10		20.95								26.25		
67000				22.25										
68000				24.15		22.85								
69000				26.50										
70000				30.25		25.80								

表 2.2 各试件的疲劳裂纹初始长度和临界长度 (mm)

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
初始长度 a_0	5.50	5.40	5.30	5.20	5.25	5.30	5.25	5.40	5.30	5.25	5.40	5.30	5.40	5.25
临界长度 a_c	32.5	31.5	33.0	32.0	31.0	32.0	33.0	32.5	32.0	32.0	32.0	32.0	32.0	32.5

表 2.3 各试件的疲劳裂纹扩展寿命 N_f

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N_f	59045	66146	64489	70192	57103	71404	65494	66811	67678	62871	66141	66935	58844	62370

2.3.2 基于小时间尺度模型的疲劳裂纹扩展寿命计算

将表 2.3 中的 14 个试件的疲劳寿命进行统计分析,画出分布直方图如图 2.6, 由于 14 个试件的疲劳寿命具有较大的离散性, 如按确定性方法进行寿命预后可取平均寿命 64680 次或最小寿命 57103 次。

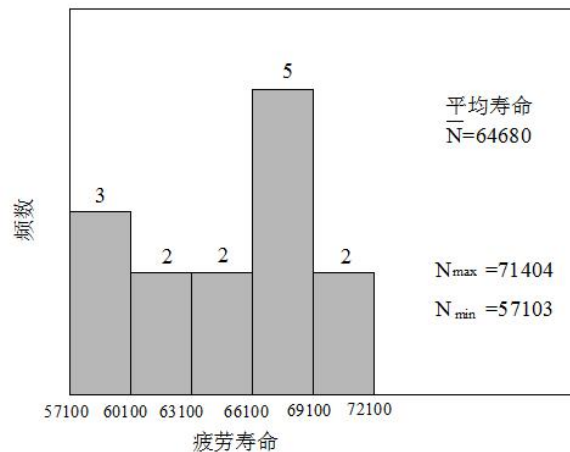


图 2.6 疲劳寿命分布直方图

本算例选择式 (2.6) 计算应力强度因子幅值, CCT 试样在均匀拉伸荷载作用下, 裂纹尖端的应力强度因子计算公式为:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a \sec\left(\frac{\pi a}{W}\right)} \quad (2.33)$$

式中, W 为试件宽度, a 为试件中裂纹长度, 取平均长度 $\bar{a} = \frac{a_{i+1} + a_i}{2}$ 。

$$\Delta K_I = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \sqrt{\pi a \sec\left(\frac{\pi a}{W}\right)} \quad (2.34)$$

表 2.4 2024-T42 铝合金材料参数

应力强度因子临界值	断裂韧性	屈服强度	杨氏模量
$\Delta K_{th}(MPa \cdot m^{1/2})$	$K_C(MPa \cdot m^{1/2})$	$\sigma_y(MPa)$	$E(GPa)$
0.8	90	250	72.4

由前面公式 (2.14, 2.15) 可以计算出材料参数 C 和 λ 的值, 可以得到每个试件的 $a-N$ 曲线, 以试件 2 为例, 见图 2.7, 图中同时画出表 2.1 中对应 a, N 的数据点, 通过比较可以看出 $a-N$ 曲线对各数据点进行了很好的拟合, 证明了小时间尺度公式描述裂纹扩展行为的有效性。

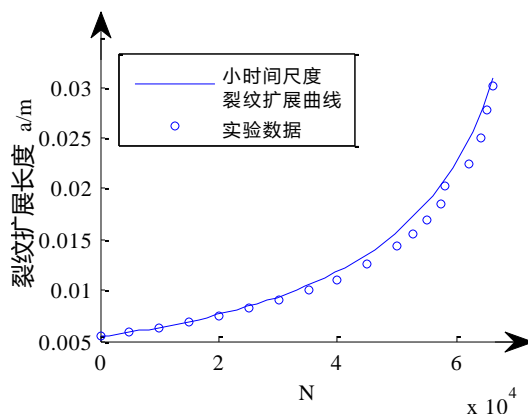


图 2.7 小时间尺度裂纹扩展曲线与实验数据对比,

2.4 随机荷载下的小时间尺度模型

2.4.1 通用公式直接积分计算

经典的疲劳荷载通常都是常幅且具有循环周期, 为了说明小时间尺度模型的适用性, 本文构造了一组非常幅的荷载:

$$\sigma(t) = 10\sin(\cos(2t) + \pi \cdot t) + 10\sin(2t) + 40 \quad (2.35)$$

为了更直观的表达, 本文选取 5.5s 到 27.5s 这一小段时间内的荷载示意图如图 2.8 所示

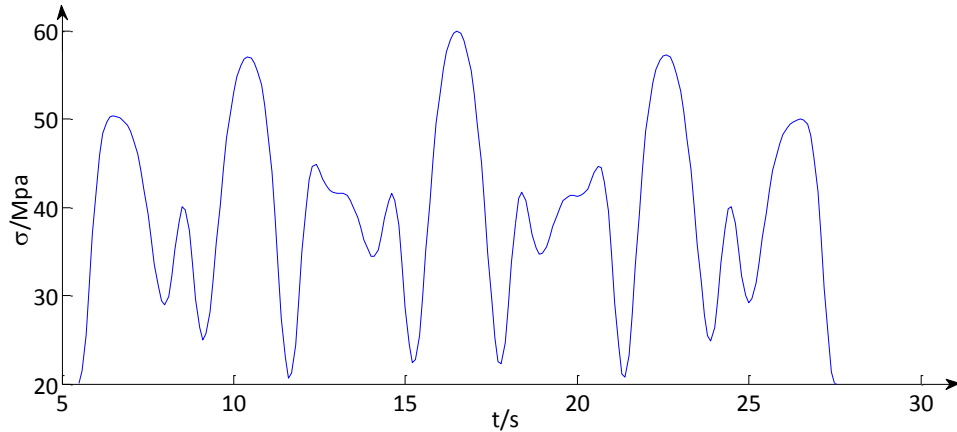
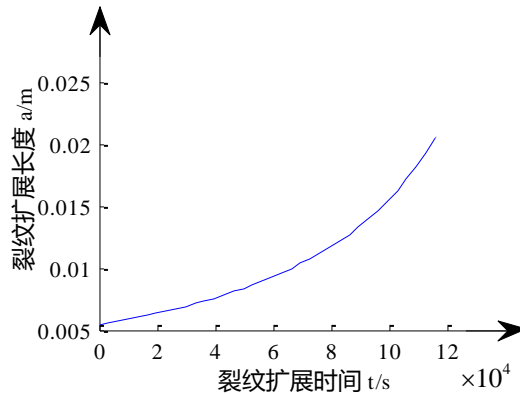


图 2.8 荷载时间历程

本节中的算例仍然沿用前文用到的 2024-T42 铝合金，相关材料参数参见表 2.4，结合前文常幅荷载下的疲劳裂纹扩展情况，保证在规定的时间内不会发生疲劳失效的情况下，本节选取裂纹扩展的总时间为 120000s，运用小时间尺度公式 (2.28) 直接进行积分，裂纹扩展如图 2.9 所示：

$$\dot{a} = H(\dot{\sigma}) \cdot H(\sigma - \sigma_{ref}) \cdot \frac{2C\lambda\sigma}{1 - C\lambda\sigma^2} \cdot \dot{\sigma} \cdot a \quad (2.28)$$

图 2.9 基于小时间尺度通用公式的 $a-t$ 曲线

从图中可以看出，120000s 时的裂纹扩展长度为 21.4mm，裂纹呈线性扩展，即将达到临界值。

2.4.2 雨流计数法转化计算

在 2.3.3 节中提到了小时间尺度模型与经典裂纹增长模型的关系，即给出了循环条件下的小时间尺度裂纹扩展公式。雨流计数法可以将随机荷载历程转化成循环荷载。本节将探讨把随机荷载通过雨流计数法转化成循环荷载的条件下，运用小时间尺度简化公式进行裂纹扩展计算。

(1) 雨流计数法基本概念

雨流计数法又可称为“塔顶法”,是由英国的 Matsuiski 和 Endo 两位工程师提出的,距今已有 50 多年。雨流计数法主要用于工程界,特别在疲劳寿命计算中运用非常广泛。把应变-时间历程数据记录转过 90°,时间坐标轴竖直向下,数据记录犹如一系列屋面,雨水顺着屋面往下流,故称为雨流计数法。雨流计数法对荷载的时间历程进行计数的过程反映了材料的记忆特性,具有明确的力学概念,因此该方法得到了普遍的认可。雨流计数法的基本计数规则如下:

- ①雨流依次从荷载时间历程的峰值位置的内侧沿着斜坡往下流;
- ②雨流从某一个峰值点开始流动,当遇到比其起始峰值更大的峰值时要停止流动;
- ③雨流遇到上面流下的雨流时,必须停止流动;
- ④取出所有的全循环,记下每个循环的幅值;
- ⑤将第一阶段计数后剩下的发散收敛荷载时间历程等效为一个收敛发散型的荷载时间历程,进行第二阶段的雨流计数。计数循环的总数等于两个计数阶段的计数循环之和。

(2) 雨流计数法荷载处理

首先取一小段荷载历程进行分析说明,本节仍然取 5.5s 到 27.5s 的荷载时间历程。对于图中的荷载,按照上述雨流计数法的原理通过 matlab 程序进行计算,得到图 2.10 和表 2.5 如下所示:

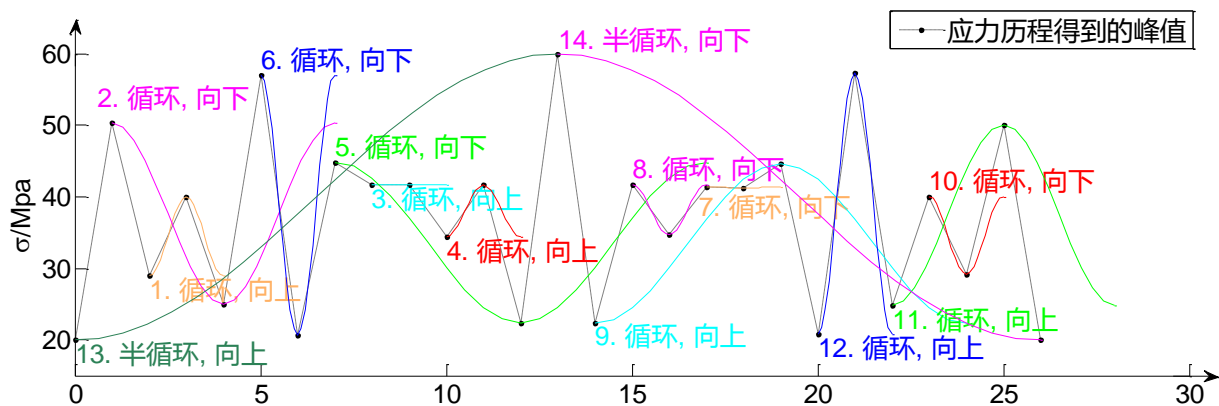


图2.10 雨流计数法循环示意图

表2.5 雨流计数法处理结果数据表

编号	幅值	均值	循环/半循环	循环开始	循环时间
1	5.53	34.48	1.00	2.00	2.00
2	12.68	37.68	1.00	1.00	6.00
3	0.01	41.60	1.00	8.00	2.00
4	3.58	38.02	1.00	10.00	2.00
5	11.23	33.58	1.00	7.00	10.00

6	18.19	38.84	1.00	5.00	2.00
7	0.03	41.29	1.00	17.00	2.00
8	3.49	38.21	1.00	15.00	2.00
9	11.15	33.46	1.00	14.00	10.00
10	5.43	34.59	1.00	23.00	2.00
11	12.59	37.44	1.00	22.00	6.00
12	18.26	39.02	1.00	20.00	2.00
13	20.00	40.00	0.50	0.00	26.00
14	20.00	40.00	0.50	13.00	26.00

图片中清晰地反应了循环以及半循环的取值过程，从表中可以得到该时间段内共有12个循环和2个半循环，还有相应的幅值、均值。由此可以计算出各个循环的 σ_{min} 和 σ_{max} 。

为了便于比较，本节中和上节一样，裂纹扩展的时间取为120000s, 同理对其进行matlab雨流计数法处理，然后对结果进行统计分析，可以得到相应的幅值统计直方图、均值统计直方图和雨流法矩阵如图2. 11，图2. 12和图2. 13所示。

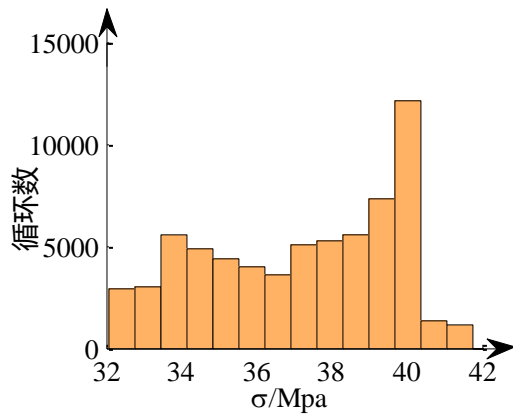


图2.11雨流计数法均值统计直方图

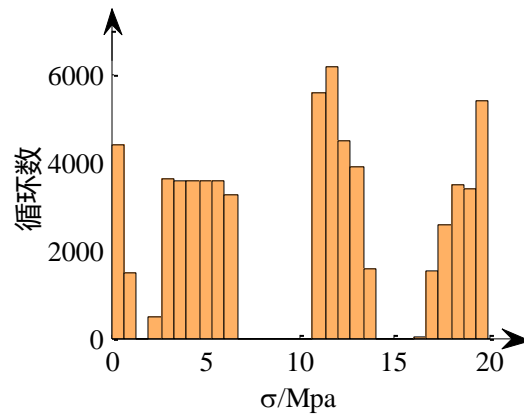


图2.12雨流计数法幅值统计直方图

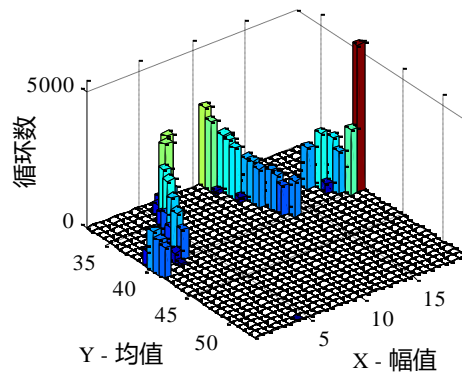


图 2.13 雨流计数法矩阵

经过统计分析，去掉幅值太小的循环，把相似的循环归并到一起，可以将 120000s 的荷载历程，近似转化成 60000 个循环. 如下表所示：

表 2.6 雨流计数法结果数据统计表

编号	幅值 (Mpa)	均值 (Mpa)	最大值 σ_{\max} (Mpa)	最小值 σ_{\min} (Mpa)	循环数目
1	5.5	34.5	40	29	4544
2	12.5	37.5	50	25	4544
3	3.6	38.1	41.7	34.4	4544
4	11.2	33.5	44.7	22.3	4544
5	18.2	38.8	57	20.6	4544
6	20	40	60	20	2273

(3) 雨流计数法下小时间尺度疲劳裂纹扩展计算

通过上文得到的 σ_{\min} 和 σ_{\max} ，运用第二章的小时间尺度简化公式进行计算，

$$\Delta a = \frac{da}{dN} = \frac{\pi C \lambda a (\sigma_{\max}^2 - \sigma_{ref}^2)}{\pi (1 - C \lambda \sigma_{\max}^2)} = \frac{C \lambda (K_{\max}^2 - K_{ref}^2)}{\pi (1 - C \lambda \sigma_{\max}^2)} \quad (2.31)$$

若记 $f(a) = \frac{C \lambda (K_{\max}^2 - K_{ref}^2)}{\pi (1 - C \lambda \sigma_{\max}^2)}$ ，则公式 (2.31) 可改写成如下形式：

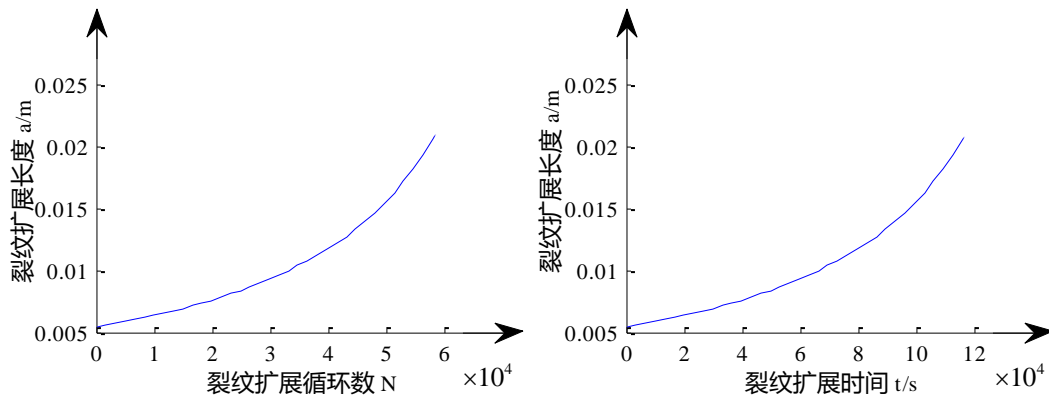
$$\begin{cases} da/dN = f(a) \\ a|_{N=0} = a_0 \end{cases} \quad (2.36)$$

上式可利用 Runge-Kutta (RK) 公式求解，基本公式为：

$$\begin{aligned} a_{N_{i+1}} &= a_{N_i} + \sum_{n=1}^s b_n k_n, \\ k_1 &= h_i f(a_{N_i}), \\ k_n &= h_i f(a_{N_i} + \sum_{j=1}^{n-1} g_{nj} k_j), n = 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (2.37)$$

其中， b_n 和 g_{nj} 为常数，具体取值详见文献^[89]。

Matlab 软件中的 ode45 函数采用 RK5(4)——四阶/五阶 runge-kutta 单步算法，可有效求解常微分方程 (2.36)。最后得到关于循环次数 N 的裂纹扩展曲线如图 2.13(a)所示，然后将其转化为关于时间 t 的裂纹扩展曲线如 2.13(b)所示，在该方法下得到的裂纹长度 a 为 21.34mm。



(a) 基于小时间尺度循环公式的 $a-N$ 曲线 (b) 基于小时间尺度循环公式的 $a-t$ 曲线
图 2.13 基于小时间尺度循环公式裂纹扩展曲线

2.4.3 两种方法的比较

从图中可以看出，两种方法得到的裂纹扩展曲线基本重合，最终结果非常接近，更进一步表明小时间尺度方法的正确性，但同时这两种方法存在着如下区别：

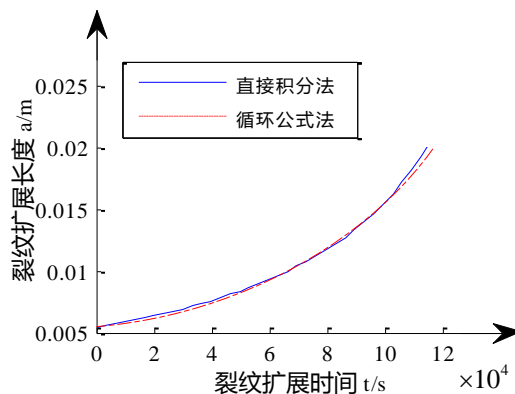


图 2.14 基于小时间尺度直接积分法和循环公式法裂纹扩展曲线对比

(1) 小时间尺度通用公式直接积分法运算的程序计算时间相对于雨流计数法转化计算要长很多。

(2) 小时间尺度通用公式直接积分法本身计算模型比较简单。雨流计数转化法要先通过雨流计数法对随机荷载进行处理，然后再用小时间尺度简化循环公式计算，步骤较多，但是程序计算迅速。

(3) 运用小时间尺度通用公式直接积分法不仅可以得到精确的裂纹扩展结果也可以直接反应随着荷载时间历程的变化裂纹扩展的过程。而雨流计数法转化计算由于运用了统计的处理，可以反应裂纹扩展的最后结果，而裂纹扩展曲线的中间过程与实际裂纹情况可能并不一致。

(4) 雨流计数法转化计算的结果略微偏小一点，原因可能是在处理数据时忽略掉了幅值很小的循环。

2.5 本章小结

本章介绍了小时间尺度裂纹扩展模型的相关概念和算例。

(1) 对于该模型中会用到的应力强度因子的计算方法进行了介绍

(2) 对小时间尺度裂纹扩展模型的基本概念理论进行了阐述，包括裂纹扩展增量动力学、正向和反向塑性区裂纹增长的相互作用、小时间尺度模型与经典裂纹增长模型的关系。

(3) 结合已有铝合金 2024-T42 金属板的实验结果，对于常幅荷载下的疲劳裂纹扩展进行了探讨。进行基于小时间尺度模型的疲劳裂纹扩展寿命计算，并与实验结果对比，验证了该模型的正确性。

(4) 最后进一步拓展，研究在随机荷载下的小时间尺度模型。包括通用公式直接积分法和雨流计数法转化计算两种方法，并对其结果进行对比。

第3章 随机配点法

3.1 引言

随机配点法源自多项式展开理论,它将不确定性问题的解展开成由不确定性变量表示的多项式,是一种高效求解具有不确定性参数和不确定性输入的微分方程组的不确定性传播的数值计算方法。

随机配点法的适用范围较广,既能求解偶然不确定性问题,也能求解认知不确定性问题。该方法在仅给出不确定性变量取值区间的情况下,利用高维多项式插值技术,构建不确定性空间中近似系统输出的代理多项式,在后处理中基于该代理多项式取代原系统控制方程,依据不确定性变量的表达方式,采用相应的不确定性求解方法计算系统输出的统计特征。例如,对于基于概率理论表达的随机变量,后处理中将采用 Monte Carlo 法进行求解,而对于基于区间概率表达的不确定性变量,后处理可采用区间法进行求解。

随机配点法具有求解精度高、计算速度快等优点。所以本文将采用该方法进行土木工程领域中疲劳损伤的不确定性分析。

3.2 随机配点法的基本概念

3.2.1 不确定性问题的描述

很多工程问题的数学模型可抽象为一系列相互耦合的微分方程,例如结构动力学问题可抽象成二阶微分方程组,裂纹扩展过程则用一阶微分方程表达。这些微分方程组统称为系统控制方程。工程中的不确定性因素(模型参数、边界条件或初始条件)对系统控制方程的影响。例如材料不确定性一般影响模型参数的不确定性,测量误差影响初始条件的不确定性,荷载激励不确定性和环境噪声则影响模型输入的不确定性。考虑了不确定性因素影响的系统控制方程实质为不确定性微分方程组,为便于后文对随机配点法进行阐述,这里将介绍用于描述不确定性问题的一般数学模型。

记系统的空间域(亦称物理域)为 $D \subset \mathbb{R}^\ell$ ($\ell=1,2,3$),空间坐标或者物理坐标为 $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_\ell)$,时间域为 $[0, T]$, $T > 0$ 为实数。系统控制方程的一般形式如公式(3.1)所示。

$$\begin{cases} u_t(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}) = \mathcal{L}(u), & D \times (0, T] \times I_z, \\ \mathcal{B}(u) = 0, & \partial D \times [0, T] \times I_z, \\ u = u_0, & D \times \{t = 0\} \times I_z, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中, \mathcal{L} 是微分算子, \mathcal{B} 是边界条件算子, u_0 是初始条件, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in I_z \subset \mathbb{R}^d$ 是不确定性空间 I_z 中一组不确定性变量, $d \geq 1$ 是不确定性变量的个数或不确定性空间的维数。受控制方程中不确定性变量的影响, 控制方程的解 (或系统的输出) 也具有不确定性, 记为 $u(x, t, \mathbf{z})$, 如公式 (3.2) 所示

$$u(x, t, \mathbf{z}): \bar{D} \times [0, T] \times I_z \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}. \quad (3.2)$$

为不失一般性, 假定系统为标量系统, 即系统仅有一个输出量, 则 $n_u = 1$ 。同时认为系统是适定的, 即控制方程的解是存在的、惟一的且连续依赖于定解条件 (边界条件和初始条件)。

3.2.2 不确定性的量化

控制方程中的不确定性变量 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d)$ 可以全部是偶然不确定性或全部是认知不确定性, 也可以是部分偶然不确定性和部分认知不确定性。大部分的研究通常采用概率理论量化偶然不确定性, 此时需给出随机变量的 z_i 的边际分布且假定各随机变量 z_i 之间相互独立。本文考虑在未知 z_i 确切概率分布条件下, 采用随机配点法求解含有认知不确定性问题, 但需事先给出不确定性变量的取值区间, 本小节将着重介绍适用于随机配点法的认知不确定性量化方法。

不确定性量化的目标在于得到一个范围足够大的有界区间, 可以包含不确定性变量的大部分可能取值。如果不确定性变量是有界的, 则量化的区间需包含不确定性变量的全部取值。反之, 则量化的区间需包含不确定性变量的大概率取值。这里将用数学语言更准确的表达这一思想。对每一个不确定性变量 z_i ($i=1, \dots, d$) 记其取值范围为

$$I_{z_i} = [\alpha_i, \beta_i], \quad \alpha_i < \beta_i, \quad (3.3)$$

存在以下两种情况:

(1) 范围有界, 则

$$-\infty < \alpha_i < \beta_i < \infty. \quad (3.4)$$

(2) 范围无界, 则

$$\alpha_i = -\infty \quad \text{且/或} \quad \beta_i = \infty. \quad (3.5)$$

记不确定性变量量化后的有界区间为

$$I_{\sigma_i} = [a_i, b_i], \quad -\infty < a_i < b_i < \infty, \quad (3.6)$$

则 I_{σ_i} 与 I_{z_i} 相互重叠的部分应具有足够大的概率值。对 I_{σ_i} 和 I_{z_i} 作对称差，找出属于 I_{σ_i} 但不属于 I_{z_i} 和不属于 I_{σ_i} 但属于 I_{z_i} 的元素，如公式 (3.7) 所示。

$$I_i^- = I_{z_i} \Delta I_{\sigma_i} = (I_{z_i} \cup I_{\sigma_i}) - (I_{z_i} \cap I_{\sigma_i}). \quad (3.7)$$

这样，区间 I_{σ_i} 的范围应满足：对于给定的微小实数 $\delta_i \geq 0$ ，

$$P(z_i \in I_i^-) \leq \delta_i. \quad (3.8)$$

从理论上分析， I_{σ_i} 的范围越广，舍弃的不确定性变量 z_i 样本的概率就越小，则计算的结果将越精确，但计算的效率也将随之下降。因此在具体的工程问题分析中，认知不确定性变量由于实际获得的信息有限，一般将已知信息的最大值、最小值作为其量化区间的上、下界。

值得一提的是，尽管偶然不确定性变量的概率分布特征是已知的，但这里仍将其作为认知不确定性变量进行量化。偶然不确定性具体可分为随机场和随机变量。目前，对于随机场的处理，通常采用 Karhunen-Loeve (KL) 分解，将其离散成有限个相互独立的随机变量。因此，偶然不确定性的量化归根结底为随机变量的量化。有关 KL 分解的知识可参考文献^[90]和文献^[91]，这里不再赘述。下面将介绍两种常用分布的随机变量的量化。

(1) 均匀分布： $z \sim U[a, b]$ ，随机变量有界，则量化后的区间就是随机变量的取值区间 $[a, b]$ 。

(2) 正态分布： $z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，随机变量无界。正态分布随机变量的三种取值区间和相应概率的情况如表 2.1 所示。从表中的数值可以看出，当量化区间为 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 时，随机变量落入区间外的概率不到千分之三，是一个小概率事件，在实践中常认为小概率事件不可能发生，因此采用此区间量化正态分布随机变量是合理的。

表 3.1 正态分布随机变量的三种取值区间和相应概率值情况

z 的取值区间	区间内概率	区间外概率
$[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$	0.6826	<0.32
$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$	0.9544	<0.05
$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$	0.9974	<0.003

3.2.3 不确定性问题的解

量化后的不确定性变量的取值空间将由 I_z 变换为 I_ω ，故不确定性问题的数学模型不再形如公式 (3.1)，新的数学模型应定义的新的不确定性空间 I_ω 上，具体形式如公式 (3.9) 所示。

$$\begin{cases} u_t(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\omega}) = \mathcal{L}(u), & D \times (0, T] \times I_\omega, \\ \mathcal{B}(u) = 0, & \partial D \times [0, T] \times I_\omega, \\ u = u_0, & D \times \{t = 0\} \times I_\omega, \end{cases} \quad (3.9)$$

其中， $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in I_\omega \subset \mathbb{R}^d$ 表示 I_ω 中量化后的不确定性变量。 I_ω 是有界的超立方体，可由公式 (3.6) 的笛卡尔积运算得到，如公式 (3.10) 所示。

$$I_\omega = \times_{i=1}^d I_{\omega_i} = \times_{i=1}^d [a_i, b_i]. \quad (3.10)$$

考虑到计算效率随量化区间的增大而降低，本文在量化不确定性变量时，尽量选择小范围的量化区间 I_ω ，故 I_ω 与 I_z 之间存在如下关系式：

$$I_\omega \subseteq I_z. \quad (3.11)$$

记 $v(x, t, \boldsymbol{\omega})$ 为新的数学模型的解，即公式 (3.9) 的解。在不确定性空间 I_ω 上， $v(x, t, \boldsymbol{\omega})$ 与原问题的解 $u(x, t, \mathbf{z})$ 之间满足公式 (3.12)。因此，文中将继续沿用 $u(x, t, \boldsymbol{\omega})$ 表示公式 (3.9) 的解，该解是未知的、待求的。

$$u(\cdot, \xi) = v(\cdot, \xi), \quad \forall \xi \in I_\omega \quad (3.12)$$

本文主要关注公式 (3.9) 在不确定性空间里的解，故简记该解为 $u(\boldsymbol{\omega})$ 。对任意固定的物理坐标 \mathbf{x} 和时间 t ， $u(\boldsymbol{\omega})$ 是不确定性空间 $I_\omega \subset \mathbb{R}^d$ 到实数域的映射，如公式 (3.13) 所示。

$$u(\boldsymbol{\omega}) : I_\omega \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

随机配点法的中心思想是用不确定性空间的多项式混沌 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 近似 $u(\boldsymbol{\omega})$ ， $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 的表达式如下：

$$u_N(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^N w_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}) \Phi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}), \quad (3.14)$$

其中， N 为多项式的展开阶数； $\Phi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ 是定义在 I_ω 上的多项式混沌展开基底； $w_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ 是多项式混沌展开系数；下标 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$ 是多项式混沌的次数向量，向量中各分量的大小分别表示相应维度上不确定性变量的次数； $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_d$ 表示多项式混沌的阶数。当解空间 $u(\boldsymbol{\omega})$ 足够光滑时，总能在 I_ω 中找到合适的 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ ，使得逼近误差 ε_N 满足公式 (3.15)。

$$\varepsilon_N \triangleq \|u - u_N\|_{L^\infty} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad (3.15)$$

其中，算子 $\|\cdot\|_\infty$ 是 L^∞ -范数，定义如下：

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{\omega \in I_\omega} |u(\omega)|. \quad (3.16)$$

在得到足够近似精度的 $u_N(\omega)$ 之后，系统不确定性输出的概率特征可基于此进行计算。记 $\rho_z(s), s \in I_z$ 表示不确定性变量 \mathbf{z} 的概率密度函数，此函数在求解之前是未知的，求解之后可通过更新信息得到。关于认知不确定性变量 $\rho_z(s)$ 的确定方法，应依据具体的工程问题而定，这部分内容将在后一章节的计算中给出详细说明。根据公式 (3.17) 和公式 (3.18) 可近似得到 $u(\mathbf{z})$ 的均值和方差。

$$\mu_N \triangleq \int_{I_\sigma} u_N(s) \rho_z(s) ds. \quad (3.17)$$

$$\sigma_N^2 \triangleq \int_{I_\sigma} (u_N(s) - \mu_N)^2 \rho_z(s) ds. \quad (3.18)$$

3.2.4 求解途径

由上文的分析可知，基于随机配点法的数值计算方法关键在于求解多项式混沌展开式 $u_N(\omega)$ 。下面将简要介绍这两种方法。

随机配点法通过在不确定性空间中选取合适的配置点，巧妙地将复杂不确定性问题离散为各配置点上相互独立的确定性问题。记 $\Theta_M^d = \{\omega^{(j)}\}_{j=1}^M \subset I_\omega$ 为选取的一组不确定性空间中的离散节点或配置点，其中 $M \geq 1$ 是节点数或配置点数。对于任意配置点 $j = 1, \dots, M$ ，方程 (3.9) 表示的不确定性问题的不确定性问题将转化为具体的确定性问题的，如公式 (3.23) 所示。

$$\begin{cases} u_t(\mathbf{x}, t, \omega^{(j)}) = \mathcal{L}(u), & D \times (0, T], \\ \mathcal{B}(u) = 0, & \partial D \times [0, T], \\ u = u_0, & D \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (3.23)$$

求解确定性的微分方程 (3.23)，可获得系统在配置点集上的解 $u^{(j)} = u(\cdot, \omega^{(j)})$ ， $j = 1, \dots, M$ ，简记为解集 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^M$ 。随机配点法此后进行操作，如构造代理多项式 $u_N(\omega)$ 和评估系统不确定性输出 $u(\omega)$ 的统计特征，都是基于此解集进行的。

从这一角度出发，所有经典采样方法都应属于配点法的范畴，例如 Monte Carlo 随机采样法。该方法根据随机变量 ω 的分布，随机生成离散节点集 Θ_M^d ，并将解集 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^M$ 的平均值和方差等作为系统随机输出量的统计值。Monte Carlo

法为达到较高的精度，需生成大量的配置点，而随机配点法只需少量的配置点就能达到与之相当的精度。此外，某些确定性的采样方法将随机空间 I_z 中经典的求容积法 (cubature or quadrature rules) 节点^[59, 60]作为节点集 Θ_M^d ，并利用相应的求积分法则，估计系统随机输出的统计值。与随机 Galerkin 法类似，这些确定性采样法亦属于弱测度 (如分布函数) 范畴内的收敛。

本文考虑的随机配点法属于强收敛 (如均方收敛) 范畴。随机配点法采用插值方法构造展开式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ ，在配置点上精确等于系统输出，即

$$u_N(\boldsymbol{\omega}^{(j)}) = u(\boldsymbol{\omega}^{(j)}), \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.24)$$

本文将采用随机配点法求解 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ ，并基于 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 评估的 $u(\boldsymbol{\omega})$ 统计特征。后文将详细介绍这一方法。

3.3 随机配点法的计算步骤与方法

3.3.1 计算步骤

随机配点法有效地实现了微分方程组求解和不确定性分析的分离，可分为两部分：代理多项式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 的构建 (前处理) 和统计特征评估 (后处理)。随机配点法在具体求解时可分为四个步骤，如图 3.1 所示。

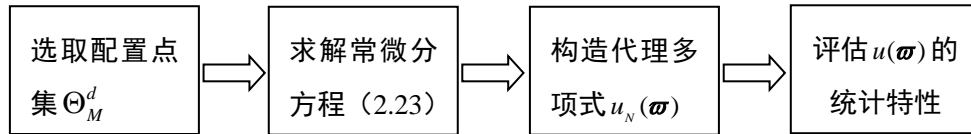


图 3.1 随机配点法的计算步骤

随机配点法的第一个步骤是在不确定性空间中选取配置点集 Θ_M^d 。随机配点法的计算精度在很大程度上依赖于配置点的选取。目前，常用的配置点集是 Chebyshev 极值点集。

随机配点法的第二个步骤是求解配置点上的确定性微分方程 (3.23)，获得解集 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^M$ 。目前，确定性微分方程的求解技术已十分成熟，常用的数值计算方法有欧拉法、龙格-库塔法、谱分解法和有限元法，这些算法已在 Matlab 等数学软件上有比较完善的程序，可直接用于计算。关于确定性微分方程求解的详细内容，请参考文献[61]和文献[62]。

随机配点法的第三个步骤是基于配置点集 Θ_M^d 和解集 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^M$ 构建代理多项

式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 。构造代理多项式的方法常采用不确定性空间上的多项式插值技术，故代理多项式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 也可称为插值多项式。目前，多项式插值技术已成功应用在一维插值问题。高维插值多项式通常是基于张量积运算的一维插值多项式的推广。

随机配点法的第四个步骤，也即最后一个步骤，是获得 $u(\boldsymbol{\omega})$ 的概率特征。常用 Monte Carlo 法对不确定性变量进行采样，并计算每个样本点上 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ ，最后利用数理统计方法，估计 $u(\boldsymbol{\omega})$ 的均值、方差和概率密度等。在利用 Monte Carlo 法之前，需利用现有的有限数据，给不确定性变量设定先验分布。

从上述分析中可以看出，前三个步骤属于前处理部分，最后一个步骤属于后处理部分。其中第三个步骤是前处理的核心，也是整个配点法核心。因此，随机配点法的关键在于构建满足公式 (3.24) 的代理多项式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 。

3.3.2 多项式插值方法

多项式插值方法是随机配点法中构造代理多项式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 最常用的方法。虽然 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 是系统输出关于不确定性变量的表达，但在具体求解时可将不确定性变量当作普通变量处理。在已知配置点集 Θ_M^d 和对应解集 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^M$ 的前提下，多项式插值方法的有两种求解思路：矩阵求逆法和固定系数插值法。

(1) 矩阵求逆法

该方法的求解思路是先选定插值基底 $\Phi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ ，然后求解插值系数 $w_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ 。矩阵求逆法常采用正交多项式作为基底 $\Phi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ ，并利用随机配点法的插值条件公式 (3.24) 构造插值系数方程组公式 (3.21)，通过求解该线性方程组获得展开系数。

$$\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{u}, \quad (3.25)$$

其中，系数矩阵 $\mathbf{A} = (\Phi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}^{(j)}))$ ， $0 \leq |\mathbf{k}| \leq N$ ， $1 \leq j \leq M$ ，类似范德蒙矩阵； $\hat{\mathbf{w}}$ 是展开系数构成的向量； $\mathbf{u} = (u(\boldsymbol{\omega}^{(1)}), \dots, u(\boldsymbol{\omega}^{(M)}))^T$ 是配置点上的系统输出向量。为使公式 (3.25) 的解存在且唯一，配置点的数目不应小于正交基函数的数目，即

$$M \geq \binom{N+d}{N}. \quad (3.26)$$

矩阵求逆法虽然求解思路简单、计算机编程难度低，但由于得到的系数矩阵 \mathbf{A} 类似于范德蒙矩阵，在高维插值问题中，对其进行求逆运算误差大、计算效率低，且插值基底的选取一般需依据随机变量的分布类型。

(2) 固定系数插值法

该方法的求解思路与矩阵求逆法相反，先确定 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 的系数项 $w_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega})$ ，然后

构造插值基底 $\Phi_k(\boldsymbol{\omega})$ 。通常，固定系数插值法采用解集 $\{u^{(j)}\}_{j=1}^M$ 作为多项式混沌的展开系数 $w_k(\boldsymbol{\omega})$ ，然后根据随机配点法的插值条件公式 (3.24) 构造 $\Phi_k(\boldsymbol{\omega})$ 。确定了插值系数的随机配点法的多项式展开式公式 (3.14) 将转化为公式 (3.27)。

$$u_N(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^M u^{(j)} \Phi_j(\boldsymbol{\omega}), \quad (3.27)$$

固定系数插值法有其特定的构造插值基底方法。对于一维插值问题，常用的插值基底有 Lagrange 基底和分段线性基底等。高维插值基底的构造往往利用张量积的运算规则，将单个维度上一维插值基底整合到多维空间。

固定系数插值法和矩阵求逆法虽是两种求解思路完全不同的计算方法，但在本质上都属于插值方法。插值方法具有的一些弊端，这两种方法都不能避免。插值方法的误差主要来源于配置点（或插值节点）和插值基底的选取。采用不同的配置点集和插值基底，计算得到的结果可能千差万别。目前，在配置点的选取问题上，还没有严格的理论分析存在，也没有普适的选点原则存在。本文将根据已有文献的介绍，选取常用的配置点集和插值基底。

尽管矩阵求逆法和固定系数插值法都存在一些弊端，但固定系数插值法与矩阵求逆法相比，在求解高维问题时不存在由矩阵求逆运算而引入的误差，仅需进行少量的加法和乘法运算，运算规则简单，且插值基底的选取与不确定性变量的分布类型无关。因此，本文将选用固定系数插值法构造代理多项式 $u_N(\boldsymbol{\omega})$ 。固定系数插值法在具体问题上可分为一维固定系数插值和高维固定系数插值。

3.4 一维固定系数插值

一维固定系数插值是一维多项式插值技术的一种，因此在介绍该方法之前，先介绍一维多项式插值技术，简称多项式插值。此时， $d=1$ ， $z \in \mathbb{R}$ 。记 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为待插值函数； $(z^{(1)}, \dots, z^{(N+1)})$ 为一套离散节点集，且满足 $a \leq z^{(1)} < \dots < z^{(N+1)} \leq b$ ； $(u^{(1)}, \dots, u^{(N+1)})$ 为对应编号的离散节点上的解。多项式插值的目的在于寻找次数不超过 N 的多项式 $\Pi_N(f)(z)$ ，形如公式 (3.28)。

$$\Pi_N(f)(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (3.28)$$

插值多项式需满足：

$$\Pi_N(f)(z^{(j)}) = u^{(j)}, \quad j = 1, \dots, N+1. \quad (3.29)$$

一维多项式插值问题的研究已十分成熟，构造一维插值多项式的方法有很多，例如 Lagrange 插值、分段低次插值、牛顿插值和样条插值等。每种插值方

法都有各自的适用范围和优缺点，其中最为常用的插值方法是 Lagrange 插值。本文仅讨论两种适用于固定系数插值法的多项式插值技术：Lagrange 插值和分段线性插值。

3.4.1 Lagrange 插值

Lagrange 插值是十分常用的一种插值方法，对应的插值基底为 Lagrange 插值基底，形如公式 (3.30)。

$$l^{(j)}(z) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N+1} \frac{(z - z^{(k)})}{(z^{(j)} - z^{(k)})}, \quad j = 1, \dots, N+1. \quad (3.30)$$

$l^{(j)}(z)$ 满足在节点 $z^{(j)}$ 上的值为 1，在其他 N 个节点 $z^{(k)}$ ($k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N+1$) 上的值为 0，即

$$l^{(j)}(z^{(k)}) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (3.31)$$

则拉格朗日插值的基本公式为

$$\Pi_N(f)(z) = \sum_{j=1}^{N+1} u^{(j)} l^{(j)}(z). \quad (3.32)$$

若 $f(z)$ 在含节点 $z^{(1)}, \dots, z^{(N+1)}$ 的区间 I_z 上具有 $N+1$ 次导数，则 Lagrange 插值误差

$$\varepsilon_N(z) = f(z) - \Pi_N(f)(z) = \frac{f^{(N+1)}(x)}{(N+1)!} \prod_{j=1}^{N+1} (z - z^{(j)}), \quad z \in I_z. \quad (3.33)$$

人们通常的理解是插值节点数目越多、插值的阶数越高，则插值的误差越小。龙格通过研究发现在等距节点条件下，高阶 Lagrange 插值将发生振荡现象，在某些区域内极大地偏离真实值公式。人们称这种插值多项式不收敛的现象为龙格现象。

为避免龙格现象，常用的一种做法是采用非等间距节点。文献[63]总结了儿种插值精度较高的节点集，其中 Chebyshev 极值点(也称 Chebyshev Gauss-Lobatto 节点)因其生成方式简单，被广泛用作 Lagrange 插值的节点集。该节点集可记为

$$T_N = \left\{ z^{(j)} \mid z^{(j)} = -\cos \frac{\pi(j-1)}{N}; \quad j = 1, \dots, N+1; N = 1, 2, \dots \right\}. \quad (3.34)$$

利用最新的有关质心 Lagrange 插值^[64]的研究，基于该节点集的质心 Lagrange 插值可实现高效、稳定的计算。质心 Lagrange 插值的基本思想是将传统的 Lagrange

插值基底公式 (3.30), 改写为

$$l^{(j)}(z) = \frac{1}{\underbrace{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N+1} (z^{(j)} - z^{(k)})}_{\hat{w}_j}} \cdot \frac{1}{z - z^{(j)}} \underbrace{\prod_{k=1}^{N+1} (z - z^{(k)})}_{l(z)} = l(z) \frac{\hat{w}_j}{z - z^{(j)}}, \quad (3.35)$$

则 Lagrange 插值可以写成

$$\Pi_N(f)(z) = l(z) \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\hat{w}_j}{z - z^{(j)}} u^{(j)}, \quad (3.36)$$

此为质心 Lagrange 插值公式的第一种形式, 其中, \hat{w}_j 是质心权重。现考虑插值函数 $f(z)=1$, 该函数可用 Lagrange 插值多项式精确表示, 即

$$1 = l(z) \sum_{j=1}^{N+1} \frac{\hat{w}_j}{z - z^{(j)}}. \quad (3.37)$$

从公式 (3.37) 中可得到用质心权重表示的 $l(z)$ 的表达式, 将此表达式代入公式 (3.36) 可得到质心插值公式的第二种形式:

$$\Pi_N(f)(z) = \frac{\sum_{j=1}^{N+1} \frac{\hat{w}_j}{z - z^{(j)}} u^{(j)}}{\sum_{j=1}^{N+1} \frac{\hat{w}_j}{z - z^{(j)}}} = \frac{\sum_{j=1}^{N+1} \frac{w_j}{z - z^{(j)}} u^{(j)}}{\sum_{j=1}^{N+1} \frac{w_j}{z - z^{(j)}}}, \quad (3.38)$$

其中, $w_j = \hat{w}_j/C$, C 为非零常数。对于 Chebyshev 极值点集, w_j 的取值具有很强的规律性, 如公式 (3.39) 所示, 这将极大地改善了 Lagrange 插值的效率。

$$w_1 = \frac{1}{2}; \quad w_j = (-1)^j, \quad j = 2, \dots, N; \quad w_{N+1} = \frac{1}{2}(-1)^{N+1}. \quad (3.39)$$

另一种避免龙格现象的做法是采用分段低次插值, 基本思想是用分段多项式代替单个多项式。分段低次插值的收敛取决于相邻节点之间的最大间距, 与节点集是否为等距无关。实际工程中获取的很多信息, 如传感器采集的数据, 大都属于均匀采样, 此时基于非等距节点集的 Lagrange 插值便不适用了。因此, 分段线性插值具有很高的实际应用价值。

3.4.2 分段线性插值

分段线性插值是分段低次插值的一种, 它将整个插值区间分成若干个小区间, 在每个小区间上分别作线性插值。分段线性插值的节点集应包含整个区间的两个端点, 则节点集的形式为 $z^{(1)} = a < z^{(2)} < \dots < z^{(N)} < b = z^{(N+1)}$ 。对于区间 $[z^{(j)}, z^{(j+1)}]$, 线性插值是用直线连接点 $(z^{(j)}, u^{(j)})$ 和 $(z^{(j+1)}, u^{(j+1)})$ 。记 $\Pi_1^h(f)(z)$ 为

分段线性多项式, h 表示各小区间的最大间距值。 $\Pi_1^h(f)(z)$ 在区间 $[z^{(j)}, z^{(j+1)}]$ 的表达式为

$$\Pi_1^h(f)(z) = u^{(j)} + \frac{u^{(j+1)} - u^{(j)}}{z^{(j+1)} - z^{(j)}}(z - z^{(j)}), \quad z \in [z^{(j)}, z^{(j+1)}]. \quad (3.40)$$

若 $f(z) \in C^2([z^{(j)}, z^{(j+1)}])$, $j=1, \dots, N+1$, 则分段线性插值的误差限为

$$\|f - \Pi_1^h f\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \max_{\xi \in [a, b]} |f''(\xi)|. \quad (3.41)$$

公式 (3.40) 可以较方便的改写为

$$\Pi_1^h(f)(z) = \sum_{j=1}^{N+1} u^{(j)} q_j(z), \quad (3.42)$$

其中, $q_j(z)$ 为基函数, 其表达式为

$$q_j(z) = \begin{cases} \frac{z - z^{(j-1)}}{z^j - z^{j-1}}, & \text{if } z \in [z^{(j-1)}, z^{(j)}], j = 2, \dots, N+1, \\ \frac{z^{(j+1)} - z}{z^{(j+1)} - z^{(j)}}, & \text{if } z \in [z^{(j)}, z^{(j+1)}], j = 1, \dots, N, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3.43)$$

若采用的是等距节点, 则基函数 $q_j(z)$ 的另一种形式为

$$q_j(z) = \begin{cases} 1 - \frac{N|z - z^{(j)}|}{b-a}, & \text{if } |z - z^{(j)}| < (b-a)/N, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3.44)$$

与 Lagrange 插值基底的性质 (公式 (3.31)) 类似, 分段线性插值基底 $q_j(z)$ 也满足

$$q_j(z^{(k)}) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (3.45)$$

分段线性插值具有公式简单、稳定性好、误差不会累积等优点, 但该插值多项式在插值节点处的导数值不连续。分段线性插值的误差主要受相邻节点间距的最大值控制, 因此采用等距节点插值可有效控制插值的误差。一般, 分段线性插值的收敛速度比较慢, 通常需要大量的插值节点才能达到理想的精度, 因此对于复杂非线性系统的插值问题, 分段线性插值的计算是非常耗时的。

综合上述分析, 基于 Chebyshev 极值点集的 Lagrange 插值具有收敛速度快、稳定性高等特点, 可适用于非线性系统的插值, 因此本文将基于此一维插值方法, 构造代理多项式 $u_N(\boldsymbol{w})$ 。

3.5 高维固定系数插值

高维插值问题的描述：记不确定性变量 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d)$ ($d > 1$)；为不失一般性，假定不确定性变量的取值空间为 $[-1, 1]^d$ 。在实际应用中，该标准区间可通过简单的映射关系得到。记 $\Theta_M^d = \{\mathbf{z}^{(j)}\}_{j=1}^M$ 是一套事先设定的位于不确定性空间中的点集，其中 $M \geq 1$ ，是配置点的数目。目前，高维固定系数插值技术有两种：全张量积法和稀疏网格插值法，均是基于张量积，将一维插值多项式拓展到高维空间。为能更好的理解高维多项式插值，下面将简要介绍张量积的运算法则和性质。

3.5.1 张量积 (Tensor Product)

记 U 为函数的线性空间，定义在实数集 X ； V 是另一个定义在实数集 Y 上的函数的线性空间。对于单个 $u \in U$ 和 $v \in V$ ，计算法则^[65]

$$w(x, y) := u(x)v(y), \quad (x, y) \in X \times Y, \quad (3.46)$$

定义在集合 $X \times Y$ 上，称为函数 u 和函数 v 的张量积，简记为

$$u \otimes v. \quad (3.47)$$

更进一步，对于部分 $u \in U$ 和部分 $v \in V$ ，函数空间 U 和函数空间 V 的张量积为定义在 $X \times Y$ 上的 $u \otimes v$ 的线性组合，故

$$U \otimes V := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i (u_i \otimes v_i) : \alpha_i \in \mathbb{R}, u_i \in U, v_i \in V, i = 1, \dots, n \right\}. \quad (3.48)$$

$U \otimes V$ 是定义 $X \times Y$ 上的函数的线性空间。

依据上述定义，对两个不同变量表示的多项式进行张量积运算。记 $U = \Pi_{<n_1}$ 表示阶数为 n_1 的多项式线性空间，作为定义在 $X = \mathbb{R}$ 上的函数集；同样地，记 $V = \Pi_{<n_2}$ 作为定义在 $Y = \mathbb{R}$ 上的函数集。由公式 (3.48) 可以很容易的获得 $U \otimes V$ ，表示定义在平面 $X \times Y = \mathbb{R}^2$ 的多项式线性空间 $\Pi_{<n_1, n_2}$ ，其中第 1 个变量的次数小于 n_1 ，第 2 个变量的次数小于 n_2 。现在考虑用两个不同变量组表示的多项式的张量积运算。此时，记 $U = \mathbb{R}^{n_1}$ 表示定义在 $X := \{1, 2, \dots, n_1\}$ 上的 n_1 维函数线性空间，类似地， $V = \mathbb{R}^{n_2}$ 表示定义在 $Y := \{1, 2, \dots, n_2\}$ 上的 n_2 维函数线性空间。这样 $U \otimes V$ 是定义在 $X \times Y = \{(i, j) : i = 1, \dots, n_1; j = 1, \dots, n_2\}$ 上的 $n_1 \times n_2$ 维的函数线性空间。

张量积具有双线性，即映射

$$U \times V \rightarrow U \otimes V : (u, v) \rightarrow u \otimes v, \quad (3.49)$$

满足条件：

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \otimes v = \alpha_1 (u_1 \otimes v) + \alpha_2 (u_2 \otimes v), \quad (3.50)$$

$$u \otimes (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 (u \otimes v_1) + \beta_2 (u \otimes v_2). \quad (3.51)$$

因此，公式 (3.48) 可简写为

$$U \otimes V = \left\{ \sum_i u_i \otimes v_i : u_i \in U, v_i \in V, i \in \mathbb{N}^+ \right\}. \quad (3.52)$$

3.5.2 全张量积法

在每一个配置点 $\mathbf{z}^{(j)} (j=1, \dots, M)$ 上，原随机微分方程的解答记为 $u(\mathbf{z}^{(j)})$ 。先考虑单个维度上的插值问题，上文介绍的两种插值方法：Lagrange 插值和分段线性插值，可统一写成

$$Q_i(u)(z) = \sum_{j=1}^{m_i} u(z^{(j)}) \cdot a_i^j, \quad (3.53)$$

其中， $Q_i(u)$ 为一维插值算子； $i \in \mathbb{N}$ 为插值水平； $a_i^j \in C([0,1])$ 为插值基函数，满足： $a_i^j(z^{(j)}) = 1, a_i^j(z^{(k)}) = 0 (k \neq j)$ ； m_i 为插值节点数。记所用的节点集为 $\Theta_{m_i}^1 = \{z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(m_i)}\}$ 。

全张量积法将张量积运算规则直接作用在一维插值多项式上，基本计算公式如公式 (3.54) 所示。

$$\mathcal{W}(q, d) = Q_{i_1} \otimes \dots \otimes Q_{i_d}. \quad (3.54)$$

其中，一般取 $i_1 = \dots = i_d = k+1$ ， $k \in \mathbb{N}^0$ 表示插值多项式的阶数； $q = d + k$ 。根据张量积的性质公式 (3.50) 和 (3.51) 可得全张量积的具体计算式：

$$\mathcal{W}(q, d) = \sum_{j_1=1}^{m_{i_1}} \dots \sum_{j_d=1}^{m_{i_d}} (a_{i_1}^{j_1} \otimes \dots \otimes a_{i_d}^{j_d}) \cdot u(z_{i_1}^{j_1}, \dots, z_{i_d}^{j_d}). \quad (3.55)$$

其中， $m_{i_1} = \dots = m_{i_d} = m$ 为单一维度上的插值节点数。全张量积法的插值基底为：

$$a_{i_1}^{j_1} \otimes \dots \otimes a_{i_d}^{j_d} = a_{i_1}^{j_1}(z_1) \times \dots \times a_{i_d}^{j_d}(z_d). \quad (3.56)$$

相应的多维插值节点集为：

$$\Theta_M^d = \mathcal{M}(q, d) = \Theta_{m_{i_1}}^1 \times \dots \times \Theta_{m_{i_d}}^1. \quad (3.57)$$

则所需的配置点数如公式 (3.58) 所示。通常，全张量积法所用的配置点数随着维数的增加而急剧增加。

$$M = m_{i_1} \times \dots \times m_{i_d} = m^d. \quad (3.58)$$

下面将以二维不确定性空间 $[-1, 1]^2$ ($d = 2$) 中的插值问题为例, 介绍全张量积法的具体操作过程。记不确定性变量 z_1 和 z_2 对应的一维插值节点集分别为公式 (3.59) 和公式 (3.60)。

$$\Theta_{m_{i_1}}^1 = \{z_{i_1}^{(1)}, \dots, z_{i_1}^{(m_{i_1})}\}, \quad (3.59)$$

$$\Theta_{m_{i_2}}^1 = \{z_{i_2}^{(1)}, \dots, z_{i_2}^{(m_{i_2})}\}, \quad (3.60)$$

其中, i_1 和 i_2 为插值水平; m_{i_1} 和 m_{i_2} 为插值节点数。若一维插值基底选用 Lagrange 基底, 则 z_1 和 z_2 对应维度上的插值多项式分别为公式 (3.61) 和公式 (3.62)。

$$Q_{i_1}(u)(z_1) = \sum_{j_1=1}^{m_{i_1}} \prod_{\substack{k_1=1 \\ k_1 \neq j_1}}^{m_{i_1}} \frac{(z_1 - z_{i_1}^{(k_1)})}{(z_{i_1}^{(j_1)} - z_{i_1}^{(k_1)})} u(z_{i_1}^{(j_1)}), \quad (3.61)$$

$$Q_{i_2}(u)(z_2) = \sum_{j_2=1}^{m_{i_2}} \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq j_2}}^{m_{i_2}} \frac{(z_2 - z_{i_2}^{(k_2)})}{(z_{i_2}^{(j_2)} - z_{i_2}^{(k_2)})} u(z_{i_2}^{(j_2)}), \quad (3.62)$$

根据全张量积法具体计算式 (3.55) 得, 二维不确定性空间 $[-1, 1]^2$ 上的 Lagrange 插值多项式为:

$$\mathcal{W}(2+k, 2) = \sum_{j_1=1}^{m_{i_1}} \sum_{j_2=1}^{m_{i_2}} \prod_{\substack{k_1=1 \\ k_1 \neq j_1}}^{m_{i_1}} \frac{(z_1 - z_{i_1}^{(k_1)})}{(z_{i_1}^{(j_1)} - z_{i_1}^{(k_1)})} \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq j_2}}^{m_{i_2}} \frac{(z_2 - z_{i_2}^{(k_2)})}{(z_{i_2}^{(j_2)} - z_{i_2}^{(k_2)})} u(z_{i_1}^{(j_1)}, z_{i_2}^{(j_2)}). \quad (3.63)$$

其中, $k \in \mathbb{N}^0$ 为插值的阶数, 所需的插值节点数为 m^2 。二维插值节点集为:

$$\mathcal{M}(2+k, 2) = \bigcup_{j_1=1, j_2=1}^{j_1=m_{i_1}, j_2=m_{i_2}} (z_{i_1}^{j_1}, z_{i_2}^{j_2}). \quad (3.64)$$

基于常规 Lagrange 插值技术的全张量积公式 (3.63) 涉及到大量的除法和乘法运算, 计算效率非常低。而上文介绍的基于 Chebyshev 极值点集的质心 Lagrange 插值技术可有效减少乘法运算, 基于该插值技术的二维插值多项式如公式 (3.65) 所示。

$$\mathcal{W}(2+k, 2) = \frac{\sum_{j_1=1}^{m_{i_1}} \sum_{j_2=1}^{m_{i_1}} \frac{w_{j_1}}{z_1 - z_{i_1}^{(j_1)}} \frac{w_{j_2}}{z_2 - z_{i_2}^{(j_2)}} u(z_{i_1}^{j_1}, z_{i_2}^{j_2})}{\sum_{j_1=1}^{m_{i_1}} \frac{w_{j_1}}{z_1 - z_{i_1}^{(j_1)}} \cdot \sum_{j_2=1}^{m_{i_2}} \frac{w_{j_2}}{z_2 - z_{i_2}^{(j_2)}}}. \quad (3.65)$$

3.5.3 稀疏网格插值法

稀疏网格插值法, 顾名思义, 是一种基于不确定性空间系数网格节点集的高

维插值方法。该方法利用 Smolyak 算法构造稀疏网格和插值多项式，可极大地节省了配置点的数目，提高运算速度。

Smolyak 算法的基本思想是基于于一维固定系数插值多项式的插值误差，利用张量积运算法则构造多维插值公式。记 Δ_i 为第 i 级插值水平与第 $i-1$ 级插值水平对应的一维插值多项式的误差算子。若定义 $Q_0 = 0$ ，则 Δ_i 具有如下形式：

$$\Delta_i = Q_i - Q_{i-1}. \quad (3.66)$$

则 Smolyak 算法的基本公式为

$$\mathcal{A}(q, d) = \sum_{|\mathbf{i}| \leq q} (\Delta_{i_1} \otimes \dots \otimes \Delta_{i_d}), \quad (3.67)$$

其中 $|\mathbf{i}| = i_1 + \dots + i_d$ ； $q = d + k$ ， $k \in \mathbb{N}^0$ 表示插值多项式的阶数； $|\mathbf{i}| \leq q$ 对应的 (i_1, \dots, i_d) 取值共有 C_{k+d}^k 。若令 $\mathcal{A}(d-1, d) = 0$ ，则公式 (3.67) 可改写成如下递推公式：

$$\mathcal{A}(q, d) = \mathcal{A}(q-1, d) + \sum_{|\mathbf{i}|=q} (\Delta_{i_1} \otimes \dots \otimes \Delta_{i_d}). \quad (3.68)$$

其中， $|\mathbf{i}| = q = d + k$ 对应的 (i_1, \dots, i_d) 取值共有 C_{k+d-1}^k 种情形。

Smolyak 算法的另一种表达形式为：

$$\mathcal{A}(q, d) = \sum_{q-d+1 \leq |\mathbf{i}| \leq q} (-1)^{q-|\mathbf{i}|} \binom{d-1}{q-|\mathbf{i}|} (Q_{i_1} \otimes \dots \otimes Q_{i_d}). \quad (3.69)$$

Smolyak 算法所需的多维节点集为：

$$\Theta_M^d = \mathcal{H}(q, d) = \sum_{|\mathbf{i}| \leq q} (\Delta \Theta_{m_{i_1}}^1 \otimes \dots \otimes \Delta \Theta_{m_{i_d}}^1). \quad (3.70)$$

与公式 (3.68) 类似，公式 (3.70) 也可写成如下递推形式：

$$\mathcal{H}(q, d) = \mathcal{H}(q-1, d) + \sum_{|\mathbf{i}|=q} (\Delta \Theta_{m_{i_1}}^1 \otimes \dots \otimes \Delta \Theta_{m_{i_d}}^1). \quad (3.71)$$

其中， $\Delta \Theta_{m_i}^1$ 为一维插值问题中第 i 级插值水平与第 $i-1$ 级插值水平对应的插值节点集的差集。若规定 $\Theta_{m_0}^1 = 0$ ，则 $\Delta \Theta_{m_i}^1$ 具有如下形式：

$$\Delta \Theta_{m_i}^1 = \Theta_{m_i}^1 - \Theta_{m_{i-1}}^1. \quad (3.72)$$

由公式 (3.71) 和 (3.72) 可知，稀疏网格插值的节点集需满足嵌套关系，即

$$\Theta_{m_i}^1 \subset \Theta_{m_{i+1}}^1, \quad \mathcal{H}(q, d) \subset \mathcal{H}(q+1, d). \quad (3.73)$$

下面以二维不确定性空间 $[-1, 1]^2$ ($d = 2$) 中的插值问题为例，介绍 Smolyak 算法的基本操作过程。插值基底仍选用 Lagrange 基底，不确定性变量 z_1 和 z_2 单一维度上的插值节点集如公式 (3.58) 和公式 (3.59) 所示。由于 Smolyak 算法满足递推公式 (3.68)，故计算的关键在于求解表达式：

$$\Delta A(2+k, 2) = \sum_{|\mathbf{i}|=2+k} (\Delta_{i_1} \otimes \Delta_{i_2}). \quad (3.74)$$

其中, $|\mathbf{i}|=i_1+i_2$, $k \in \mathbb{N}^0$ 为插值多项式的阶数。在公式 (3.66) 中, 因多项式插值算子 Q_{i-1} 的阶数小于 Q_i 的阶数, 故根据插值多项式存在且唯一的定理^[1], 存在 $Q_{i-1}=Q_i(Q_{i-1})$, 则 Δ_i 的具体计算式为:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{\Delta m_i} \sum_{z^{(j)} \in \Delta \Theta_{m_i}^1} a_i^j (u(z^{(j)}) - Q_{i-1}(u)(z^{(j)})). \quad (3.75)$$

由此可知, 多项式插值误差算子 Δ_{i_1} 和 Δ_{i_2} 具有如下表达式:

$$\Delta_{i_1} = \sum_{j_1=1}^{\Delta m_{i_1}} \sum_{z_1^{(j_1)} \in \Delta \Theta_{m_{i_1}}^1} \prod_{\substack{k_1=1 \\ k_1 \neq j_1}}^{m_{i_1}} \frac{(z_1 - z_{i_1}^{(k_1)})}{(z_1^{(j_1)} - z_{i_1}^{(k_1)})} \left(u(z_{i_1}^{(j_1)}) - \sum_{j_{-1}=1}^{m_{i_1}-1} \prod_{\substack{k_{-1}=1 \\ k_{-1} \neq j_{-1}}}^{m_{i_1}-1} \frac{(z_{i_1}^{(j_1)} - z_{i_1}^{(k_{-1})})}{(z_{i_1}^{(j_1)} - z_{i_1}^{(k_{-1})})} u(z_{i_1}^{(j_{-1})}) \right), \quad (3.76)$$

$$\Delta_{i_2} = \sum_{j_2=1}^{\Delta m_{i_2}} \sum_{z_2^{(j_2)} \in \Delta \Theta_{m_{i_2}}^1} \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq j_2}}^{m_{i_2}} \frac{(z_2 - z_{i_2}^{(k_2)})}{(z_2^{(j_2)} - z_{i_2}^{(k_2)})} \left(u(z_{i_2}^{(j_2)}) - \sum_{j_{-2}=1}^{m_{i_2}-1} \prod_{\substack{k_{-2}=1 \\ k_{-2} \neq j_{-2}}}^{m_{i_2}-1} \frac{(z_{i_2}^{(j_2)} - z_{i_2}^{(k_{-2})})}{(z_{i_2}^{(j_2)} - z_{i_2}^{(k_{-2})})} u(z_{i_2}^{(j_{-2})}) \right). \quad (3.77)$$

在得到 Δ_{i_1} 和 Δ_{i_2} 的表达式之后, 可利用张量积运算法则得到 $\Delta A(2+k, 2)$ 。这部分运算与全张量积法中 $\mathcal{W}(q, d)$ 的计算类似, 上文已给出详细的介绍, 这里便不再赘述。

3.5.4 两种高维插值方法的比较

虽然全张量积法和稀疏网格插值法都是基于张量积法, 但两者直接用于张量积运算的对象是不同的。全张量积法的运算对象为一维插值多项式, 而稀疏网格插值法的运算对象为一维插值多项式的插值误差。二者在多维插值网络的构造上存在很大差别, 该差异将直接导致插值节点数目的不同。对于高维问题, 插值节点数目的多少将直接影响算法的效率。因此, 这里将主要比较二者在插值网络构造上的不同。

(1) 一维插值节点构造

为便于比较, 现认为二者在单一维度上的具有相同的节点构造方式。目前, 常用的单一维度上的节点构造方式有三种: ①经典最值稀疏网格 H^M , ②最值稀疏网格 H^{NB} 和 ③Clenshaw-Curtis 稀疏网格 H^{CC} 。与前文保持一致, 考虑单一维度上不确定性变量的取值区间为 $[-1, 1]$, 则这三种稀疏网络的具体表达式分别如公式 (3.78) - (3.80) 所示。其中, m_i 为第 i 级插值水平下的节点数, $z_i^{(j)} (j=1, \dots, m_i)$ 为节点取值。

① 经典最值稀疏网格 H^M , 网络起点包含区间的两个端点, 具体定义为:

$$\begin{aligned}
 m_i &= 2^i + 1, \\
 z_i^{(j)} &= 2 \frac{j-1}{m_i - 1} - 1, \quad j=1, \dots, m_i \text{ 且 } i \geq 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.78}$$

② 最值稀疏网格 H^{NB} ，网格起点包含区间的一侧端点，具体定义为：

$$\begin{aligned}
 m_i &= 2^i - 1, \\
 z_i^{(j)} &= 2 \frac{j-1}{m_i + 1} - 1, \quad j=1, \dots, m_i \text{ 且 } i \geq 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.79}$$

③ Clenshaw-Curtis 稀疏网格 H^{CC} ，网格起点为不包含区间的端点，起点为区间的中点，具体定义为：

$$\begin{aligned}
 m_i &= \begin{cases} 1, & i=1, \\ 2^{i-1} + 1, & i > 1, \end{cases} \\
 z_i^{(j)} &= \begin{cases} 0, & i=1, j=1, \\ 2 \frac{j-1}{m_i - 1} - 1, & i > 1, j=1, \dots, m_i. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{3.80}$$

另外定义 $m_1=1, q=N+k, k$ 称为 smolyak 算法的级数。若采用 Clenshaw-Curtis 求积法那么所需的配点数目为：

$$\begin{aligned}
 H(N, N) &= 1 \\
 H(N+1, N) &= 2N + 1 \\
 H(N+2, N) &= 2N^2 + 2N + 1 \\
 H(N+k, N) &= 2N^k + 2N^{k-1} + \dots + 1
 \end{aligned}$$

表 3.2 给出了上述三种稀疏网格在不同插值水平下的节点数和节点取值。从表中可以看出，Clenshaw-Curtis 稀疏网格 H^{CC} 所用的节点数最少。因此，本文将采用此网格形式构造高维配置点集。

表 3.2 三种稀疏网格在不同插值水平下的节点数和节点取值

i	经典最值稀疏网格 H^M		最值稀疏网格 H^{NB}		Clenshaw-Curtis 网格 H^{CC}	
	m_i	$z_i^{(j)}$	m_i	$z_i^{(j)}$	m_i	$z_i^{(j)}$
1	3		1		1	
2	5		3		3	
3	9		7		5	
4	17		15		9	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(2) 多维插值网格

这里仍以等距节点为例，介绍全张量积法和稀疏网格法的多维插值网格。其中，一维插值节点的构造方式采用 Clenshaw-Curtis 稀疏网格 H^{CC} 。表 3.3 给出了不同插值空间维度数 d 和不同插值阶数 k 下全张量积法的插值节点数 $\mathcal{M}(q,d)$ 和稀疏网格法的插值节点数 $\mathcal{H}(q,d)$ 的取值情况。从表中可看出，基于全张量积法的 $\mathcal{M}(q,d)$ 和基于稀疏网格法的 $\mathcal{H}(q,d)$ 均随着插值空间的维度数 d 或插值阶数 k 的增加而增长，但 $\mathcal{M}(q,d)$ 的增长幅度明显高于 $\mathcal{H}(q,d)$ ，尤其在 d 或 k 的值较大时，这种差距更加明显。为更形象的展现这两种插值方法所用插值网格的不同，图 3.2 给出了基于等距节点的全张量积法（左图）和稀疏网格法（右图）在二维不确定性空间中的四阶插值网格。从图中可以看出，全张量积法的节点均匀铺满整个插值空间，而稀疏网格法则零星的在插值空间中采点。

表 3.3 全张量积法和稀疏网格法的插值节点数目

d	k	$\mathcal{M}(q,d)$	$\mathcal{H}(q,d)$
2	0	1	1
	1	9	5
	2	25	13
	3	81	29
	4	289	61
5	1	243	11
	2	3125	61
	3	59049	311
10	1	59049	21
	2	9765625	221
	3	3.49E+09	2221

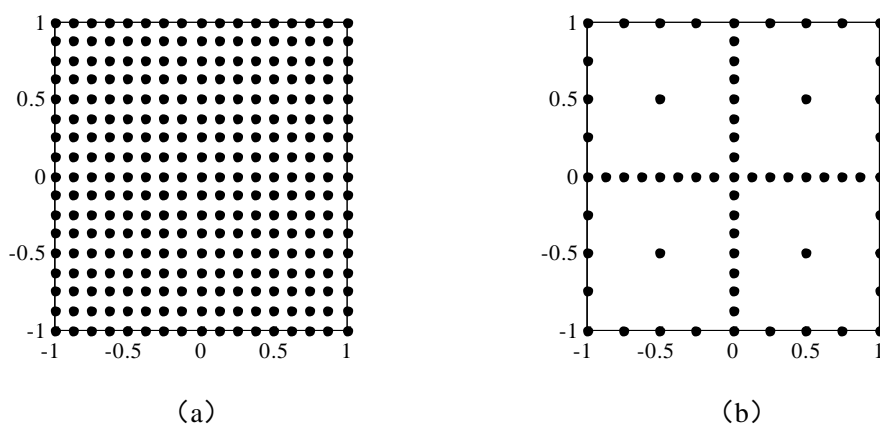


图 3.2 基于等距节点的二维插值空间($d=2$)中四阶插值多项式的插值网格，其中 (a) 图表示全张量积法插值节点，(b) 图表示稀疏网格法插值节点。

综上所述, 鉴于稀疏网格法所需节点数明显少于全张量积法的特点, 本文将采用稀疏网格法求解高维不确定性问题。其中, 单一维度上插值采用 Lagrange 插值基函数作为基底, 稀疏网格的构造方式选用 Clenshaw-Curtis 稀疏网格, 插值节点选用非等距节点 Chebyshev 极值点。与公式 (3.34) 略有不同, 适用于 Clenshaw-Curtis 稀疏网格的 Chebyshev 极值点的计算公式为:

$$\begin{aligned} m_i = 1, \quad z_i^1 &= 0, \\ m_i > 1, \quad z_i^j &= -\cos \frac{\pi \cdot (j-1)}{m_i - 1}, \quad j = 1, \dots, m_i. \end{aligned} \quad (3.81)$$

3.6 本章小结

本章简单介绍了随机配点法中的基本概念, 包括不确定性问题数学模型的一般形式、不确定性变量的量化方法以及不确定性问题解的形式和具体的求解途径。重点随机配点法的具体实现方法——多项式插值技术, 详细阐述一维固定系数插值方法和高维固定系数插值方法, 并介绍了几种常用的配置点网络的构造方法, 比较了全张量积法与基于 Smolayk 算法的稀疏网格插值法在配置点网络构造上的不同, 得出稀疏网格插值所需配置点的数目将明显少于全向量积法, 最后提出选用基于 Chebyshev 极值点的 Smolyak-稀疏网格法求解高维不确定性问题。

第 4 章 常幅加载下金属板疲劳损伤预后不确定性分析

4.1 引言

近年,为了更准确的描述裂纹扩展过程,科研人员利用贝叶斯理论和传感器的检测数据,更新裂纹扩展的物理模型,提高寿命预测的准确性。Madsen(1997)^[92]在贝叶斯框架内利用无损检测技术,提出更新概率的思想。Perrin 等(2007)^[93]结合马尔可夫链蒙特卡洛(MCMC)仿真与贝叶斯技术,用于断裂分析。Zhao 等(2013)^[75]通过贝叶斯干涉技术,更新 Paris 公式中随机参数的分布类型,并利用随机配点法预测齿轮的剩余寿命。Gobbato 等(2014)^[94]利用递归贝叶斯技术预测并更新飞行器结构中关键构件的疲劳损伤剩余寿命。

这些研究成果归根结底均是基于概率理论或数理统计方法。通常,获得不确定性变量的精确概率特征需利用大量疲劳裂纹扩展的实验数据。疲劳实验具有周期长、花费高等特点,对某些罕见贵重的金属材料进行大量的疲劳实验是极不经济的。因此,本文提出在实验数据不充分的情况下,应分别分析不确定性变量下的剩余寿命的概率特征,通过数值模拟,与已有的实验数据进行对比,研究铝 7075-T6 在不同的荷载条件下的疲劳裂纹扩展不确定性。前面提到的小时间尺度模型将作为一种机制模型来解释随机变幅荷载下的疲劳裂纹增长行为。随机配点法被用于疲劳损伤预后的不确定性处理。

4.2 疲劳裂纹扩展实验数据和材料参数评估

4.2.1 疲劳裂纹扩展实验

本算例主要以 Luzizi 疲劳裂纹扩展实验^[95]为基础,进行金属板疲劳损伤预后不确定性分析。该实验以具有中心 I 型裂纹的 7075-T6 铝合金板为基本试件。铝合金 7075-T6 的化学成分和机械性能分别如表 4.1 和表 4.2 所示。

表 4.1 Al7075-T6 化学成分表(重量%)

化学成分	Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Ti	V	Zr	Max
最小含量	0.00	0.00	1.2	0.00	2.1	0.18	5.1	0.00	0.00	0.00	0.05
最大含量	0.4	0.50	2.0	0.30	2.9	0.28	6.1	0.20	0.05	0.05	0.15

表 4.2 Al7075-T6 机械性能表

极限拉伸强度	573~582Mpa
屈服强度	502~516Mpa
杨氏模量	71.7Gpa

CT 试件示意图如图 4.1 所示，宽度(W)是 40mm 和厚度(B)是 5mm。

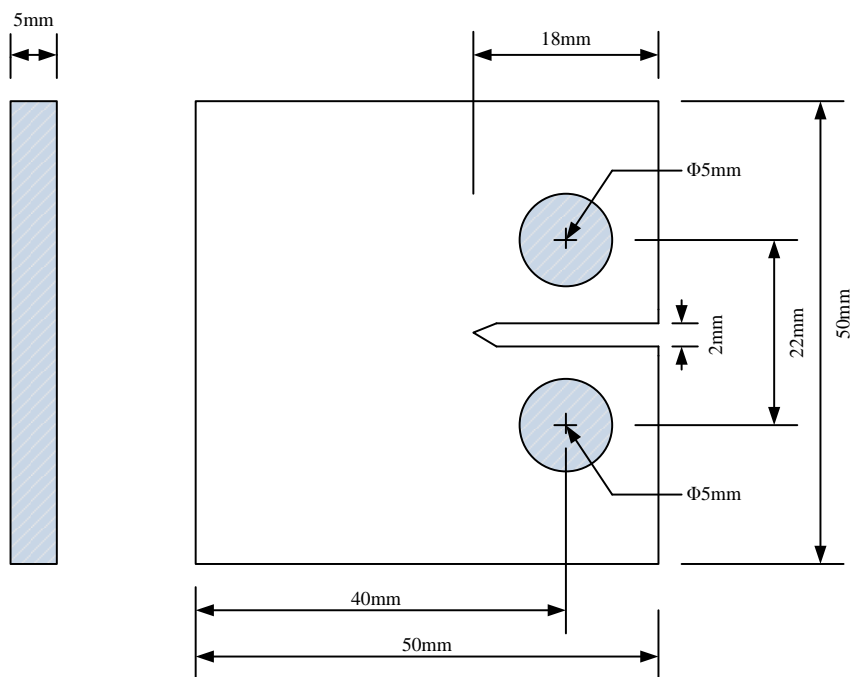


图 4.1 单轴拉伸试验下 CT 试件示意图

所有的实验在 MTS 伺服液压试验机加载下进行并且依照 ASTM 测试规范控制应力^[96]，试件表面裂缝测量系统由立体显微镜,数码相机和台式移动数控监测器组成。数字测量系统的水平方向可以读出分辨率为 0.0001 英寸的数字。

本文中所取的 7 组常幅加载疲劳实验值如表 4.3 所示。荷载峰值 $P_{max}=2000N$ ， $P_{min}=200N$ ，应力比 $R=0.1$ 。7 组 7075-T6 铝合金板的疲劳裂纹扩展实验结果如图 4.2 所示。

表 4.3 7075-T6 铝合金疲劳裂纹扩展试验数据 (mm)

CT01		CT02		CT03		CT04		CT05		CT06		CT07	
a	N	a	N	a	N	a	N	a	N	a	N	a	N
10.93	0	10.93	0	10.93	0	10.93	0	10.93	0	10.93	0	10.93	0
11.34	3000	11.42	1400	11.18	1400	11.30	1400	11.26	1400	11.26	1400	11.26	1500
11.66	4400	11.74	2800	11.50	3000	11.74	2800	11.54	2800	11.58	3000	11.58	2800
12.03	6000	12.19	4500	11.70	4500	12.35	4500	11.82	4400	11.99	4400	11.82	4500
12.35	7400	12.80	6000	11.99	6000	12.84	6000	12.27	6000	12.39	6000	12.15	6000

12.72	9000	13.28	7400	12.31	7400	13.32	7400	12.64	7400	12.72	7400	12.51	7400
13.08	10400	13.89	8800	12.72	8800	14.05	8800	13.04	8800	13.20	9000	12.96	8800
13.53	12000	14.58	10400	13.93	13400	14.78	10400	13.49	10400	13.57	10500	13.36	10400
14.14	13400	15.23	12000	14.42	14900	15.76	12000	14.01	11700	14.01	12000	13.85	12000
14.70	14900	15.96	13400	15.03	16400	16.85	13300	14.62	13300	14.50	13400	14.30	13400
15.43	16400	16.77	14900	15.84	18000	18.19	14900	15.07	14900	15.27	15000	14.74	14900
16.28	18000	18.11	16400	16.65	19300	19.36	16400	15.84	16400	16.20	16400	15.19	16400
17.22	19300	19.45	18000	17.62	20900	20.95	18000	16.65	17900	16.97	18000	15.76	18000
18.43	20900	20.74	19300	18.47	22400	23.82	19400	17.86	19200	18.07	19400	16.36	19400
20.14	22400	22.81	20900	19.77	24000	25.41	19900	19.20	20900	19.49	20900	17.05	20900
22.12	24000	25.32	22400	21.15	25300			20.62	22300	21.19	22400	17.91	22400
25.93	25300	26.58	22600	23.26	26900			22.77	23900	23.38	24000	18.80	24000
				25.89	27500			26.46	25300	24.84	24500	19.97	25300
												21.72	26900
												23.42	27400
												25.32	27600

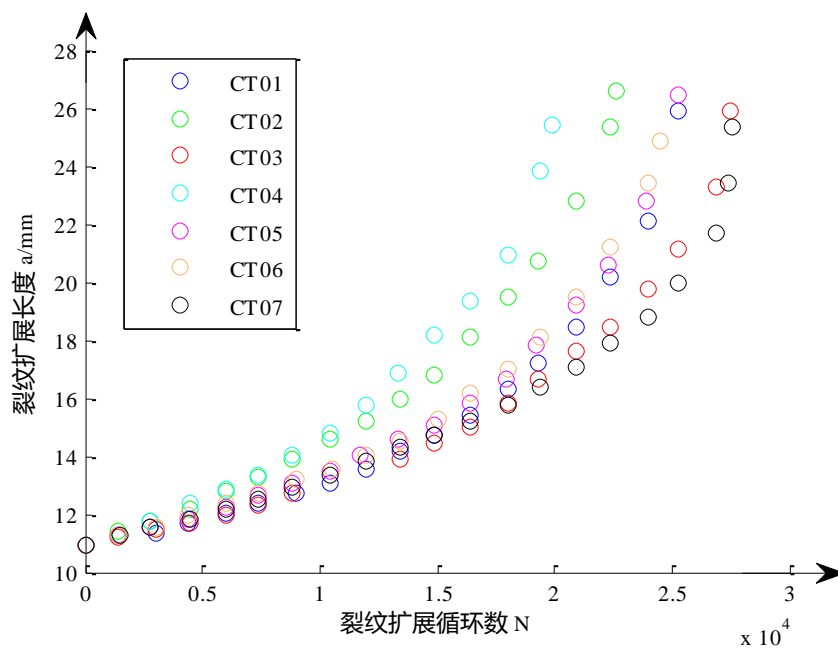


图 4.2.7 组疲劳裂纹扩展 a/N 实验数据图

7075-T6 铝合金板疲劳裂纹扩展的 7 组实验数据，每组的约 17 个点，共计 124 个点如图 4.2 所示。从图中可以看出，各裂纹扩展曲线点之间存在较大的离散性。这是正是由不确定性所引起的。

4.2.2 不确定性建模和概率分析

疲劳裂纹增长的不确定性可能由金属的机械性能变异性，材料化学成分不均匀，几何属性的不确定性等引起。由第二章可知小时间尺度公式为：

$$\dot{a} = H(\dot{\sigma}) \cdot H(\sigma - \sigma_{ref}) \cdot \frac{2C\lambda\sigma}{1 - C\lambda\sigma^2} \cdot \dot{\sigma} \cdot a \quad (2.28)$$

这里 $\lambda = \frac{4}{E\sigma_y}$, $C = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_C - \Delta K_{th}}\right) / 2$

从小时间尺度模型公式中可以看出，断裂韧性 K_C 、应力因子门槛值 K_{th} 和屈服强度 σ_y 这三个材料参数可以被选作随机变量。本章采用小时间尺度裂纹扩展公式描述此 7075-T6 铝合金板的疲劳裂纹扩展过程。图 4.2 中裂纹扩展数据的分散性反映在小时间尺度裂纹扩展公式中，将具体表现为材料参数 K_{th} 、 K_C 和 σ_y 的离散性。事实上，受材料微观结构的影响， K_{th} 、 K_C 和 σ_y 在不同试件上测得的值是不同的，且同一试件不同点上测得的值也是不同的。

(1) 材料参数评估统计

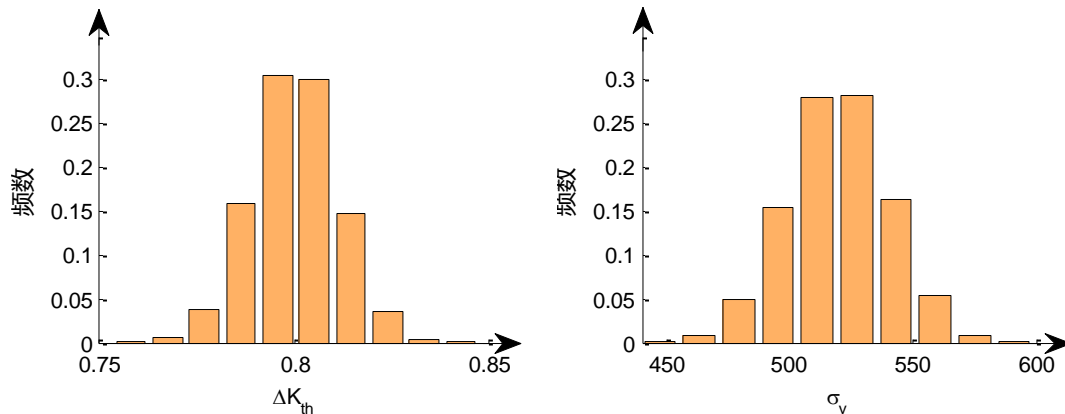
通过查阅相关文献，本例中三个材料参数均服从对数正态分布总体^[97]，且参数之间相互独立。采用贝叶斯退化/更新法^[98]对三个参数进行评估。用样本方差估计总体方差时应选择样本方差的无偏估计量 S^2 ，其表达式为：

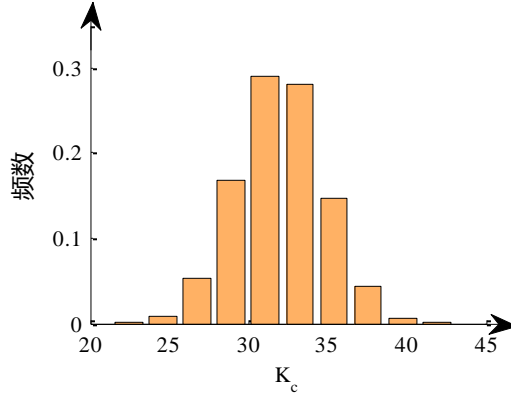
$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (4.1)$$

得到的参数分布如表 4.4 和图 4.3 所示：

表 4.4 材料参数的评估统计

变量	$\Delta K_{th} (MPa \cdot m^{1/2})$	$K_C (MPa \cdot m^{1/2})$	$\sigma_y (MPa)$
均值	0.8	32	520
标准差	0.011	2.72	20.32




 图 4.3 材料参数 K_c ΔK_{th} 和 σ_y 的统计分布

4.2.3 疲劳裂纹扩展曲线建立

为了便于后文比较,参考实验数据和应力强度因子门槛值设置裂纹扩展终止长度为 0.0258m,即本章中是在控制相同裂纹扩展长度条件下,比较裂纹疲劳寿命 N ,后文不再赘述。

得到材料参数 $(K_c, \Delta K_{th}, \sigma_y)$ 的值之后,可利用小时间尺度公式重建疲劳裂纹扩展曲线。从前面可知,用于描述该金属板疲劳裂纹扩展过程的小时间尺度公式的具体形式为:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C\lambda(K_{\max}^2 - K_{ref}^2)}{\pi(1 - C\lambda\sigma_{\max}^2)} \quad (4.2)$$

$$C = \frac{ctg\theta}{2} \quad (4.3)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_c - \Delta K_{th}} \quad (4.4)$$

由断裂力学知识可知,图 4.1 所示的金属板中央 I 型裂纹的裂纹尖端应力强度因子幅 ΔK 的表达式为

$$\Delta K = \frac{\Delta P}{B\sqrt{W}} \cdot \frac{(2+\alpha)}{(1-\alpha)^{3/2}} (0.886 + 4.64\alpha + 13.32\alpha^2 + 14.72\alpha^3 - 5.6\alpha^4) \quad (4.5)$$

式中: $\alpha = a/W$ 。对于 a/W 大于或等于 0.2 表达式有效。

若记 $f(a) = \frac{C\lambda(K_{\max}^2 - K_{ref}^2)}{\pi(1 - C\lambda\sigma_{\max}^2)}$, 则公式 (4.2) 可改写成如下形式:

$$\begin{cases} da/dN = f(a) \\ a|_{N=0} = a_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

上式可利用 Runge-Kutta (RK) 公式求解。

通过上述公式, 运用 MATLAB 计算可得到 7075-T6 铝合金板基于小时间尺度公式重建的疲劳裂纹扩展曲线 ($a-N$ 曲线), 如图 4.4 所示。与前文中实验数据相比, 图 4.4 中大部分 $a-N$ 曲线均能与实验数据吻合, 仅有少部分裂纹扩展曲线不能与实验数据吻合。这些裂纹扩展曲线受实验过程中某些环境或人为因素的影响, 主要包含自身实验过程的信息, 并不能用小时间尺度公式描述。

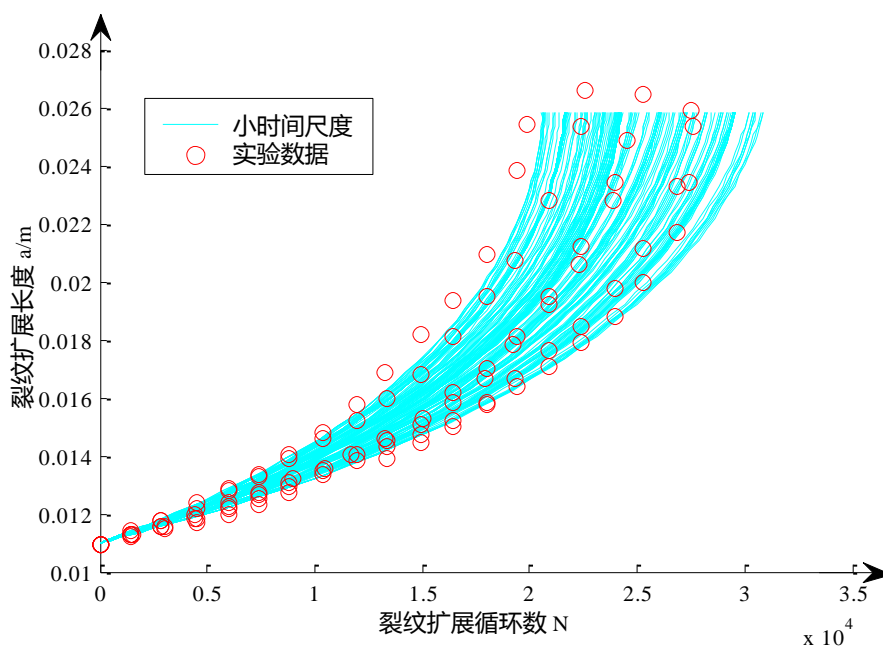


图 4.4 基于小时间尺度公式的 $a-N$ 曲线与实验数据的对比

4.3 金属板疲劳损伤预后不确定性分析

4.3.1 金属板疲劳损伤预后模型

由前文的分析可知, 小时间尺度模型可以很好的描述 7075-T6 铝合金板 I 型裂纹的扩展过程。通过对金属板小时间尺度模型 (2.28) 积分, 得到 7075-T6 铝合金板剩余疲劳寿命 (或荷载循环次数 N) 的基本计算公式如下:

$$N = \int_{a_0}^{a_c} \frac{C\pi(1-C\lambda\sigma_{\max}^2)}{\lambda(K_{\max}^2 - K_{ref}^2)} da \quad (4.7)$$

其中, a_0 为初始裂纹长度, a_c 为裂纹临界长度。与实验保持一致, 取 $a_0=0.011\text{m}$, $a_c=0.0258\text{mm}$ 。公式 (4.7) 中材料参数 ΔK_{th} , K_c 和 σ_y 的变异性, 使得金属板剩余疲劳寿命的预测值是不确定性的, 对此将本文后面将进行详细研究。

(1) 损伤预后不确定性模型

记 $\boldsymbol{\omega}$ 为影响金属板疲劳裂纹扩展的不确定性矢量, 则剩余疲劳寿命应准确地记为 $N(\boldsymbol{\omega})$ 。本文主要考虑材料参数 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 为不确定性变量, 则 $\boldsymbol{\omega} = (\Delta K_{th}, K_c, \sigma_y)$ 。考虑不确定性影响的金属板疲劳损伤预后模型为:

$$N(\boldsymbol{\omega}) = \int_{a_0}^{a_c} \frac{C\pi(1 - C\lambda\sigma_{\max}^2)}{\lambda(K_{\max}^2 - K_{ref}^2)} da, \boldsymbol{\omega} \in I_{\boldsymbol{\omega}} \quad (4.8)$$

其中, $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 为不确定性变量的取值空间, 即参数 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 的取值空间。本文采用随机配点法求解该疲劳损伤预后不确定性模型。由第三章的理论介绍可知, 随机配点法在求解不确定性问题时, 需给出不确定性变量的量化区间。

(2) 不确定性变量的量化区间

上文假定材料参数 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 均服从对数正态分布。当区间外概率 (或舍弃概率) 小于 0.003 时, 正态分布随机变量的量化区间为 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$, 则 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 的量化区间分别为 $[0.767, 0.833]$ 、 $[23.84, 40.16]$ 和 $[459.04, 580.96]$ 。因此, 式 (4.8) 中不确定性变量的取值空间 $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 为:

$$I_{\boldsymbol{\omega}} = [0.767, 0.833] \times [23.84, 40.16] \times [459.04, 580.96]. \quad (4.9)$$

4.3.2 金属板疲劳寿命代理多项式

应用随机配点法进行金属板疲劳损伤预后时, 主要工作在于构建代理多项式 $N_k(\boldsymbol{\omega})$, 用以近似剩余疲劳寿命 $N(\boldsymbol{\omega})$ 在不确定性空间 $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 上的取值。为区别于第三章中多项式的展开阶数 N , 这里用 $k \in \mathbb{N}^0$ 表示多项式阶数或插值阶数。本文采用基于 Chebyshev 极值点的 Smolyak-稀疏网格插值法构建代理多项式 $N_k(\boldsymbol{\omega})$, 故 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 也称插值多项式。通常, 随着插值阶数 k 的增加, 插值多项式的计算精度将提高, 而基于该多项式的计算时间将延长, 计算效率将下降。因此, 选择合适的插值阶数, 确定最优化的 $N_k(\boldsymbol{\omega})$, 平衡计算精度和计算效率之间的矛盾, 是本节急需解决的问题。

(1) 参数线性变换

因第三章中介绍的有关随机配点法的知识均是针对取值区间为 $[-1, 1]$ 的不确定性变量, 故在利用稀疏网格插值法构建 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 之前, 需对 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 的进行如公式 (3.30) 和公式 (3.31) 所示的线性变换, 将如公式 (4.9) 所示的不确定性空间 $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 变换到标准不确定性空间 $[-1, 1]^3$ 。

$$\Delta K_{th} = 0.033z_1 + 0.8, \quad (4.10)$$

$$K_c = 8.16z_2 + 32, \quad (4.11)$$

$$\sigma_y = 60.96z_3 + 520, \quad (4.12)$$

其中， z_1 、 z_2 和 z_3 分别为对应 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 的标准不确定性变量，取值范围均为 $[-1, 1]$ 。

(2) 计算效率

在研究了稀疏网格插值法的计算精度后，下文将对稀疏网格插值法的计算效率进行研究。第三章曾指出，稀疏网格插值法的计算效率主要受配置点的数目影响。因此，本文给出了各插值阶数对应的配置点的数目 M ，如表 4.5 所示。也即需求解确定性剩余疲劳寿命的次数，如图 4.5 所示。

$$H(N, N) = 1$$

$$H(N+1, N) = 2N + 1$$

$$H(N+2, N) = 2N^2 + 2N + 1$$

$$H(N+k, N) = 2N^k + 2N^{k-1} + \dots + 1$$

表 4.5 配置点的数目 M

k	1	2	3	4	5	6	7	8
H	$H(4,3)$	$H(5,3)$	$H(6,3)$	$H(7,3)$	$H(8,3)$	$H(9,3)$	$H(10,3)$	$H(11,3)$
M	7	25	79	241	727	2185	6559	19681

当 $k \leq 5$ 时， M 的增幅较小； $k=5$ 时， M 的取值为 727；此后， M 的增幅成倍增加， $k=8$ 时， M 的取值达到了 19681，较 $k=6$ 时增加了 18954。

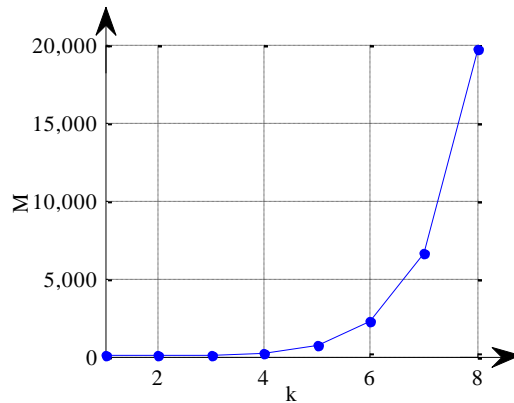
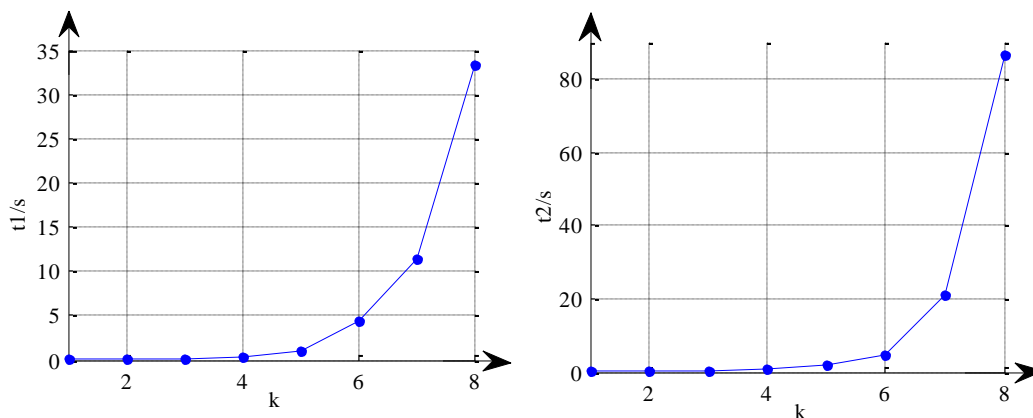


图 4.5 确定性剩余疲劳寿命的求解次数随插值阶数的变化

为进一步说明稀疏网格插值法的计算效率，本文给出了基于稀疏网格法构造代理多项式 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 所需的计算时间 t_1 随插值阶数 k 的变化曲线，如图 4.6 (a)

所示。此外，图 4.6 (b) 给出了基于代理多项式 $N_k(\boldsymbol{\omega})$ 求解不确定性空间中 10000 个样本点所需的时间 t_2 。与图 3.10 描述的曲线变化规律类似，当 $k \leq 5$ 时， t_1 和 t_2 取值均非常小； $k=5$ 时对应的 t_1 和 t_2 的大小分别为 0.963s 和 1.797s；此后， t_1 和 t_2 的增幅均较快， $k=8$ 时， t_1 和 t_2 的取值分别达到了 33.278s 和 86.658s，远大于 $k=5$ 时的取值。



(a) 构造代理多项式的时间随阶数的变化 (b) 基于代理多项式求解 10000 次的时间随阶数的变化

图 4.6 稀疏网格插值法的计算时间随插值阶数的变化

综合上述分析，对于 7075-T6 铝合金板 I 型裂纹的损伤预后不确定性模型，插值阶数 $k=5$ 对应的代理多项式在计算精度和计算效率上均是十分理想的。

此外，直接基于模型求解 10000 个样本点的时间为 9.1034s，而构建并利用 $N_5(\boldsymbol{\omega})$ 求解 10000 个样本点的时间为 2.76s (t_1+t_2)，计算效率约为直接求解的 3 倍。代理多项式的这一优势将在更为复杂的土木工程结构的损伤预后中发挥重要的作用。因此本文选择 $N_5(\boldsymbol{\omega})$ 作为剩余疲劳寿命 $N(\boldsymbol{\omega})$ 在不确定性空间 $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 上的代理多项式。

随机配点法的后处理中将基于代理多项式 $N_5(\boldsymbol{\omega})$ ，依据材料参数 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 的统计分布类型，利用 Monte Carlo 随机采样技术评估剩余疲劳寿命的统计特征。下文将计算 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 服从对数正态分布下的剩余疲劳寿命。

4.3.3 剩余疲劳寿命评估

上文假定材料参数 $\Delta K_{th} \sim N(0.8, 0.011)$ 、 $K_c \sim N(32, 2.72)$ ， $\sigma_y \sim N(520, 20.32)$ 。考虑 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 是相互独立的，则后处理中需分别对 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 进行随机采样。采样时，选择位于不确定性空间 $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 内的样本点 m_i 。

(1) Monte Carlo 法收敛效率

首先研究正态分布参数假定下基于 $N_5(\boldsymbol{\omega})$ 计算的 Monte Carlo 法的收敛效

率，以确定合适的随机样本数目。剩余疲劳寿命 N 的均值和标准差随样本数目的变化如图 4.7 所示。图中，样本点数目间隔为 100。当样本数目在 6000 之上时， N 的均值基本集中在区间 $[2.68 \times 10^4, 2.685 \times 10^4]$ 之内，标准差主要集中在区间 $[1300, 1350]$ 之内。因此，本文将选取 10000 个样本点的计算结果用于分析。

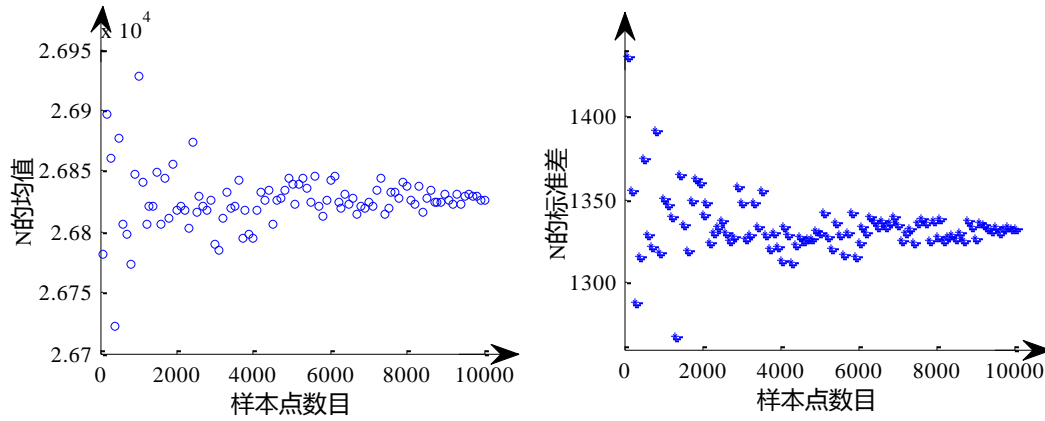


图 4.7 随机配点法正态分布参数假定下 N 的均值和标准差随样本数目的变化

(2) 剩余疲劳寿命统计特征

Monte Carlo 法采样 10000 次的剩余疲劳寿命 N 和 $\lg N$ 的频数统计及其相应的正态分布曲线如图 4.8 所示。从图中可以看出， N 和 $\lg N$ 的统计分布与正态分布十分类似。剩余疲劳寿命 N 的均值为 26801，标准差为 1325.4，取值范围为 $[21665, 30486]$ ；相应的 $\lg N$ 的均值为 10.195，标准差为 0.0496，取值范围为 $[9.985, 10.325]$ 。具有 95% 可靠度的剩余疲劳寿命 N 为 24610。

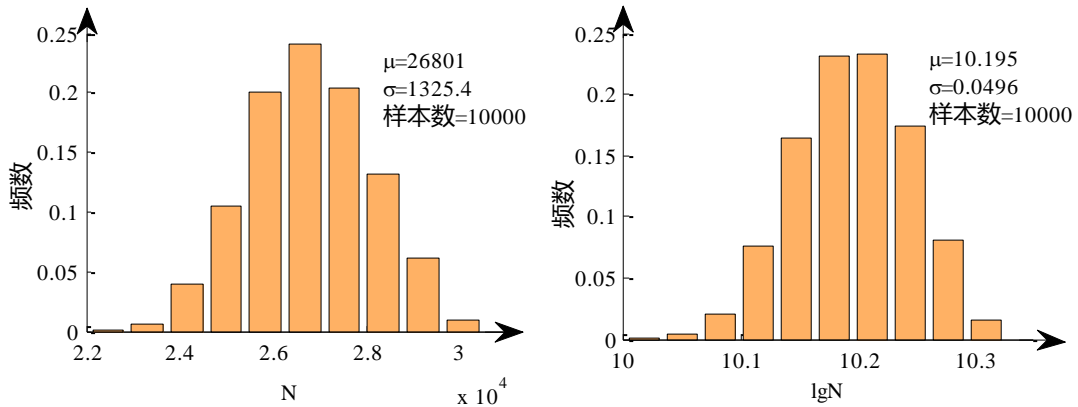


图 4.8 随机配点法正态分布参数假定下 N 和 $\lg N$ 的频数统计分布

因此，本文将检验 N 的四种可能分布类型：均匀分布、正态分布、两参数对数正态分布和三参数对数正态分布。其中，三参数对数正态分布的概率密度函数为：

$$f[\lg(N - N_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{[\lg(N - N_0) - \mu]^2}{2\sigma^2}}, \quad 0 < N_0 < \min(N). \quad (4.13)$$

式中，参数 N_0 、 μ 和 σ 的评估方法详见文献^[99]，这里不再赘述。因样本数目较大，故采用 Kolmogorov-Smirnov (K-S) 检验评估统计类型。

(3) K-S 检验剩余疲劳寿命分布类型

K-S 检验是以样本数据的累计频率分布与特定理论分布（上述四种待检验分布类型）比较，若两者的差距很小，则推论样本服从该特定理论分布。对于任意一组给定的样本 x_1, \dots, x_n ，K-S 检验的统计量为：

$$D = \sup_x |F_n(x) - F(x)|. \quad (4.14)$$

其中， n 为样本数目； $F(x)$ 为特定理论分布的分布函数； $F_n(x)$ 为给定样本的累计频率分布。当 $D > D(n, \alpha)$ 时，则认为样本不取自该特定理论分布，反之，则认为样本取自该特定理论分布。

本文取检验水平 $\alpha = 0.05$ ，查文献^[100]给出的 K-S 检验临界表得 $D(10000, 0.05) = 0.0136$ ，检验发现 N 不服从均匀分布、正态分布和两参数对数正态分布， N 服从三参数对数正态分布。详细参数评估结果和 K-S 检验结果如表 4.6 所示。

表 4.6 随机配点法正态分布参数假定下 N 的分布类型检验结果

分布类型	参数估计	K-S 检验量 D	K-S 检验量临界值 $D(10000, 0.05)$	显著性水平	结果
均匀分布	$a=21665,$ $b=30486$	0.289	0.0136	0	不服从
正态分布	$\bar{X} = 26801$ $S = 1325.4$	0.017	0.0136	0.008	不服从
两参数对数正态分布	$\bar{X} = 4.428$ $S = 0.0216$	0.016	0.0136	0.012	不服从
三参数对数正态分布	$N_0 = 24306$ $\bar{X} = 4.408$ $S = 0.0135$	0.007	0.0136	0.689	服从

图 4.9(a)和 4.9(b)分别给出了 N 的概率密度曲线和累积分布曲线，图 4.10(a)和 4.10 (b) 分别给出了 N 与相应三参数对数正态分布的概率密度曲线和累积分布曲线的对比情况。可以看出， N 与三参数对数正态分布的吻合程度很高。其中，三参数对数正态分布的概率密度函数的形式不同于公式 (4.13)，如公式 (4.15)

所示。

$$f(N) = \frac{1}{(N - N_0) \ln 10} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{[\lg(N - N_0) - \mu]^2}{2\sigma^2}} \quad (4.15)$$

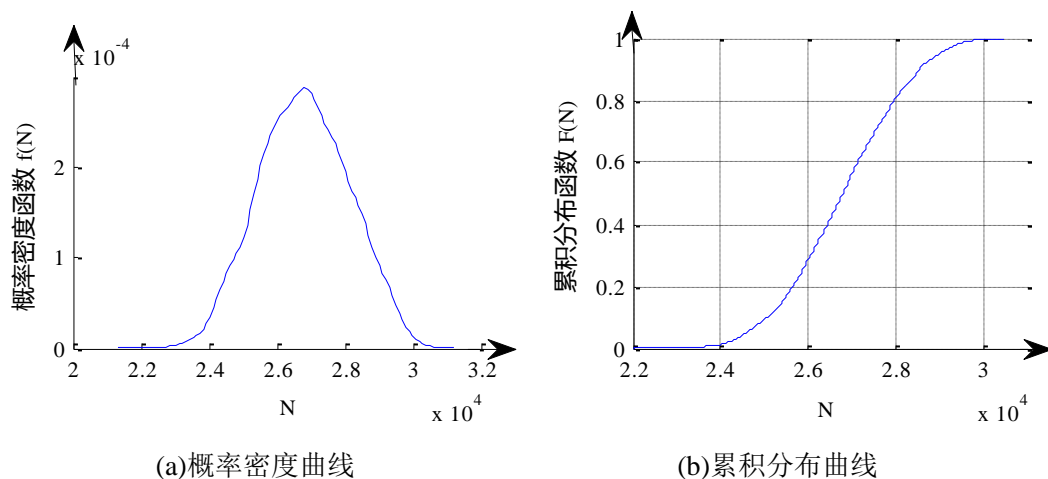


图 4.9 随机配点法下 N 的概率统计

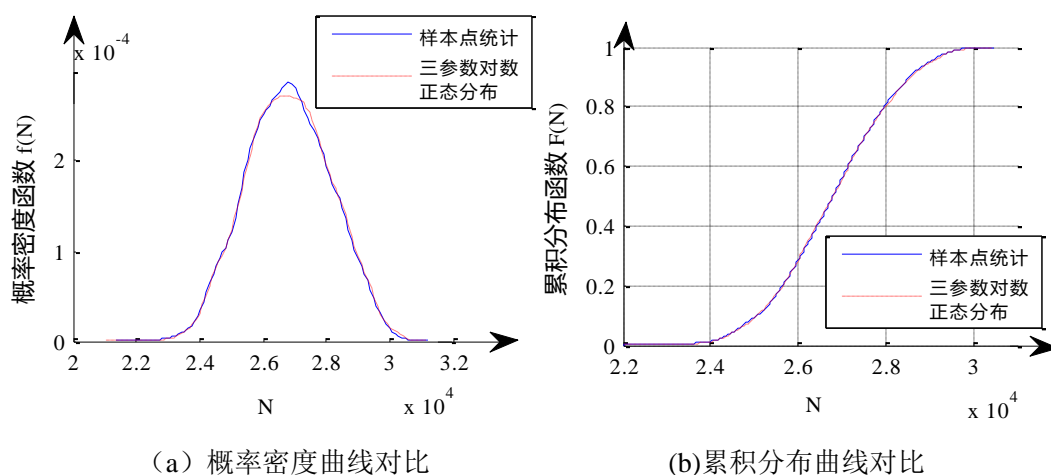


图 4.10 随机配点法下 N 的概率统计与三参数对数正态分布的比较

综合上述分析，对比随机配点法数值计算的 N 的分布类型与实验结果均得出 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 服从对数正态分布，更进一步证明：材料参数 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 服从对数正态分布。此外，正态分布参数假定下随机配点法计算的具有 95% 可靠度的 $N(24610)$ 处于 7 组实验值结果之间 (22600~26900)，数值误差不超过 5%，由此说明随机配点法的计算结果是可靠的。

4.4 本章小结

本章主要基于小时间尺度裂纹扩展模型和随机配点法不确定代理模型,对常幅加载下金属板疲劳损伤预后进行不确定性分析。

(1) 以 7075-T6 铝合金板作为研究对象,基于 Luzizi 疲劳裂纹扩展实验数据,对小时间尺度公式的不确定性材料参数 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 统计评估,查阅相关文献,首先假定工程中常用的 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 的分布类型:对数正态分布。

(2) 综合考虑材料参数的分布类型的信息,确定 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 的量化区间分别为 [0.767, 0.833]、[23.84, 40.16] 和 [459.04, 580.96], 并提出考虑 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 为不确定性变量 $\boldsymbol{\omega}$ 的金属板疲劳损伤预后模型。

(3) 利用随机配点法构建金属板剩余疲劳寿命 $N(\boldsymbol{\omega})$ 在不确定性空间 $I_{\boldsymbol{\omega}}$ 中的最优代理多项式 $N_5(\boldsymbol{\omega})$, 并在后处理中基于 $N_5(\boldsymbol{\omega})$ 考虑 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 的相关性,利用 Monte Carlo 随机采样 10000 次,计算参数服从正态分布时 $N(\boldsymbol{\omega})$ 的均值、标准差、取值范围和概率分布曲线。

(5) 利用 K-S 检验 $N(\boldsymbol{\omega})$ 可能的概率分布类型,得出正态分布参数假定下 $N(\boldsymbol{\omega})$ 服从三参数对数正态分布 ($N_0=24306$, $\bar{X}=4.408$, $S=0.0135$)。

(6) 对比 $N(\boldsymbol{\omega})$ 的数值计算结果与实验数值,对数正态分布参数假定下基于随机配点法的具有 95% 可靠度的 $N(24610)$ 处于 7 组实验值结果之间 (22600~26900), 与实验得出的数值相差在 5% 以内,由此说明随机配点法的计算是可靠的。

第 5 章 随机变幅加载下金属板疲劳损伤不确定性分析

5.1 引言

工程材料和结构中的疲劳裂纹增长是一个复杂的随机过程。已经观察到,即使是相同的试件在相同的加载条件和环境下的结果仍存在很大的离散性^[101-104]。这可能是由于材料性能的不确定性,生产过程,还有残余应力等引起的。更重要的是,现实的结构承受的是随机变幅荷载而且可能不同于设计荷载谱。加载不确定性导致了现实工作条件下的不确定性在,让疲劳寿命预测变得非常困难^[105,106]。

但大多数概率分析主要集中在材料变异性,只有极少数研究集中在未知/随机荷载的不确定性。对于疲劳裂纹增长的复杂统计分析,在类似条件下的试件测试是必要的。由于疲劳测试的时间成本和预算成本都很高,已有文献中公开的相关数据非常有限,基本都是常幅荷载下的数据^[102,107]。而一般性的随机荷载数据很少能找到。

本章仍以上文介绍的实验中的 7075-T6 铝合金板为研究对象,如图 4.1 所示,仍选用小时间公式描述金属板疲劳损伤裂纹扩展过程,仍选用随机配点法进行不确定性分析。模型中参数的具体取值详见第四章,这里不再赘述。第四章中得出材料参数 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 均服从对数正态分布,且相互独立,故本章仅研究 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 服从对数正态分布时,在随机变幅加载下雨流计数转化法与小时间尺度直接积分法在金属板疲劳损伤不确定分析中的不同。

5.2 小时间尺度直接积分法下的疲劳损伤不确定性分析

经典的疲劳荷载通常都是具有循环周期,为了说明小时间尺度模型的适用性,本文构造了一组无定周期的荷载(5.1),如图 5.1 所示:

$$\sigma(t) = 20\sin(\cos(2t) + \pi \cdot t) + 20\sin(2t) + 46.6 \quad (5.1)$$

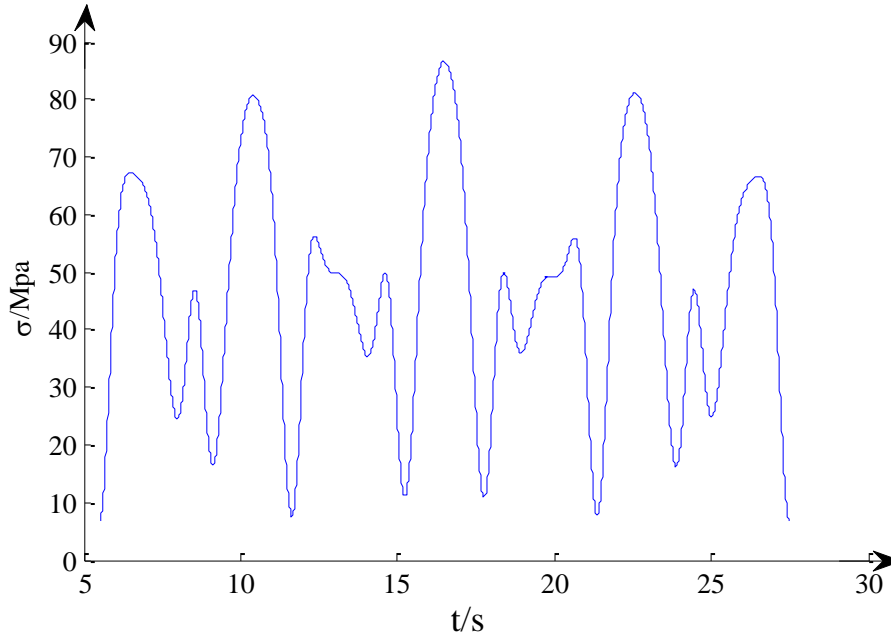


图 5.1 荷载时间历程

本章假定小时间尺度公式中的材料参数 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 仍然满足： $\Delta K_{th} \sim N(0.8, 0.011^2)$ ， $K_c \sim N(32, 2.72^2)$ ， $\sigma_y \sim N(520, 20.32^2)$ 。因 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 是相互独立的，故 MC 法的随机抽样过程需考虑三个随机变量的分布类型。本文选取不确定性空间 I_{σ} 中的样本点。初始裂纹扩展长度为 0.011m，计算因小时间尺度直接积分法耗时较长，在本例中选取了 1000 个样本点，在 30000s 内得到了所有点的完整裂纹扩展曲线 t/a ，如下图所示。

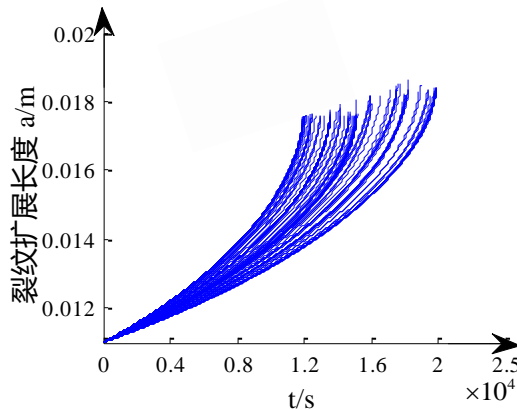


图 5.2 直接积分法下疲劳裂纹扩展

从图中可以看出，裂纹扩展曲线存在的较大的离散型，这是由于材料参数和荷载的不确定性造成的。它们疲劳裂纹扩展的终止长度在 0.0172m~0.0182m 之间，疲劳寿命在 14234s~19397s 之间。

(1) 小时间尺度直接积分法收敛效率

该法计算的疲劳寿命 t 的均值和标准差随样本数目的变化如图 5.3 所示。图中，样本点数目的间隔为 10。从图中可以看出，当样本数目大于 800 时， t 的均

值和标准差基本恒定。均值的取值区间为 $[1.72 \times 10^4, 1.78 \times 10^4]$ ，标准差的取值区间为 $[600, 1200]$ 。

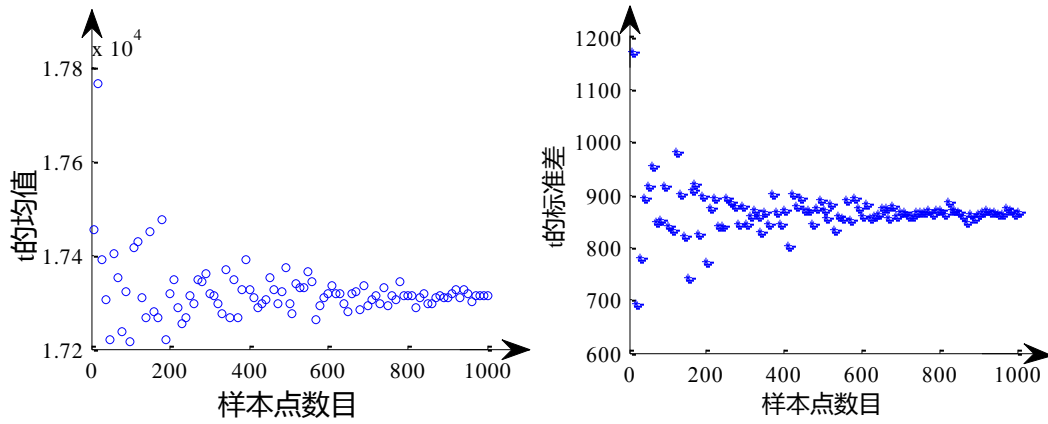


图 5.3 小时间尺度直接积分法下 t 的均值和标准差随样本数目的变化

(2) 疲劳寿命 t 统计特征

对 K_{th} 、 K_C 和 σ_y 进行 1000 次随机采样。基于小时间尺度直接积分法的 N 数统计分布分别如图 5.4 所示。图中给出了与 t 和 $\lg t$ 具有相同均值和标准差的正态分布的频数曲线，可以看出， t 和 $\lg t$ 的统计分布十分类似正态分布曲线。 t 的均值为 17313s，标准差为 866.75，取值区间为 $[1.4234 \times 10^4, 1.9397 \times 10^4]$ 。 $\lg t$ 的均值为 4.2378s，标准差为 0.0219，取值区间为 $[4.153, 4.288]$ 。具有 95%可靠度的裂纹扩展长度 t 为 1.588×10^4 s。

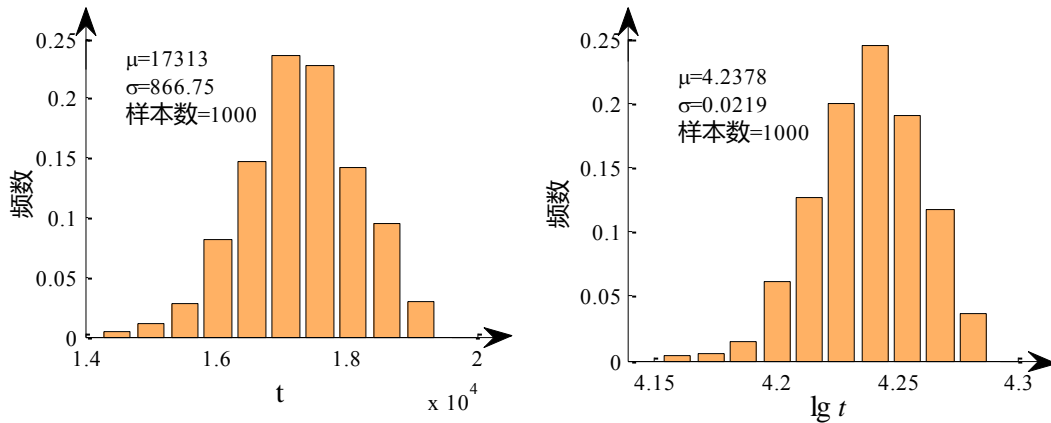


图 5.4 小时间尺度直接积分法下 t 和 $\lg t$ 的频数统计分布

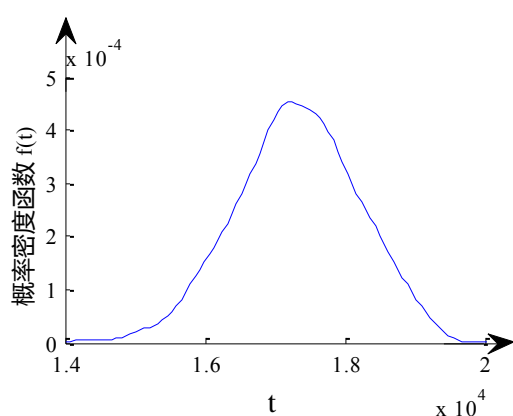
(3) K-S 检验剩余疲劳寿命分布类型

这里对 t 的三种可能分布类型进行检验：均匀分布、正态分布、两参数对数正态分布。本文选用 Kolmogorov-Smirnov (K-S) 检验方法评估小时间尺度直接

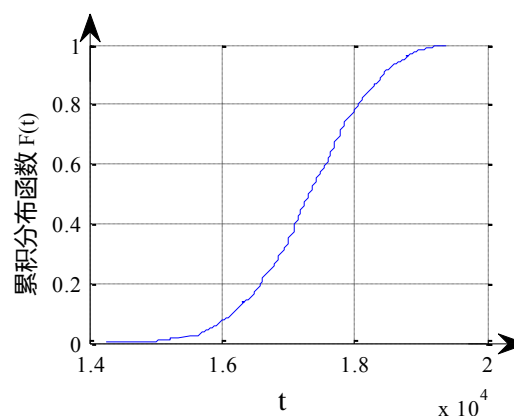
积分法随机采样 1000 次的剩余疲劳寿命 t 的分布类型。K-S 检验的结果如表 5.1 所示。从表中可以看出, t 不服从均匀分布, t 与正态分布和两参数对数正态分布的吻合程度较高。图 5.5, 图 5.6 分别给出了小时间尺度直接积分法下 t 和 lgt 的概率统计与相应正态分布和两参数对数正态分布的比较, 可以发现, 两者的差异非常小。

表 5.1 小时间尺度直接积分法下 t 的分布类型检验结果

分布类型	参数估计	K-S 检验量 D	K-S 检验量临界值 $D(1000,0.05)$	显著性水平	结果
均匀分布	$a=14234$ $b=19397$	0.279	0.0136	0	不服从
正态分布	$\bar{X}=17313$ $S=866.75$	0.020	0.0136	0.806	服从
两参数对数正态分布	$\bar{X}=4.2378$ $S=0.0219$	0.030	0.0136	0.343	服从

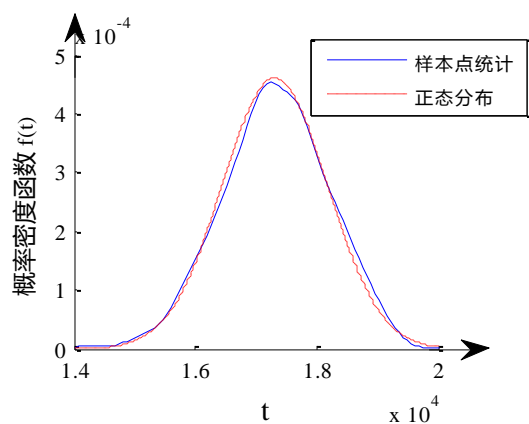


(a) 概率密度曲线

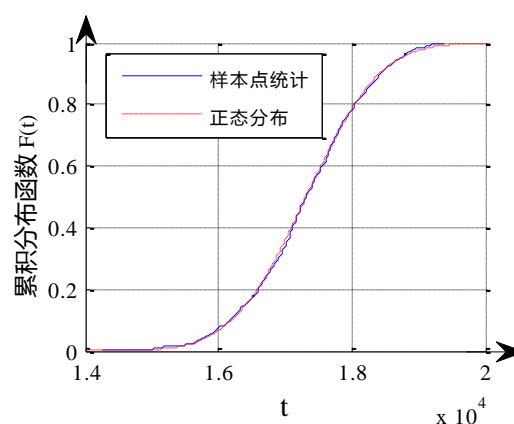


(b) 累积分布曲线

图 5.4 小时间尺度直接积分法下 t 的概率统计

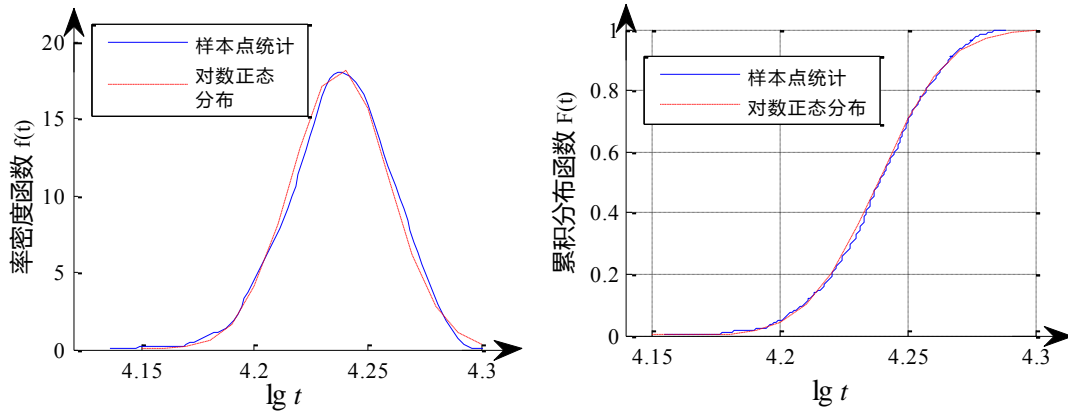


(a) 概率密度曲线对比



(b) 累积分布曲线对比

图 5.6 小时间尺度直接积分法下 t 的概率统计与正态分布的比较



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

图 5.6 小时间尺度直接积分法下 $\lg t$ 的概率统计与两参数对数正态分布的比较

(4) 裂纹扩展长度 a 统计特征

为了便于数据统计，前面第四章是控制裂纹终止长度，比较疲劳寿命 N ；在本章中，本人将控制疲劳裂纹扩展时间 t (或者 N)，比较裂纹扩展长度 a 。由于小时间尺度直接积分法计算时间长，所以在本章中将选取 3 个裂纹扩展时间点 5000s、10000s 和 13000s，后文不再赘述。对 K_h 、 K_C 和 σ_y 进行 1000 次随机采样。基于小时间尺度直接积分法的 t 数统计分布分别如图 5.7~图 5.9 所示。

裂纹扩展时间为 5000s 时 a 的均值为 0.0120 m，标准差为 8.5×10^{-5} ，取值区间为 [0.0118, 0.0123]； $\lg a$ 的均值为 -1.9204，标准差为 0.0031，取值区间为 [-1.925, -1.9]；具有 95% 可靠度的裂纹扩展长度 a 为 0.01188m。

裂纹扩展时间为 10000s 时 a 的均值为 0.0132 m，标准差为 2.51×10^{-4} ，取值区间为 [0.0126, 0.0140]； $\lg a$ 的均值为 -1.8784，标准差为 0.0082，取值区间为 [-1.8985, -1.8525]；具有 95% 可靠度的裂纹扩展长度 a 为 0.01282m；。

裂纹扩展时间为 13000s 时 a 的均值为 0.0141 m，标准差为 2.51×10^{-4} ，取值区间为 [0.0128, 0.0158]； $\lg a$ 的均值为 -1.8516，标准差为 0.0162，取值区间为 [-1.8920, -1.8019]；具有 95% 可靠度的裂纹扩展长度 a 为 0.01324m；。

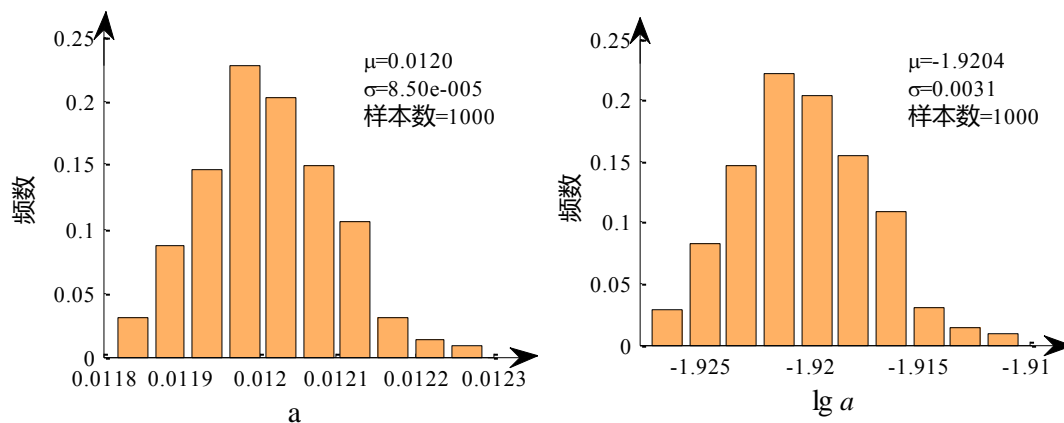


图 5.7 小时间尺度直接积分法下 a 和 $\lg a$ 的频数统计分布(5000s)

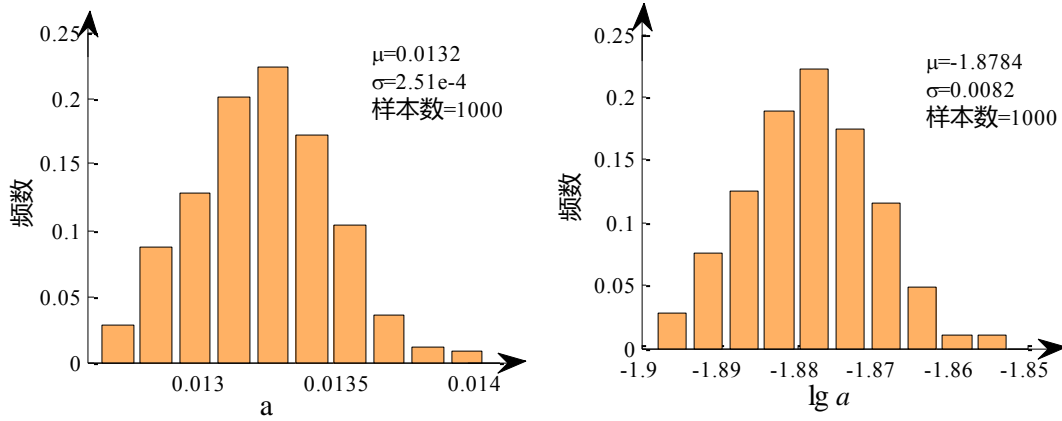


图 5.8 小时间尺度直接积分法下 a 和 $lg a$ 的频数统计分布 (10000s)

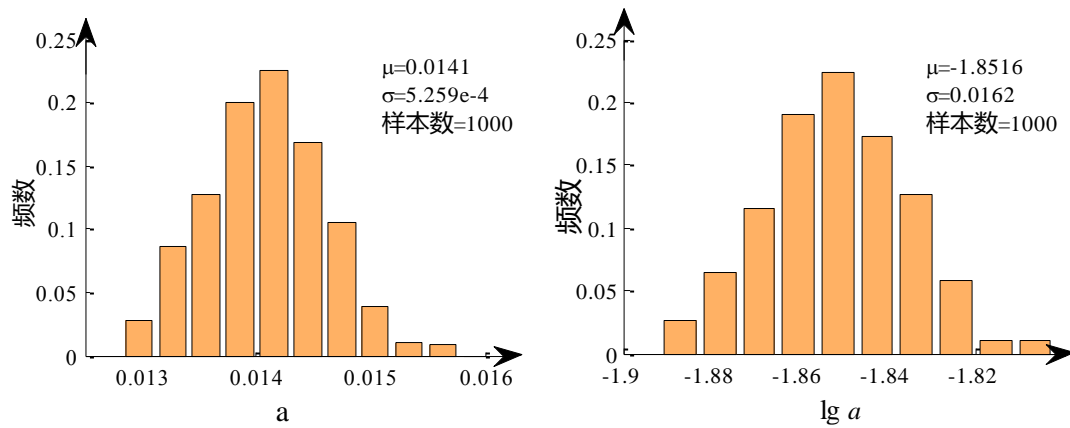


图 5.9 小时间尺度直接积分法下 a 和 $lg a$ 的频数统计分布(13000s)

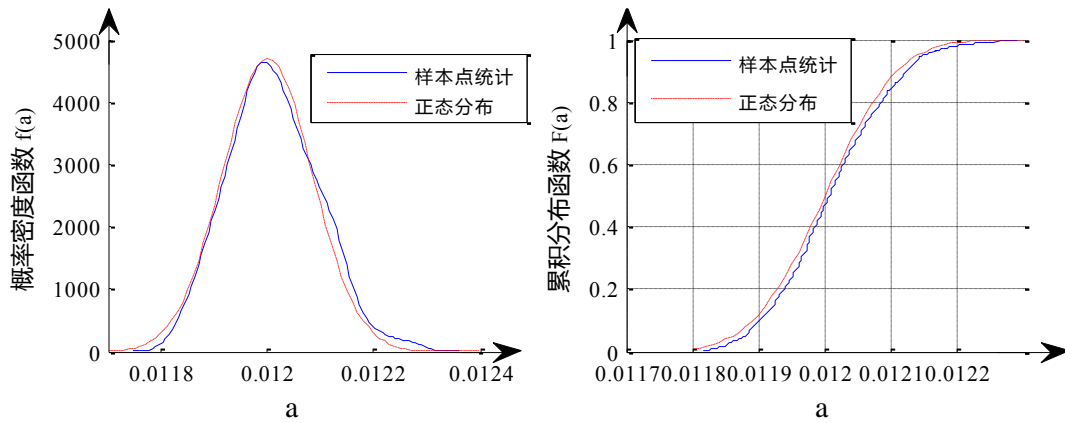
图中给出了与 a 和 $lg a$ 具有相同均值和标准差的正态分布的频数曲线，可以看出， a 和 $lg a$ 的统计分布都十分类似正态分布曲线。

(5) K-S 检验疲劳裂纹扩展分布类型

这里对 a 的三种可能分布类型进行检验：均匀分布、正态分布、两参数对数正态分布。本文选用 Kolmogorov-Smirnov (K-S) 检验方法评估小时间尺度直接积分法随机采样 1000 次的裂纹扩展长度 a 的分布类型。K-S 检验的结果如表 5.2 所示。从表中可以看出， a 不服从均匀分布， a 与正态分布和两参数对数正态分布的吻合程度较高。图 5.10~图 5.15 分别给出了小时间尺度直接积分法下 a 和 $lg a$ 的概率统计与相应正态分布和两参数对数正态分布的比较，可以发现，两者的差异非常小。

表 5.2 小时间尺度直接积分法下 a 的分布类型检验结果

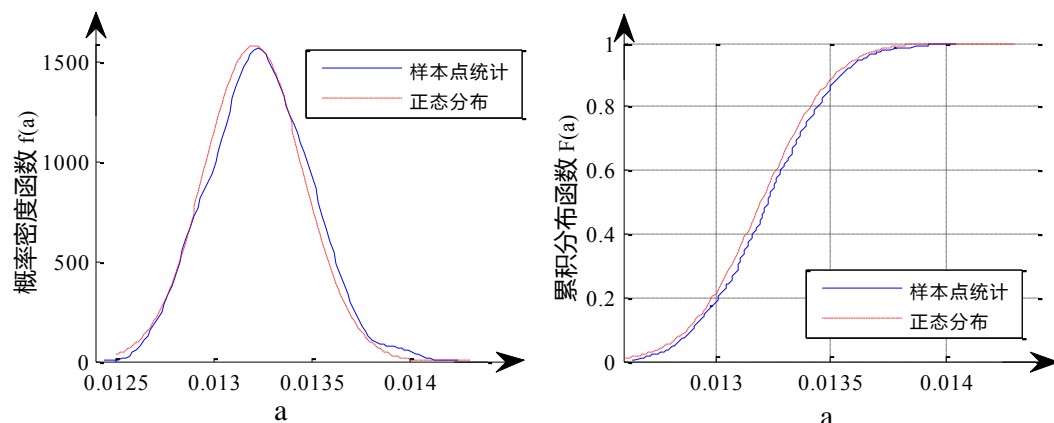
裂纹时间 t	分布类型	参数估计	K-S 检验量 D	K-S 检验量临界值 $D(10000,0.05)$	显著性水平	结果
5000s	均匀分布	$a=0.0118145$ $b=0.0122905$	0.256	0.0136	0	不服从
	正态分布	$\bar{X}=0.0120$ $S=8.5\times 10^{-5}$	0.030	0.0136	0.317	服从
	两参数对数正态分布	$\bar{X}=-1.9204$ $S=0.0031$	0.029	0.0136	0.374	服从
10000s	均匀分布	$a=0.0126338$ $b=0.0140459$	0.30	0.0136	0	不服从
	正态分布	$\bar{X}=0.0132$ $S=2.51\times 10^{-4}$	0.256	0.0136	0.875	服从
	两参数对数正态分布	$\bar{X}=-1.8784$ $S=0.0082$	0.029	0.0136	0.966	服从
13000s	均匀分布	$a=0.011986$ $b=0.012552$	0.30	0.0136	0	不服从
	正态分布	$\bar{X}=0.0141$ $S=5.26\times 10^{-4}$	0.019	0.0136	0.873	服从
	两参数对数正态分布	$\bar{X}=-1.9516$ $S=0.0162$	0.016	0.0136	0.960	服从



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

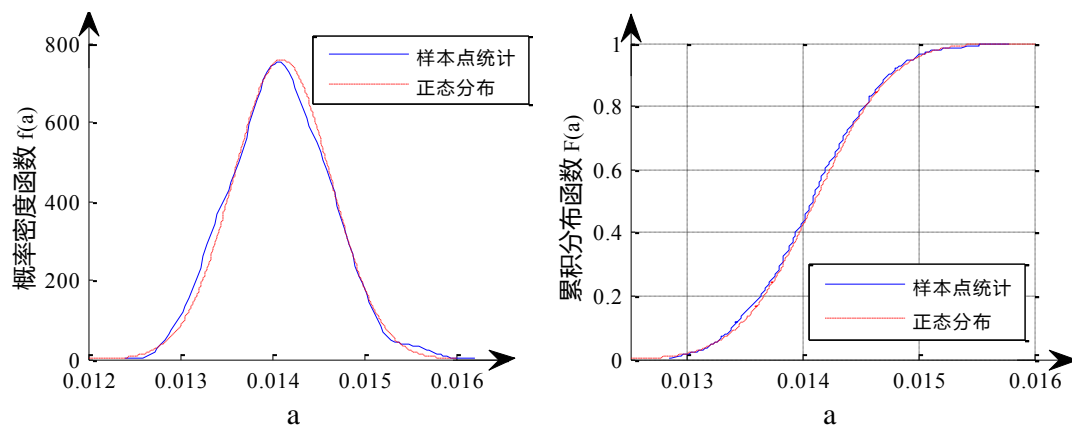
图 5.10 小时间尺度直接积分法下 a 的概率统计与正态分布的比较(5000s)



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

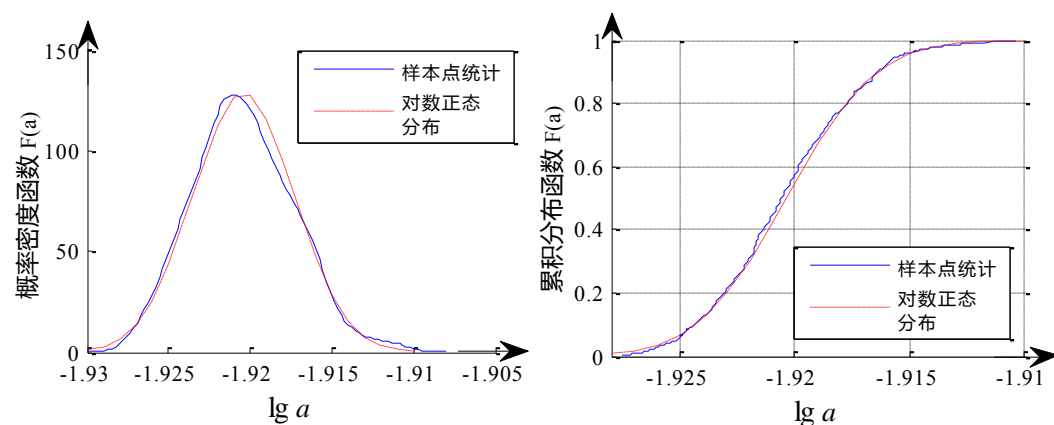
图 5.11 小时间尺度直接积分法下 a 的概率统计与正态分布的比较(10000s)



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

图 5.12 小时间尺度直接积分法下 a 的概率统计与正态分布的比较(13000s)



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

图 5.13 小时间尺度直接积分法下 $\lg a$ 的概率统计与两参数对数正态分布的比较(5000s)

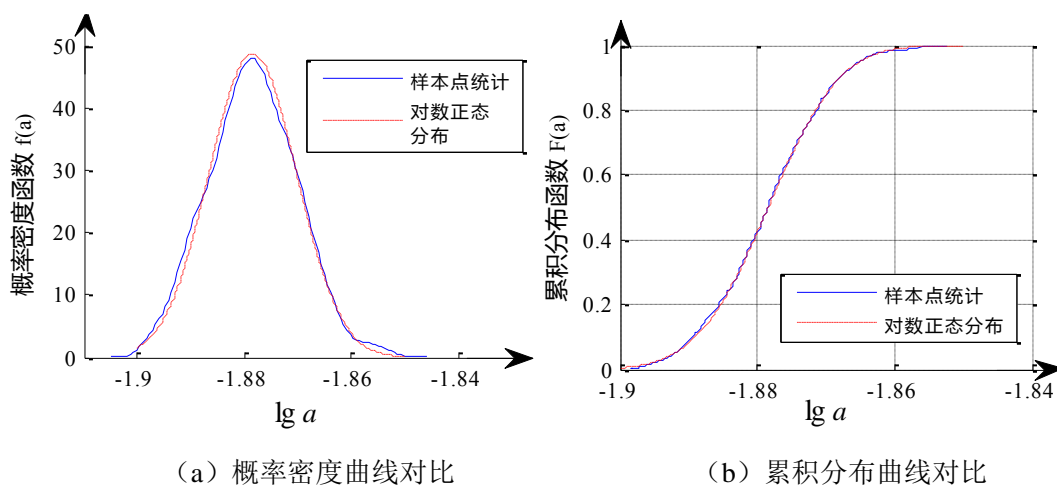


图 5.14 小时间尺度直接积分法下 $\lg a$ 的概率统计与两参数对数正态分布的比较(10000s)

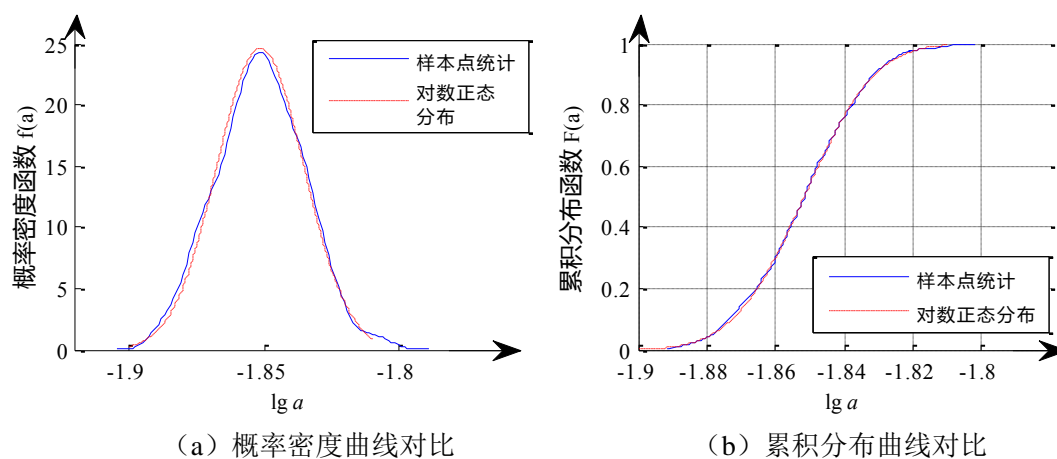


图 5.15 小时间尺度直接积分法下 $\lg a$ 的概率统计与两参数对数正态分布的比较(13000s)

5.3 雨流计数转化法的疲劳损伤不确定性分析

和第二章一样，进行通过雨流计数法对随机荷载进行处理，经过 matlab 程序运算，当时间历程从 5.5s 到 27.5s 时，得到结果如图 5.16 和表 5.3 所示：

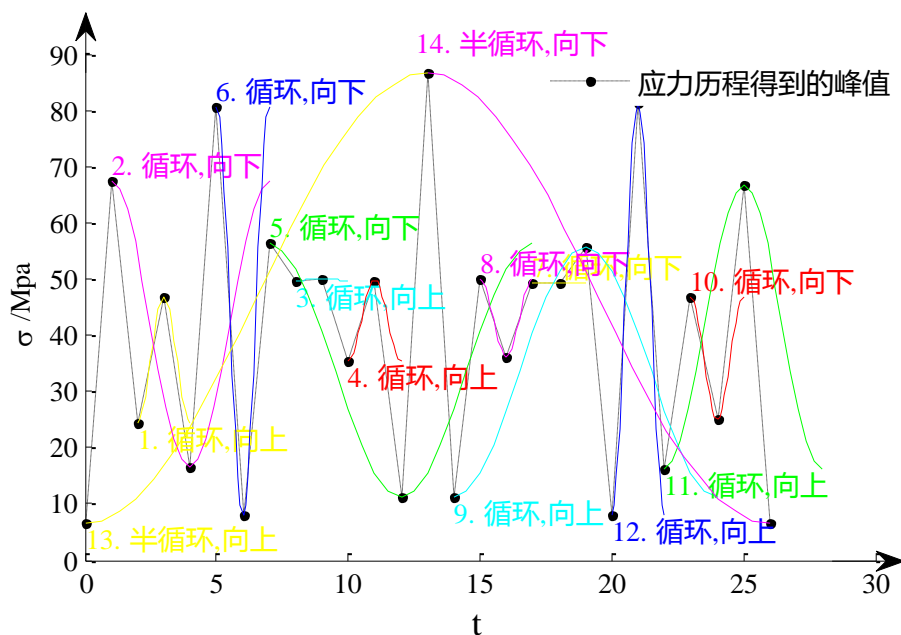


图 5.16 雨流计数法循环示意图

表 5.3 雨流计数法处理结果数据表

编号	幅值	均值	循环/半循环	循环开始	循环时间
1	11.24	35.70	1.00	2.00	2.00
2	25.39	41.93	1.00	1.00	6.00
3	0.01	49.81	1.00	8.00	2.00
4	7.24	42.57	1.00	10.00	2.00
5	22.68	33.67	1.00	7.00	10.00
6	36.53	44.15	1.00	5.00	2.00
7	0.07	49.19	1.00	17.00	2.00
8	7.05	42.97	1.00	15.00	2.00
9	22.59	33.38	1.00	14.00	10.00
10	11.06	35.95	1.00	23.00	2.00
11	25.22	41.44	1.00	22.00	6.00
12	36.72	44.46	1.00	20.00	2.00
13	40.00	46.60	0.50	0.00	26.00
14	40.00	46.60	0.50	13.00	26.00

为了便于比较，本节中和上节一样，裂纹扩展的时间点分别取为5000s，10000s和13000s，同理对其进行matlab雨流计数法处理，然后对结果进行统计分析，可以得到相应的幅值统计直方图、均值统计直方图和雨流法矩阵如图5.17~图5.19所示（仅以5000s为例，10000s和13000s统计结果类似）。

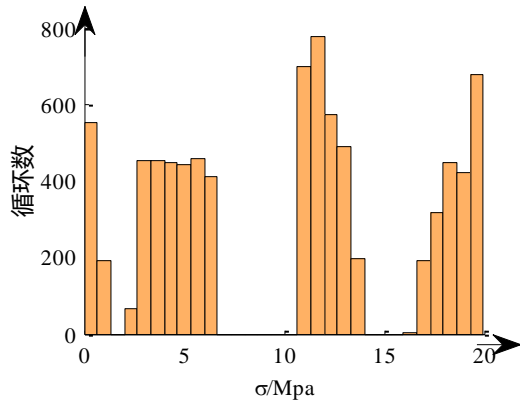


图5.17雨流计数法幅值统计直方图

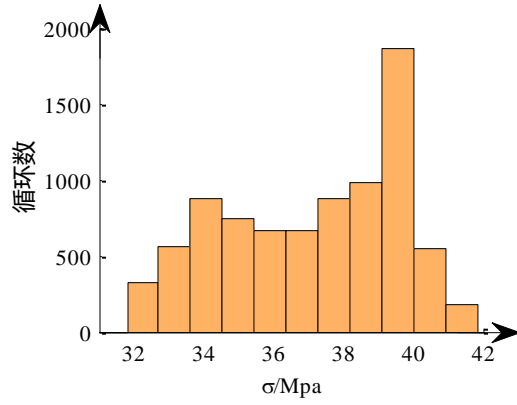


图5.18雨流计数法均值统计直方图

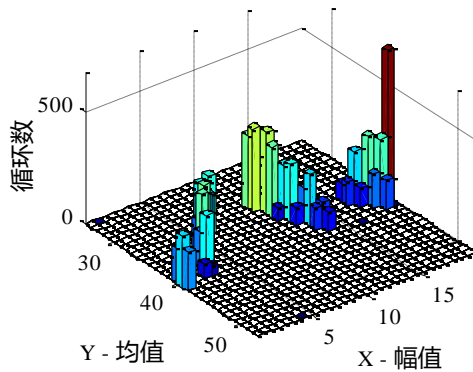
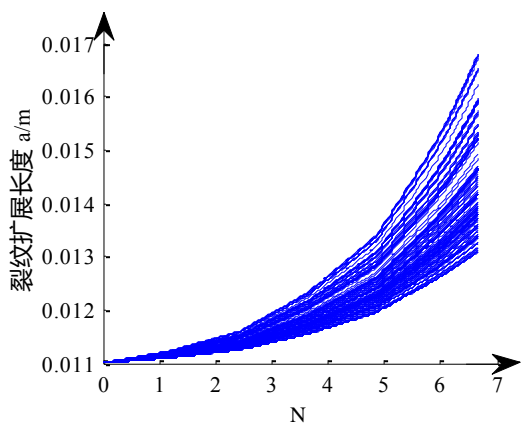


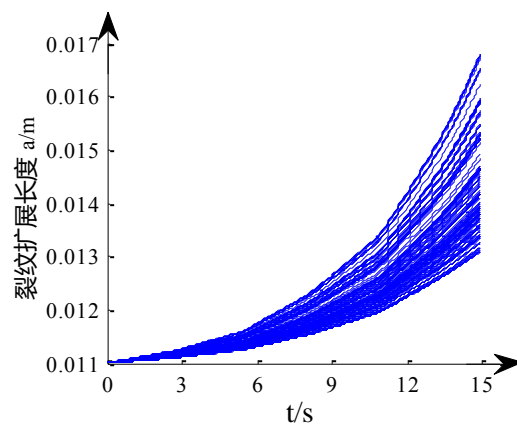
图 5.19 雨流计数法矩阵

(1) 裂纹扩展图

和前面一样,选取了 1000 个样本点,得到的 1000 组裂纹扩展 N/a 如图 5.20(a) 所示,再把循环转化成时间,可以轻易得到图 5.20(b)裂纹扩展图。



(a) 雨流计数转化法下 N/a 图



(b) 雨流计数转化法下 t/a 图

图 5.20 雨流计数转化法下疲劳裂纹扩展图

(2) 雨流计数转化法收敛效率

该法计算的裂纹扩展长度 a 的均值和标准差随样本数目的变化如图 5.21 所示。图中,样本点数目的间隔为 10。从图中可以看出,当样本数目大于 800 时,

N 的均值和标准差基本恒定。均值的取值区间为 $[0.01219, 0.01227]$ ，标准差的取值区间为 $[7.5 \times 10^{-5}, 9.0 \times 10^{-5}]$ 。

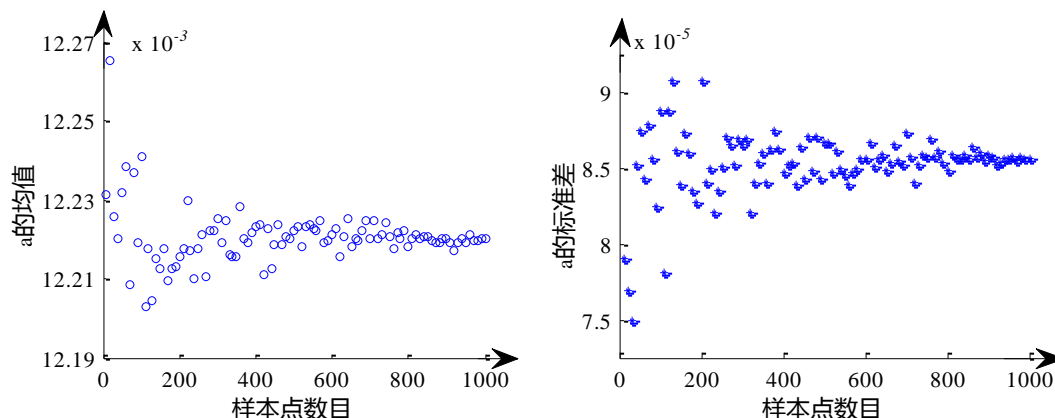


图 5.21 雨流计数转化法下 a 的均值和标准差随样本数目的变化

(3) 基于雨流计数转化法的裂纹扩展长度 a 的概率特征

随机采样 1000 次的 a 和 $\lg a$ 的频数统计分布分别如图 5.22~图 5.24 所示。当裂纹扩展时间为 5000s 时 a 的均值为 0.0120，标准差为 8.15×10^{-5} ，取值范围为 $[0.0118, 0.0123]$ ； $\lg a$ 的均值为 -1.9205，标准差为 0.0029，取值范围为 $[-1.925, -1.91]$ ；具有 95%可靠度的裂纹扩展长度 a 的值为 0.01188。

当裂纹扩展时间为 10000s 时 a 的均值为 0.0122，标准差为 9.8657×10^{-5} ，取值范围为 $[0.0120, 0.0126]$ ； $\lg a$ 的均值为 -1.9129，标准差为 0.0035，取值范围为 $[-1.925, -1.91]$ ；具有 95%可靠度的裂纹扩展长度 a 的值为 0.01285。

当裂纹扩展时间为 13000s 时 a 的均值为 0.0142，标准差为 3.493×10^{-4} ，取值范围为 $[0.0128, 0.0158]$ ； $\lg a$ 的均值为 -1.8486，标准差为 0.0107，取值范围为 $[-1.8748, -1.815]$ ；具有 95%可靠度的裂纹扩展长度 a 的值为 0.01361。

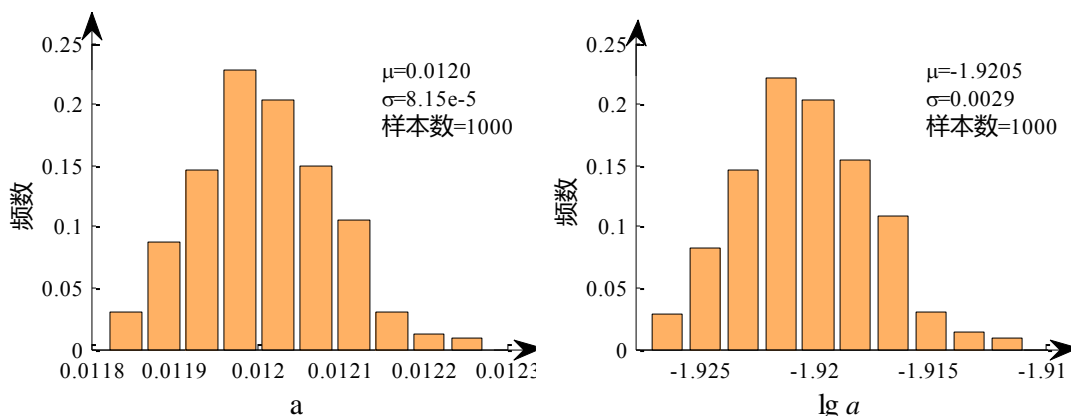


图 5.22 雨流计数转化法下 a 和 $\lg a$ 的频数统计分布(5000s)

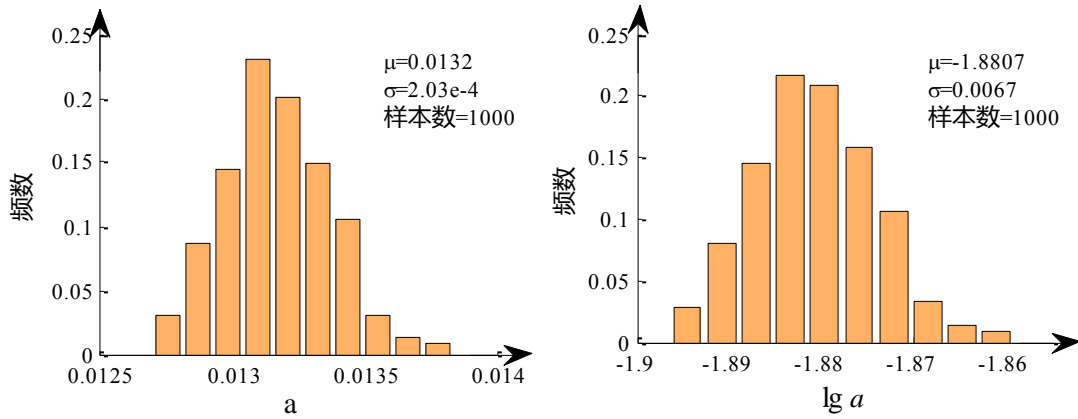


图 5.23 雨流计数转化法下 a 和 $\lg a$ 的频数统计分布(10000s)

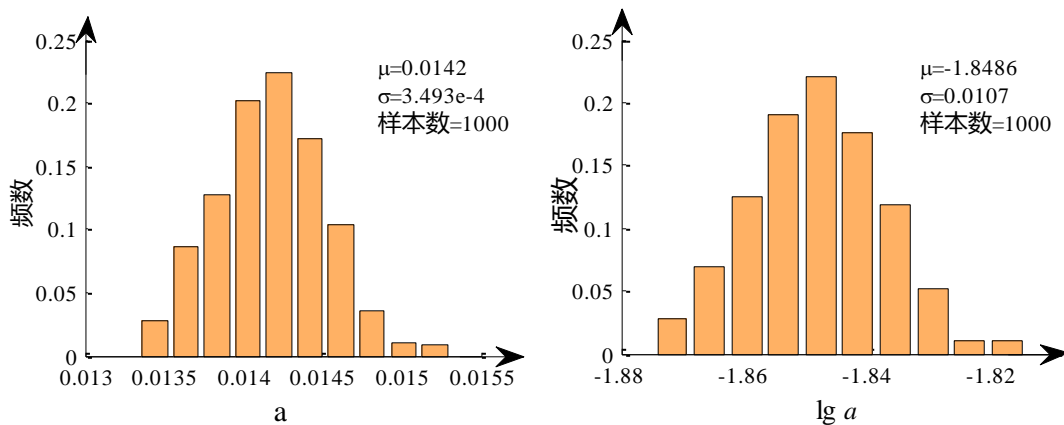


图 5.24 雨流计数转化法下 a 和 $\lg a$ 的频数统计分布(13000s)

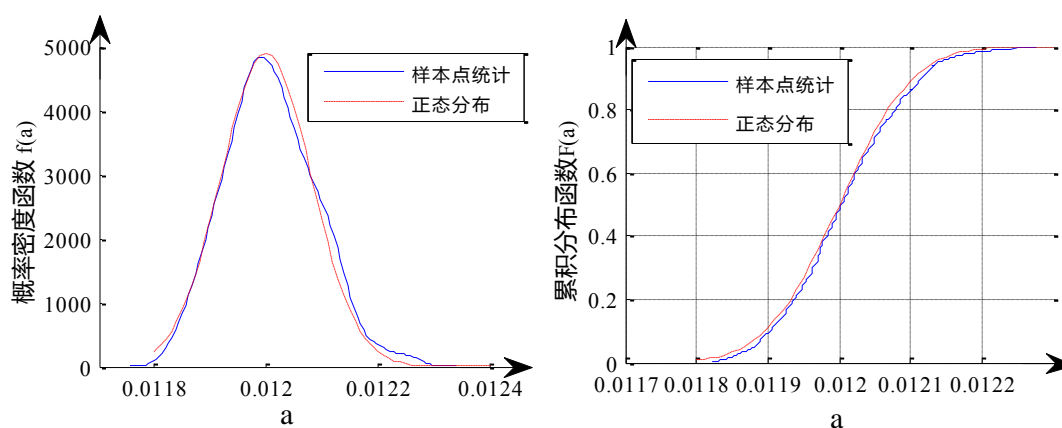
从以上图片中可以看到， a 和 $\lg a$ 的分布都与正态分布十分接近。

(4) K-S 检验疲劳裂纹扩展分布类型

与前文的分析相同，这里将检验裂纹扩展长度 a 的四种可能分布：均匀分布、正态分布、两参数对数正态分布。利用 K-S 检验评估裂纹扩展长度 a 的分布类型，检验发现 a 不服从均匀分布， a 服从正态分布和两参数对数正态分布，具体的检验结果如表 5.3 所示。 a 与相应正态分布的概率密度曲线和累积分布曲线分别如图 5.25~图 5.27 所示，两者吻合得较好。 a 与相应对数正态分布的概率密度曲线和累积分布曲线分别如图 5.28~图 5.30 所示，两者吻合得也好。

表 5.4 雨流计数转化法下 a 的分布类型检验

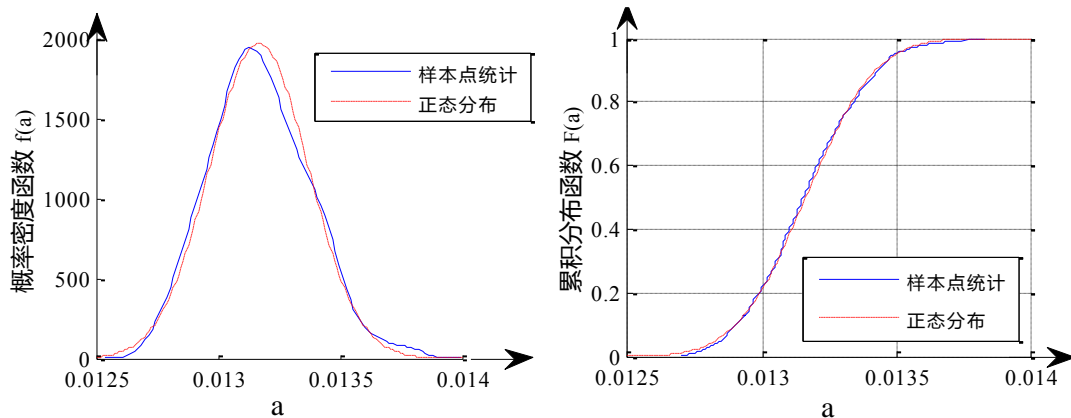
裂纹时间 t	分布类型	参数估计	K-S 检验量 D	K-S 检验量临界值 $D(10000,0.05)$	显著性水平	结果
5000s	均匀分布	$a=0.0118139$ $b=0.0122977$	0.260	0.0136	0	不服从
	正态分布	$\bar{X} = 0.0120$ $S = 8.15 \times 10^{-5}$	0.030	0.0136	0.115	服从
	两参数对数正态分布	$\bar{X} = -1.9205$ $S=0.0029$	0.029	0.0136	0.222	不服从
10000s	均匀分布	$a=0.0126777$ $b=0.0138448$	0.30	0.0136	0	不服从
	正态分布	$\bar{X} = 0.0132$ $S = 2.04 \times 10^{-4}$	0.256	0.0136	0.708	服从
	两参数对数正态分布	$\bar{X} = -1.8806$ $S=0.0067$	0.029	0.0136	0.819	服从
13000s	均匀分布	$a=0.0133417$ $b=0.0153064$	0.252	0.0136	0	不服从
	正态分布	$\bar{X} = 0.0142$ $S = 3.49 \times 10^{-4}$	0.019	0.0136	0.879	服从
	两参数对数正态分布	$\bar{X} = -1.8486$ $S=0.0107$	0.016	0.0136	0.963	服从



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

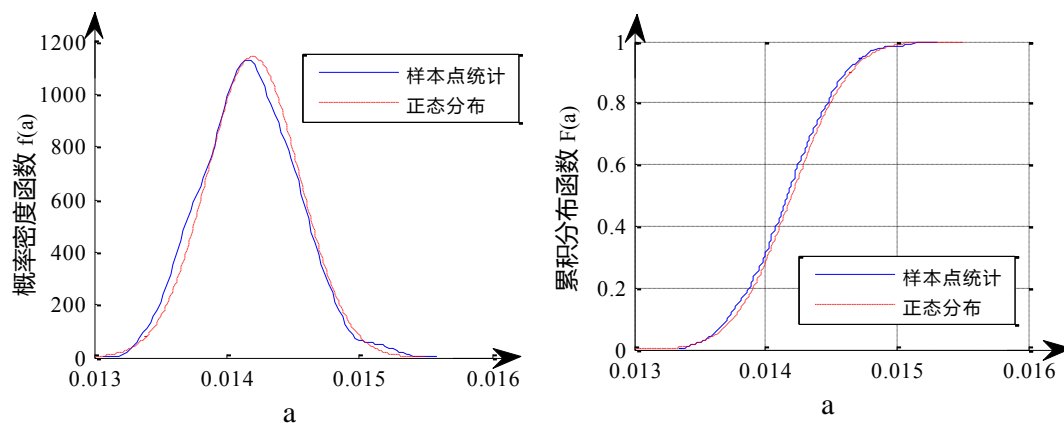
图 5.25 雨流计数转化法下 a 的概率统计与正态分布的比较(5000s)



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

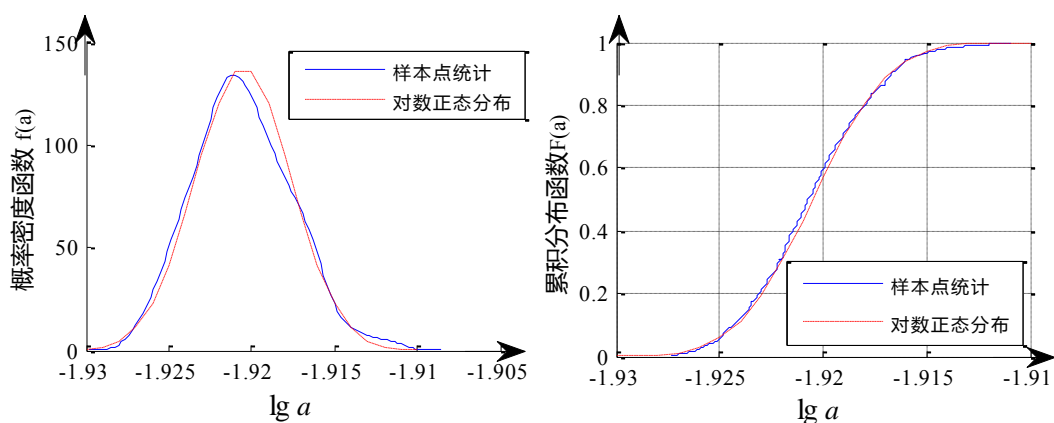
图 5.26 雨流计数转化法下 a 的概率统计与正态分布的比较(10000s)



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

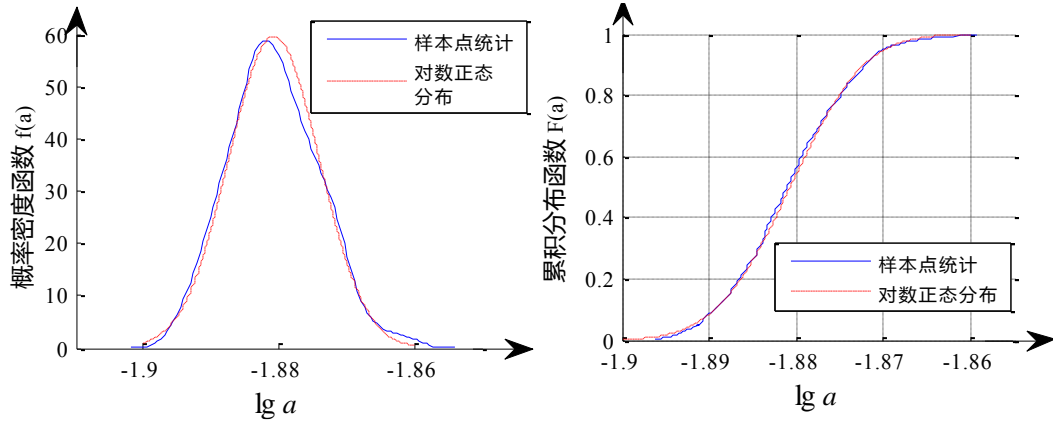
图 5.27 雨流计数转化法下 a 的概率统计与正态分布的比较(13000s)



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

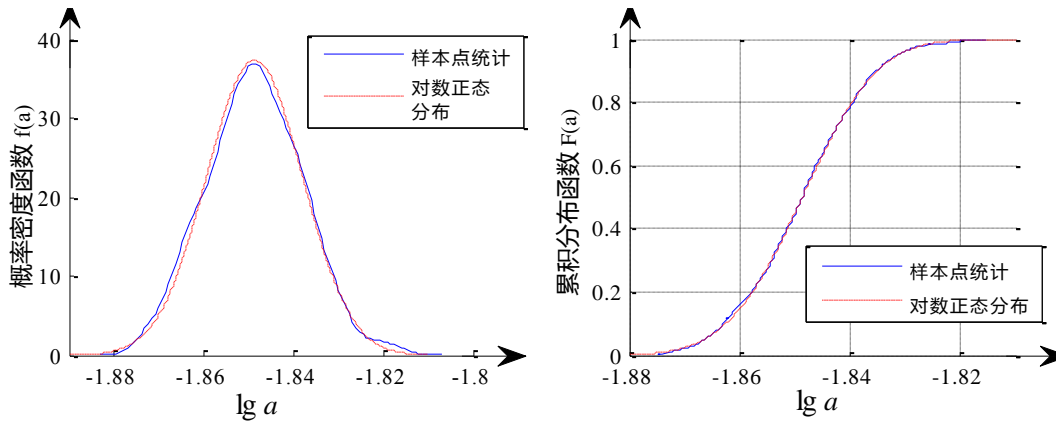
图 5.28 雨流计数转化法下 $\lg a$ 的概率统计与两参数对数正态分布的比较(5000s)



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

图 5.29 雨流计数转化法下 lga 的概率统计与两参数对数正态分布的比较(10000s)



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

图 5.30 雨流计数转化法下 lga 的概率统计与两参数对数正态分布的比较(13000s)

5.4 小时间尺度直接积分法与雨流计数转化法的比较

直接积分法与雨流计数转化法同属于小时间尺度法的范畴。本文将从计算效率和计算精度两方面，比较直接积分法与雨流计数转化法在金属板疲劳裂纹扩展不确定性分析中的异同。

(1) 计算效率的比较

与第二章类似，小时间尺度直接积分法程序计算耗时很长，需要一天左右的时间；而雨流计数转化法仅需要几秒。这是由于通用公式计算时，是对时间历程逐秒进行积分的，故而当疲劳加载时间较长时，程序运算十分缓慢。

(2) 计算精度的比较

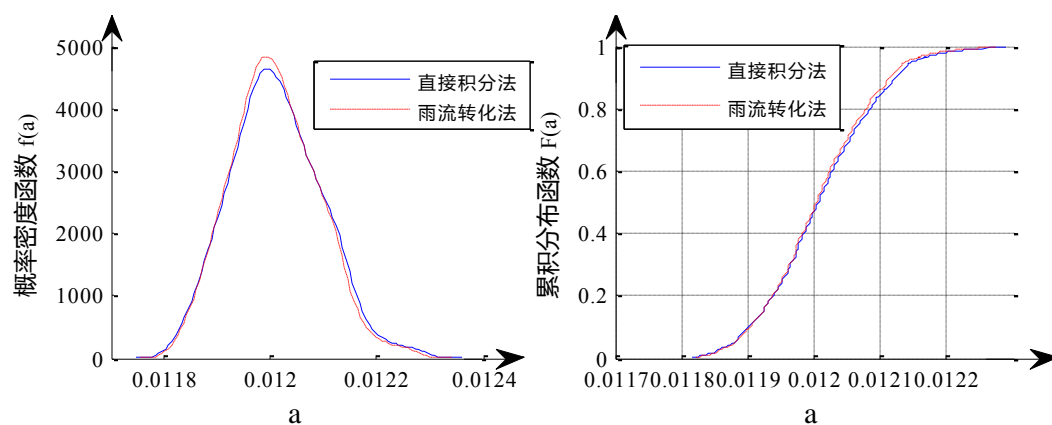
直接积分法与雨流计数转化法的计算结果如表 5.5 所示。对于疲劳裂纹扩展 a 的分布类型，直接积分法与雨流计数转化法的基本结论均为 a 服从正态分布和

两参数对数正态分布。 a 的均值 \bar{X} 存在关系：雨流计数转化法>直接积分法；标准差 S 满足：雨流计数转化法<直接积分法； a 的取值区间存在关系：雨流计数转化法<直接积分法；95%可靠度的 a 值存在关系：雨流计数转化法>直接积分法。直接积分法与雨流计数转化法计算的 \bar{X} 的相对差异不超过 1.63%， S 的相对差异不超过 6.8%，95%可靠度的 a 值相对差异不超过 2.71%。

表 5.5 正态分布参数假定下直接积分法与雨流计数转化法计算的 a 的比较

裂纹时间 t/s	a 的分布类型	数值计算方法	参数估计	a 的均值	a 的标准差	a 的取值区间	95%可靠度的 a
5000	正态分布	直接积分法	$\bar{X} = 0.0120$ $S = 8.5 \times 10^{-5}$	0.012	8.5×10^{-5}	[0.0118, 0.0123]	0.01188
		雨流转化法	$\bar{X} = 0.0120$ $S = 8.15 \times 10^{-5}$	0.012	8.15×10^{-5}	[0.0118, 0.0123]	0.01188
	两参数对数正态分布	直接积分法	$\bar{X} = -1.9204$ $S = 0.0031$	-1.9204	0.0031	[-1.928, -1.91]	
		雨流转化法	$\bar{X} = -1.9205$ $S = 0.0029$	-1.9205	0.0029	[-1.927, -1.91]	
10000	正态分布	直接积分法	$\bar{X} = 0.0132$ $S = 2.51 \times 10^{-4}$	0.0132	2.51×10^{-4}	[0.0126, 0.0140]	0.01282
		雨流转化法	$\bar{X} = 0.0132$ $S = 2.04 \times 10^{-4}$	0.0132	2.04×10^{-4}	[0.0127, 0.0138]	0.01285
	两参数对数正态分布	直接积分法	$\bar{X} = -1.8784$ $S = 0.0082$	-1.8784	0.0082	[-1.897, -1.859]	
		雨流转化法	$\bar{X} = -1.8806$ $S = 0.0067$	-1.8806	0.0067	[-1.925, -1.9]	
13000	正态分布	直接积分法	$\bar{X} = 0.01220$ $S = 1.05 \times 10^{-4}$	0.01220	1.05×10^{-4}	[0.0120, 0.0126]	0.01324
		雨流转化法	$\bar{X} = 0.0142$ $S = 3.49 \times 10^{-4}$	0.01222	9.86×10^{-5}	[0.0133, 0.0153]	0.01361
	两参数对数正态分布	直接积分法	$\bar{X} = -1.9134$ $S = 0.0038$	-1.9134	0.0038	[-1.925, -1.9]	
		雨流转化法	$\bar{X} = -1.8486$ $S = 0.00107$	-1.8486	0.00107	[-1.875, -1.852]	

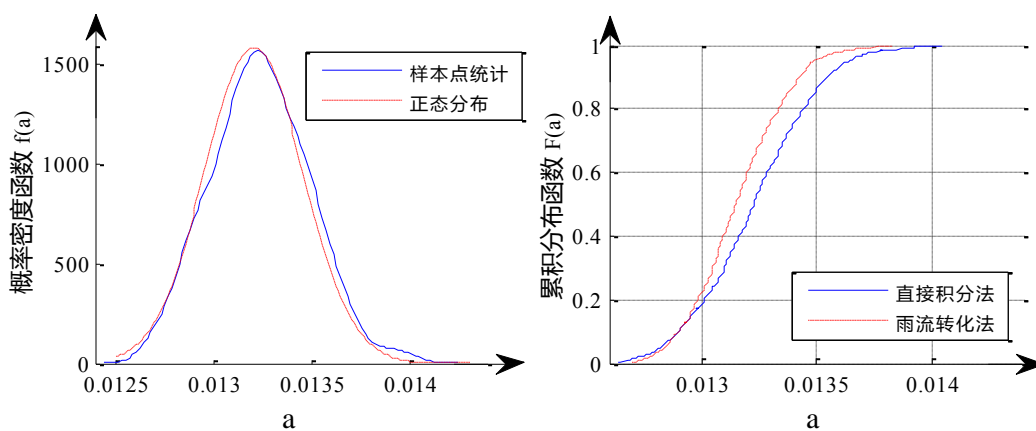
为更直观的比较直接积分法与雨流计数转化法计算的裂纹扩展长度 a 的数值, 图 5.31~图 5.36 给出了两种数值计算方法的 a 的概率密度曲线和累积分布曲线的比较。可以看出, 直接积分法计算的 a 的概率密度曲线和累积分布曲线与雨流计数转化法的计算结果比较吻合, 随着时间逐渐增加, 直接积分法的离散型要大于雨流转化法, 这是由于小时间尺度直接积分法 MATLAB 计算模型累积误差造成的。



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

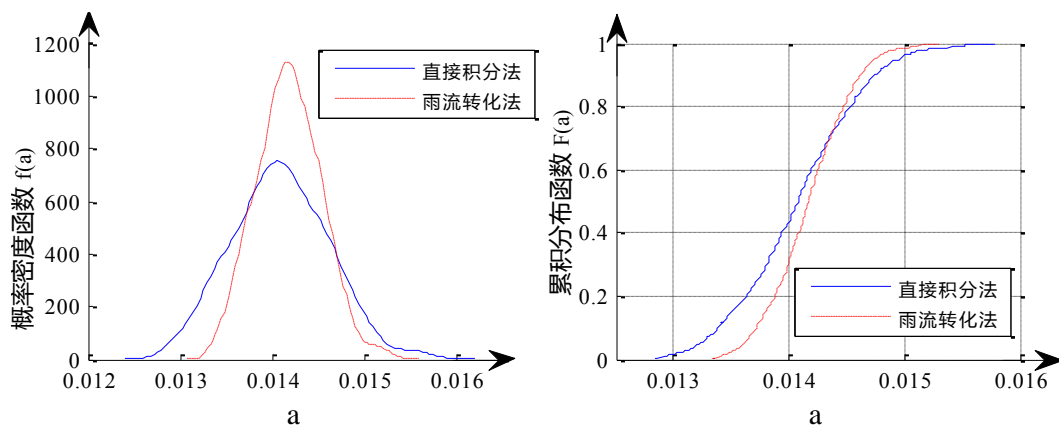
图 5.31 直接积分法与雨流计数转化法计算的 a 的概率特征比较(5000s)



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

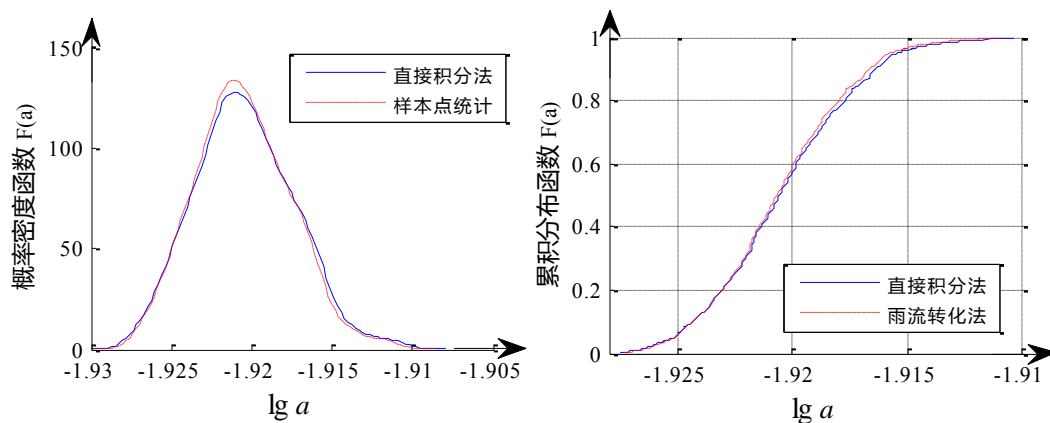
图 5.32 直接积分法与雨流计数转化法计算的 a 的概率特征比较(10000s)



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

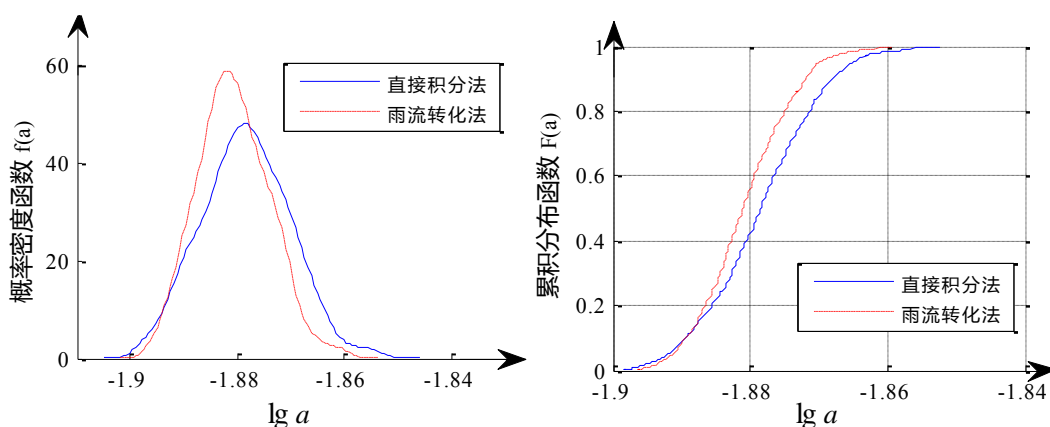
图 5.33 直接积分法与雨流计数转化法计算的 a 的概率特征比较(13000s)



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

图 5.34 直接积分法与雨流计数转化法计算的 $\lg a$ 的概率特征比较(5000s)



(a) 概率密度曲线对比

(b) 累积分布曲线对比

图 5.35 直接积分法与雨流计数转化法计算的 $\lg a$ 的概率特征比较(10000s)

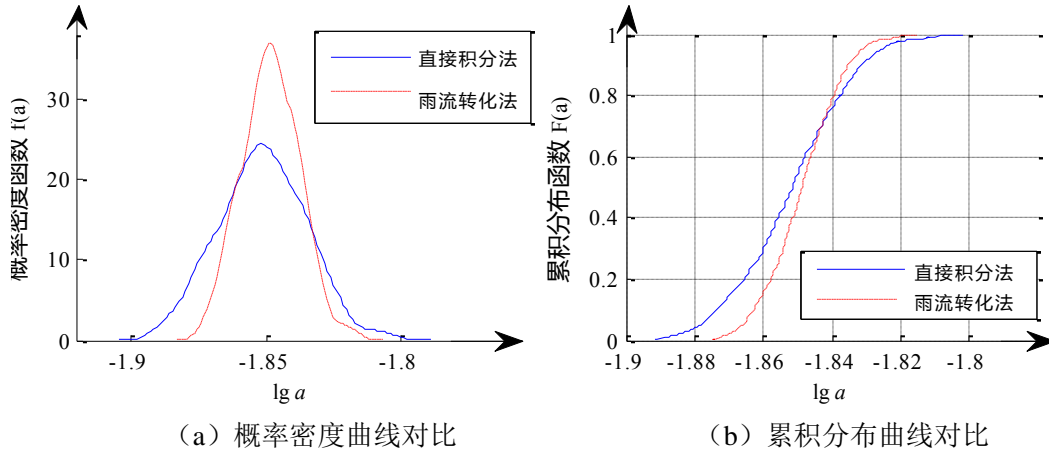


图 5.36 直接积分法与雨流计数转化法计算的 $\lg a$ 的概率特征比较(13000s)

综上所述可知，直接积分法计算的 a 的概率特征与雨流计数转化法的计算结果比较接近，随着时间增长，直接积分法的离散型变大，最大相对差异不超过 6.8%（标准差之间的差异）。造成直接积分法与雨流计数转化法计算结果之间细微差异的根本原因是小时间尺度直接积分法 MATLAB 计算模型累积误差和雨流计数法统计分析时的误差。该差异对 a 的概率统计的影响在可接受的范围内，再次验证运用小时间尺度裂纹扩展模型和随机配点法不确定性代理模型是合理可靠的。

5.5 本章小结

本章主要以具有 I 型裂纹的 7075-T6 铝合金板为研究对象，构造了一组幅值变化的荷载，比较了当材料参数 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 服从对数正态分布时，均采用随机配点法的不确定处理模型的条件下，都基于小时间尺度模型的直接积分法和雨流计数转化法在计算效率和计算精度等上的不同。

(1) 首先用直接积分法计算出所有裂纹完整扩展曲线，对于剩余疲劳寿命 t 分析，计算 $t(\omega)$ 的均值、标准差、取值范围和概率分布曲线，并利用 K-S 检验 $t(\omega)$ 的概率分布类型，得出 $t(\omega)$ 服从正态分布 ($\bar{X} = 17313$, $S = 866.75$) 和两参数对数正态分布 ($\bar{X} = 4.2378$, $S = 0.0219$)。

(2) 当裂纹扩展时间分别为 5000s, 10000s, 13000s 时，对裂纹扩展长度 a 进行分析，采用直接积分法随机抽样 1000 次的结果用于统计，计算 $a(\omega)$ 的均值、标准差、取值范围和概率分布曲线，并利用 K-S 检验 $a(\omega)$ 的概率分布类型，得出 $a(\omega)$ 服从正态分布和两参数对数正态分布。

(3) 当裂纹扩展时间分别为 5000s, 10000s, 13000s 时，对裂纹扩展长度 a 进行分析，采用雨流转化法随机抽样 1000 次的结果用于统计，得出 $a(\omega)$ 的均值、

标准差、取值范围和概率分布曲线，并利用 K-S 检验 $a(\omega)$ 的概率分布类型，得出 $a(\omega)$ 服从正态分布和两参数对数正态分布。

(3) 直接积分法比雨流计数转化法的计算时间长很多，与前面第二章提到的结果相同。这是由于直接积分法是在对整个荷载时间历程逐秒积分。

(3) 随着裂纹扩展时间增长，直接积分法比雨流计数转化法的离散型更大。这是由于直接积分法 MATLAB 计算模型累积误差造成的是。

(4) 直接积分法的计算精度与雨流计数转化法类似，均值 \bar{X} 的相对差异不超过 1.67%，标准差 S 的相对差异不超过 6.8%，具有 95% 可靠度的 a 值的相对差异不超过 2.71%。

(5) 综合前面第二章小时间尺度疲劳裂纹扩展的确定性分析和第四章常幅下小时间尺度疲劳损伤的不确定性分析；可以发现对于随机荷载下的小时间尺度疲劳损伤的不确定性分析，影响最后计算效率的主要是在于对随机荷载的处理方式也就是疲劳损伤模型的选取，而随机配点法进行不确定性处理是十分高效的。

第六章 结论与展望

6.1 结论

目前有许多疲劳分析的模型,涵盖了从微观裂纹到大型结构失效等多种疲劳损伤尺度。然而在时域里的一般性裂纹生长的疲劳预测模型分析很少,特别是当时间尺度小于一个周期时.本文所用到的小时间尺度裂纹扩展模型是基于一个周期内任意时刻的裂纹增长动力学提出的。由于不需要周期计数,对于随机变幅荷载的疲劳分析,该方法具有明显的优势。相比于传统的运用循环应力幅的方法,裂纹扩展的应力状态被直接用于小时间尺度模型中,可以说是从本质上反应了应力比的疲劳模型。对于小时间尺度裂纹扩展模型来讲名义应力有效值是至关重要的。这个变量是由裂纹尖端周围的正向塑性区和反向塑性区之间的相互作用机制来确定。

由于这种方法是完全不同于传统的基于循环的疲劳分析,它可以用于在不同的时间和长度尺度下的疲劳损伤预后。它拥有巨大的潜力就是直接通过耦合动力学方程来解决小裂纹问题和结构疲劳损伤预后。

同时疲劳分析问题受材料、施工过程和服役环境等众多不确定性因素的影响,其疲劳损伤的结果往往具有很强的离散性。考虑实验条件下得到的构件的材料参数并不足以真实地反映材料的不确定性,故本文提出基于随机配点法分析材料参数分布类型不确定时的疲劳损伤问题。

本文基于断裂力学原理,首先以 2024-T42 铝合金的 CCT (中心裂纹受拉) 试样为研究对象,检验了小时间尺度裂纹扩展模型的正确性,并在此基础上对随机荷载下的小时间尺度疲劳损伤进行了确定性分析。然后以 7075-T6 铝合金的 CT (中心裂纹受拉) 试样为研究对象,考虑材料参数 K_{th} 、 K_c 和 σ_y 为不确定性变量 ω ,提出了基于小时间尺度公式的疲劳损伤不确定性模型,用随机配点法分析了 ω 在常幅下金属板剩余疲劳寿命 $N(\omega)$ 的概率特征,与实验数值对比,验证随机配点法的有效性。最后基于小时间尺度模型和随机配点法在随机荷载下对 7075-T6 金属板进行了疲劳损伤不确定性分析;并且对小时间尺度直接积分法和雨流计数转化法两种方法处理结果进行了对比,主要得出以下结论:

(1) 以 2024-T3 铝合金板为研究对象, $a-N$ 曲线与各实验数据点非常接近,证明了小时间尺度模型这种新的疲劳裂纹扩展模型是正确可行的。

(2) 以 7075-T6 铝合金板为研究对象,对小时间尺度公式的不确定性材料参数 ΔK_{th} 、 K_c 和 σ_y 统计评估,这三个参数相互独立且服从对数正态分布,在此基

基础上随机配点法计算裂纹疲劳寿命, 得出 $N(\omega)$ 服从三参数对数正态分布 ($N_0=24306$, $\bar{X}=4.408$, $S=0.0135$)。证明随机配点法在处理不确定性问题是高效可靠的。

(3) 可以基于小时间尺度模型和随机配点法进行随机荷载下的疲劳损伤不确定性分析。直接积分法和雨流计数转化法两种方法都是可行的, 在疲劳加载时间较长时, 前者的计算时间远远大于后者, 但前者更直观地反应了裂纹发展的过程, 当时间短时具有更好的适用性。

6.2 进一步的研究工作

疲劳损伤是一个综合复杂的系统工程, 本文所做的研究只是其中很小的一部分, 后续仍有许多工作可以进行:

(1) 小时间尺度公式通用公式计算时, 是对时间历程直接进行积分的, 故而当疲劳加载时间较长时, 程序运算十分缓慢, 研究进一步提高算法效率是十分必要的。另一方面利用直接对时间积分的特点, 可以进一步将该方法与动力学方程耦合起来。

(2) 本文仅进行了金属板单向拉伸下的疲劳损伤分析, 事实上, 土木工程结构所受的荷载大都为复杂荷载, 一般性的复杂疲劳分析和三维固体结构层面的复杂裂缝模拟还需要更多深入的研究。

(3) 金属板构件是土木工程结构的基本构件之一, 在此基础上研究更为复杂构件的疲劳损伤预后问题是未来损伤预后发展的必经之路。

(4) 在基本的多尺度疲劳损伤研究中, 未来的工作还需要进一步去探索微小裂纹扩展机制。研究微观结构(晶体结构、晶界和晶粒尺寸等等)的目的在于深入了解微小裂纹行为, 同时也有助于改进裂纹扩展模型, 特别是在蠕变的情况下。

(5) 为了研究裂纹尖端的扩展机制, 进一步的实验测试是必要的。由于塑性引起的裂纹闭合效应、附加硬化、裂纹削弱等造成的变化也需要通过实验来详细讨论和观察。与此同时, 疲劳裂纹扩展的两个临界值——与显微结构纹理相关的材料临界值和与裂纹尖端应力状态相关的物理临界值, 也都应该通过实验进行研究。

致谢

时光荏苒，短暂而充实的研究生生活转瞬即逝，回眸往昔，我感慨良多。三年时间，我孜孜以求，在浩瀚的知识海洋中不懈探索，向老师问道而求解惑，与同门探讨以共进步。诸位良师益友给予我帮助，不厌其烦的解答我的疑惑，为我今天作成此文奠定了坚实的基础。不仅如此，这段在同济生活的日子，也将成为我人生中一段重要而难忘的经历，为我美好的未来增添浓墨重彩的一笔。

本文得以完成，首先要感谢的是我的导师唐和生副教授。唐和生老师年轻有为，思维活跃，视野开阔，知识渊博，工作勤奋，时刻关注学子的研究进展，对于学生的指导更是毫无保留。而本文从论文选题到研究方法的选择以及最后的修改定稿都是在导师唐和生老师的悉心指导下完成的，同时我也从唐老师那里学到了很多宝贵的研究思路与方法。我对您的耐心指导和无私的帮助表示由衷的感谢。

此外，研究室的薛松涛老师和谢丽宇老师在我的研究生学习阶段也给予了我很大的鼓励和帮助，并且在生活上对我们都很关心和照顾。

感谢我的同门陈微、王航航和宋琛琛，感谢他们在日常生活、学习中给予我的帮助；感谢博士师姐苏瑜，她对学术的虔诚、积极向上的人生态度都无时无刻在激励着我；感谢博士生李大伟师兄和赵金海师兄；还要感谢研二的王兵师弟和梅加河师弟以及远在台湾的周育纬师弟，研一的黄志云师妹、杨桂权师弟、余必龙师弟、蒋灿师弟和李林师弟，与你们相处我很开心，感谢你们为整个研究室创造了团结、活泼、快乐的氛围。

最后，要感谢我的父母，谢谢他们的养育之恩，辛苦工作的父母，永远都是我努力学习的动力和精神支柱，希望他们能身体健康、开心幸福。

牟晓彤
2015年5月



参考文献

- [1] 工程科学和技术综合专题组. 2020 年中国工程科学和技术发展研究. 北京: 2020 年中国工程科学和技术发展研究暨科学家讨论会, 2004.
- [2] Inman D J, Farrar C R, Lopes JR V, et al. Damage prognosis. Wiley Online Library, 2005.
- [3] Farrar C R, Lieven N A. Damage prognosis: the future of structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2007, 365(1851): 623~632.
- [4] 张志奇, 李华刚, 谭登祥. 土木工程结构损伤诊断方法. *土木建筑教育改革理论与实践*, 2009, 11: 72~75
- [5] 李兆霞. 大型土木结构多尺度损伤预后的现状, 研究思路与前景. *东南大学学报: 自然科学版*, 2013, 43(5): 1111~1121.
- [6] 程靳, 赵树山. 断裂力学. 北京: 科学出版社, 1980, 9~147.
- [7] Paris P, Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of basic engineering*, 1963, 85(4): 528~533.
- [8] 洪友士, 方飏. 疲劳短裂纹萌生及发展的细观过程和理论. *力学进展*, 1993, 23(4): 468~486.
- [9] Forman R G, Kearney V, Engle R. Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. *Journal of basic Engineering*, 1967, 89(3): 459~463.
- [10] Walker K. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 aluminum. *Effects of environment and complex load history on fatigue life*, ASTM STP, 1970, 462: 1~14.
- [11] Wolf E. Fatigue crack closure under cyclic tension. *Engineering Fracture Mechanics*, 1970, 2(1): 37~45.
- [12] Willenborg J, Engle R, Wood H. A crack growth retardation model using an effective stress concept. *Air Force Flight Dynamics Lab Wright-Patterson Afb Oh*, 1971.
- [13] Wheeler O E. Spectrum loading and crack growth. *Journal of Basic Engineering*, 1972, 94(1): 181~186.
- [15] Newman, J. C., A crack-closure model for predicting fatigue crack growth under aircraft spectrum loading in NASA Technical Memorandum 81941. 1981. p.1743-1751.
- [16] Newman, J. C., A crack opening stress equation for fatigue crack growth. *International Journal of Fatigue*, 1984. 24: p. 131-135.
- [17] Budiansky, B. and J.W. Hutchinson, Analysis of closure in fatigue crack growth. *ASME J. Appl. Mech* 1978. 45: p. 267-276.
- [18] Chang T., Li G., and Hou J., Effects of applied stress level on plastic zone size and opening stress ratio of a fatigue crack. *International Journal of Fatigue*, 2005.27(5): p. 519-526.
- [19] A. K. Vasudevan, K. Sadananda, and N. Louat, Reconsideration of fatigue crack closure. *Scripta Metall. Mater.*, 1992. 27: p. 1673-1678.
- [20] F. O. Riemelmoser and R. Pippan, Crack closure: a concept of fatigue crack growth under examination. *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, 1997. 20: p. 1529-1540.
- [21] Zhang, Jia-Zhen, Jia-Zhong Zhang, and Shan Yi Du, Elastic-plastic finite element analysis

- and experimental study of short and long fatigue crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 2001. 68(14): p. 1591-1605.
- [22] Zhang, J. Z., et al., Direct high resolution in situ SEM observations of small fatigue crack opening profiles in the ultra-fine grain aluminium alloy. *Materials Science and Engineering: A*, 2008. 485(1-2): p. 115-118.
- [23] Para A.F., et al., Plastic zone size in fatigue cracking. *The International Journal of Pressure Vessels and Piping* 1996. 68(3): p. 279-285.
- [24] McClung, R.C., Crack closure and plastic zone size in fatigue. *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, 1991. 14: p. 455-468.
- [25] Newman, J. C., A crack opening stress equation for fatigue crack growth. *International Journal of Fatigue*, 1984. 24: p. 131-135.
- [26] Elber, W., The significance of fracture crack closure. *ASTM Special Technical Publication 486*, American Society for Testing and Materials ed. *Damage tolerance in aircraft structures*. 1971, Philadelphia. 230-242.
- [27] Koning, A. U. de. A simple crack closure model for prediction of fatigue crack growth rates under variable-amplitude loading. in *Fracture Mechanics: Thirteenth Conference*, ASTM STP 743. 1981: American Society for Testing and Materials.
- [28] Ray, A. A state-space model of fatigue crack growth for real-time structural health management. in *Digital Avionics Systems Conferences*. 2000.
- [29] A. Ray, R. Partankar, Fatigue crack growth under variable-amplitude loading: Part II-Code development and model validation. *Applied Mathematical Modeling*, 2001. 25: p. 995-1013.
- [30] Newman, J. C., A crack-closure model for predicting fatigue crack growth under aircraft spectrum loading in *NASA Technical Memorandum 81941*. 1981. p.1743-1751.
- [31] S. Pommier and M. Risbet, Time derivative equations for mode I fatigue crack growth in metals. *International Journal of Fatigue*, 2005. 27: p. 1297-1306.
- [32] Lu, Zizi. "A small time scale model for fatigue crack growth analysis." *Dissertation Abstracts International* 72.04 (2011).
- [33] Morgan M G, Small M. *Uncertainty: a guide to dealing with uncertainty in quantitative risk and policy analysis*. Cambridge University Press, 1992.
- [34] Cullen A C, Frey H C. *Probabilistic techniques in exposure assessment: a handbook for dealing with variability and uncertainty in models and inputs* . Springer, 1999.
- [35] Vose D. *Risk analysis: a quantitative guide* . John Wiley & Sons, 2008.
- [36] Haimes Y Y. *Risk modeling, assessment, and management*. John Wiley & Sons, 2005.
- [37] Roy C J, Oberkampf W L. *A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing* . *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(25): 2131~2144.
- [38] So H, Ching P-C, Chan Y. A new algorithm for explicit adaptation of time delay. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 1994, 42(7): 1816~1820.
- [39] 李浩. 混凝土结构抗震性能的不确定性分析与研究: [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学土木工程学院, 2011.
- [40] Olshausen B A. *Bayesian probability theory*. The Redwood Center for Theoretical Neuroscience, Helen Wills Neuroscience Institute at the University of California at Berkeley, Berkeley, CA, 2004,

- [41] Hall J W, Blockley D I, Davis J P. Uncertain inference using interval probability theory. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1998, 19(3): 247~264.
- [42] Zadeh L A. Fuzzy sets. *Information and control*, 1965, 8(3): 338~353.
- [43] Pawlak Z. Rough set theory and its applications to data analysis. *Cybernetics & Systems*, 1998, 29(7): 661~688.
- [44] 曹鸿钧, 段宝岩. 基于凸集模型的多学科耦合系统不确定性分析. *西安电子科技大学学报*, 2005, 32(3): 335~338.
- [45] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *The annals of mathematical statistics*, 1967: 325~339.
- [46] Shafer G. *A mathematical theory of evidence*. Princeton university press Princeton, 1976.
- [47] Liu G L. New research directions in singular perturbation theory: artificial parameter approach and inverse-perturbation technique. *Conference of 7th modern mathematics and mechanics*, Shanghai, 1997: 47~53.
- [48] He J-H. A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2000, 35(1): 37~43.
- [49] Moore R E. *Interval analysis*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1966.
- [50] Hughes T J, Levit I, Winget J. An element-by-element solution algorithm for problems of structural and solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1983, 36(2): 241~254.
- [51] Moore R E, Moore R. *Methods and applications of interval analysis*. SIAM, 1979.
- [52] 仝宗凯, 李杰, 王寿梅等. 非线性区间迭代法在结构后屈曲分析中的应用. *航空学报*, 1999, 20(6): 549~552.
- [53] 李方义, 李光耀, 郑刚. 基于区间的确定多目标优化方法研究. *固体力学学报*, 2010, 31(1): 86~93.
- [54] 王建军, 于长波, 李其汉. 工程中的随机有限元方法. *应用力学学报*, 2009, 2: 297~303.
- [55] Shinozuka M, Astill C J. Random eigenvalue problems in structural analysis. *AIAA Journal*, 1972, 10(4): 456~462.
- [56] Cornell, C., First-order uncertainty analysis of soil deformation and stability. No. Conf Paper, 1972.
- [57] Hisada T, Nakagiri S. Role of the stochastic finite element method in structural safety and reliability. *proceedings of the Proc 4th Int Conf Struct Safety and Reliability, ICOSSAR'85*, 1985.
- [58] Wiener N. The homogeneous chaos. *Amer J Math*, 1938, 60(4): 897~936.
- [59] Ghanem R G, Spanos P D. *Stochastic finite elements: a spectral approach*. Springer, 1991.
- [60] 崔海涛, 温卫东. 随机有限元法及其工程应用. *南京航空航天大学学报*, 2000, 32(1): 91~98.
- [61] Orszag S A, Bissonnette L. Dynamical Properties of Truncated Wiener - Hermite Expansions. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 2004, 10(12): 2603~2613.
- [62] Crow S, Canavan G. Relationship between a Wiener-Hermite expansion and an energy cascade. *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, 41(02): 387~403.
- [63] Xiu D, Karniadakis G E. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, 2003, 187(1): 137~167.
- [64] Xiu D, Hesthaven J S. High-order collocation methods for differential equations with random

- inputs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2005, 27(3): 1118~1139.
- [65] Witteveen J A, Sarkar S, Bijl H. Modeling physical uncertainties in dynamic stall induced fluid-structure interaction of turbine blades using arbitrary polynomial chaos. *Computers & structures*, 2007, 85(11): 866~878.
- [66] Novak E, Ritter K. High dimensional integration of smooth functions over cubes. *Numerische Mathematik*, 1996, 75(1): 79~97.
- [67] Smolyak S A. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. *proceedings of the Dokl Akad Nauk SSSR*, 1963.
- [68] Barthelmann V, Novak E, Ritter K. High dimensional polynomial interpolation on sparse grids. *Advances in Computational Mathematics*, 2000, 12(4): 273~288.
- [69] Foo J, Yosibash Z, Karniadakis G E. Stochastic simulation of riser-sections with uncertain measured pressure loads and/or uncertain material properties. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2007, 196(41): 4250~4271.
- [70] Babuška I, Nobile F, Tempone R. A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM review*, 2010, 52(2): 317~355.
- [71] Jakeman J, Eldred M, Xiu D. Numerical approach for quantification of epistemic uncertainty. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(12): 4648~4663.
- [72] 史良胜, 唐云卿, 杨金忠. 基于随机配点法的地下水污染风险评价. *水科学进展*, 2012, 23(004): 529~538.
- [73] 唐云卿, 史良胜, 杨金忠. 基于随机配点法的饱和-非饱和水流运动模拟. *四川大学学报: 工程科学版*, 2012, 44(005): 30~37.
- [74] 陈海军. 基于概率配点法的岩石破坏行为不确定性分析: [硕士学位论文]. 武汉: 武汉理工大学理学院, 2012.
- [75] Zhao F, Tian Z, Zeng Y. A stochastic collocation approach for efficient integrated gear health prognosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013, 39(1): 372~387.
- [76] Newman, J. C., James M.A., and Zerbst U., A review of the CTOA/CTOD fracture criterion. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003. 70: p. 371-385.
- [77] K. Srinivansan, O. Kolednik, and T. Siegmund. A study on crack propagation in heterogeneous elastic-plastic solids. in *The 15th European Conference on Fracture*. 2004. Stockholm.
- [78] M. Janssen, J. Zuidema, and R. J. H. Wanhill, *Fracture Mechanics*. 1 ed, ed. T. Francis. 1991, New York: Kluwer Academic. 384.
- [79] R.G. Forman, V.E. Kearney, and R.M. Engle, Numerical analysis of crack propagation in cyclic loaded structures. *J Basic Eng*, 1967. 89 p. 459-464.
- [80] Wheeler, O., Spectrum loading and crack growth. *J Basic Eng*, 1972. 94 p. 181- 186.
- [81] Schijve, J., The significance of fractography for investigations of fatigue crack growth under variable amplitude fatigue. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 1999. 22: p. 87-99.
- [82] Skorupa, M., Load interaction effects during fatigue crack growth under variable amplitude loading – a literature review Part II: qualitative interpretation. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 1999. 22(10): p. 905-926
- [83] McClung, R.C., Crack closure and plastic zone sizes in fatigue. *Fatigue & Fracture of*

- Engineering Materials & Structures, 1990. 14(4): p. 455-468.
- [84] Suresh, S., *Fatigue of Materials (Second Edition)*. 1998, Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [85] Irwin, G.R. Plastic zone near a crack and fracture toughness. in *Mechanical and Metallurgical behavior of Sheet Materials, Seventh Sagamore Ordnance Materials Research Conference*. 1960.
- [86] Irwin, G.R., *Linear fracture mechanics: fracture translation and fracture control*. Engineering Fracture Mechanics, 1968. 1: p. 241-257.
- [87] Toyosada, Masahiro, Koji Gotoh, and Toshio Niwa, Fatigue crack propagation for a through thickness crack: a crack propagation law considering cyclic plasticity near the crack tip. *International Journal of Fatigue*, 2004. 26(9): p. 983- 992.
- [88] 田秀云,杜洪增,孙智强.金属材料疲劳裂纹扩展曲线的拟合方法研究. *工程力学*, 2003, Vol. 20(4): 136~140
- [89] Dormand J R, Prince P J. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of computational and applied mathematics*, 1980, 6(1): 19~26.
- [90] Hongwei H. *Simulation of stochastic processes using Karhunen-Loeve expansion: [Doctoral dissertation]*. Singapore: National University of Singapore, 2003.
- [91] Huang S, Quek S, Phoon K. Convergence study of the truncated Karhunen–Loeve expansion for simulation of stochastic processes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 52(9): 1029~1043.
- [92] Madsen H O. *Stochastic modeling of fatigue crack growth and inspection. Probabilistic methods for structural design*. Springer. 1997: 59~83.
- [93] Perrin F, Sudret B, Pendola M. Bayesian updating of mechanical models–Application in fracture mechanics. *18^{ème} Congrès Français de Mécanique (Grenoble 2007)*, 2007.
- [94] Gobbato M, Kosmatka J B, Conte J P. A recursive bayesian approach for fatigue damage prognosis: an experimental validation at the reliability component level. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013.
- [95] Sadananda, K. and A. K. Vasudevan, Fatigue crack growth mechanisms in steels. *International Journal of Fatigue*, 2003. 25(9-11): p. 899-914.
- [96] Materials, American Society of Testing and, Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates, in *Annual Book of ASTM Standards*. 1998: Philadelphia, PA. p. 671-715.
- [97] GS, Wang, Intrinsic statistical characteristics of fatigue crack growth rate. *Eng Fract Mech*, 1995. 51: p. 787-803.
- [98] Guan, Xuefei, Ratneshwar Jha, and Yongming Liu, Probabilistic fatigue damage prognosis using maximum entropy approach. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 2009: p. 1-9.
- [99] S.B., Lee, A Criterion for Fully Reversed Out-of-Phase Torsion and Bending In: K.J. Miller and M.W. Brown, Editors, *Multiaxial fatigue*, ASTM STP 853, ASTM, Philadelphia 1985: p. 553-568.
- [100] Goncalves, Camilla A., Jose A. Araujo, and Edgar N. Mamiya, Multiaxial fatigue: a stress based criterion for hard metals. *International Journal of Fatigue*, 2005. 27(2): p. 177-187.
- [101] Svensson, Thomas, Prediction uncertainties at variable amplitude fatigue. *International Journal of Fatigue*, 1997. 19(93): p. 295-302.

- [102] Wu, W. F. and C. C. Ni, Statistical aspects of some fatigue crack growth data. *Engineering Fracture Mechanics*, 2007. 74(18): p. 2952-2963.
- [103] Chen, Chung-De, et al., The effects of material variations on aircraft inspection schedules based on stochastic crack growth model. *International Journal of Fatigue*, 2008. 30(5): p. 861-869.
- [104] Liu, Yongming and Sankaran Mahadevan, Probabilistic fatigue life prediction using an equivalent initial flaw size distribution. *International Journal of Fatigue*, 2009. 31(3): p. 476-487.
- [105] Taheri, F., D. Trask, and N. Pegg, Experimental and analytical investigation of fatigue characteristics of 350WT steel under constant and variable amplitude loadings. *Marine Structures*, 2003. 16(1): p. 69-91.
- [106] Dominguez, Jaime, Jose Zapatero, and Jose Pascual, Effect of load histories on scatter of fatigue crack growth in aluminum alloy 2024-T351. *Engineering Fracture Mechanics*, 1997. 56(1): p. 65-76.
- [107] D.A. Virkler, B.M. Hillberry, and P.K. Goel, The statistic nature of fatigue crack propagation. *ASME J Engng Mater Technol* 1979. 101: p. 148-153.

个人简历、在读期间发表的学术论文与研究成果

个人简历：

牟晓彤，女，1990年5月生。

2012年6月毕业于东南大学土木工程专业，获工学学士学位。

2012年9月进入同济大学防灾减灾及防护专业攻读硕士学位。

已发表论文：

- [1] 唐和生 牟晓彤. 基于随机配点法的疲劳裂纹扩展不确定性分析. 计算力学, 2014, Vol.31:58-62.