

基于小波理论的奇异信号分析

唐和生 (同济大学 上海 200092)

薛松涛 (同济大学 上海 200092 日本近畿大学 日本)

谢强 (同济大学 上海 200092)

摘要 鉴于传统信号处理对非平稳信号的局限,小波分析作为一种具备时间-频率局部特性的信号处理方法,已成为众多领域的研究热点。笔者介绍了小波变换的部分性质,分析了小波变换与 Fourier 变换下的奇异信号特性,并以此进行奇异信号检测。

关键词 小波变换, 奇异信号, Fourier 变换, 检测

中图分类号 O302; TN911.6

Singular Signal Analysis Based on Wavelet Theory

Tang Hesheng Xue Songtao Xie Qiang

Abstract In view of the limitation of classical signal processing method in case of nonstationary. Wavelets is a developing subject, it provides a new local property of the signal in time-frequency for the digital signal processing in engineering. In this paper, partial characteristics of wavelet transform were introduced; the characteristics of singular signal were analyzed by the wavelet and Fourier transforms and utilized as characteristics in detecting singular signal and its singularity.

Key words wavelet transform, singularity signal, Fourier transform, detecting

0 引言

小波变换是数据处理和数字信号处理的一种新方法。他具有良好的时-频局部化能力,为信号的时-频分析提供了有效的分析方法,是继 Fourier 分析之后纯粹数学和应用数学完美结合的光辉典范。在工程实际问题中常会碰到一系列的非平稳冲击信号。例如,高速运转的零部件破坏时的响应信号及高层建

筑在地震时的响应信号等,对这类冲击信号,传统的基于傅立叶变换的时频信号分析方法仅能提供信号的平均统计结果,难以准确描述局部微细的特征。小波变换则能在不同的频率上有不同的分辨率:低频处有较高的频率分辨率;在高频处有较高的时间分辨率,并且可以用不同的尺度观察信号和用不同的分辨率分解信号,具有良好的局部化作用。小波变换具有优良“变焦”性能的时频局部化特性,是进行故障奇异信号分析和提取特征的有效工具。

1 小波分析及特性

小波分析^[1,2]的发展来自于 Fourier 分析。经

典 Fourier 分析的本质是把相当任意的函数 $f(t)$ 表示为具有不同频率的谐波函数的线性叠加, 是一种纯频域分析。它的明显不足是缺乏空间局部性。在许多工程问题中, 我们所关心的恰恰是信号的局部特征, 尽管加窗可以突出变换的局部特征; 但是, 一旦窗口函数取定, 窗口的形状、大小也随之确定。我们只能得到信号在窗口区间内的总信息, 如果在信号内有短时、高频成分, 这种变换就不是非常有效的。

小波变换发展了窗口 Fourier 变换的局部化思想; 但他的窗口宽随频率增高而缩小, 符合高频信号时间分辨率较高的要求。

称满足如下允许性条件(admissible condition):

$$C_{\Psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < +\infty \quad (1)$$

函数 $\Psi(t) \in L^2(R)$, $\Psi(\omega)$ 为 $\Psi(t)$ 的傅立叶变换, 则称 $\Psi(t)$ 为基本小波或小波母函数。由式(1)可得到

$$\chi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0 \quad (2)$$

由式(2)可知 $\Psi(t)$ 具有一定振荡性和衰减性, 即它包含着某种频率特性。

1.1 连续小波变换

对某一基小波基 $\Psi(t)$, 信号 $f(t) \in L^2(R)$ 关于该基小波的连续小波变换(CWT):

$$(W_{\Psi}f)(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3)$$

$a \in R - \{0\}, b \in R$

其中平移参数 b 起平移作用, 对应小波在时域的位置; 尺度参数 a 的变化不仅改变连续小波的频谱结构, 也改变窗口的形状和大小。子小波随着尺度参数 a 的减少, 时间窗自动变窄。具有窄时域窗的子小波能捕捉到高频瞬变信号, 宽时窗的子小波反映了信号的低频分量即信号的趋势。这体现出小波变换具有极敏感的“变焦”特性。从而使小波分析在分析和处理非平稳变、瞬变信号时, 比 Gabor 变换效果更佳。进一步研究表明, 子小波的频窗宽度和频率中心虽然随尺度参数变化, 但两者的比值却是不变的, 是一个与基小波有关的常数, 因而小波分析是一种“常数 Q ”频率分析。其次, 小波变换用的基小波不是固定的, 可以根据数据压缩、图像处理、奇异信号检测等不同目的, 选用不同的母小波。

1.2 离散小波变换

由于连续小波变换的冗余性较大, 可通过对连续小波变换的尺度参数 a 和平移参数 b 的采样而离

散化。对 a, b 依如下规律采样

$$\begin{aligned} a &= a_0^{-m} & a_0 > 1 \\ b &= nb_0 a_0^{-m} & b_0 > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

则由式(3)对于 $f(t) \in L^2(R)$, 相应的离散小波变换为:

$$D_{\Psi}f(m, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) a_0^{m/2} \Psi(a_0^m - nb_0) dt \quad (5)$$

当 $a_0 = 2, b_0 = 1$ 时, 即构成二进小波变换。

2 Fourier 变换与函数的奇异性

在信号检测中, 信号的突变部分(也就是函数变化剧烈的部位)常包含有很重要的故障信息, Fourier 变换是处理这类问题的基本工具。若函数在某处有间断或某阶导数不连续, 则称函数在此处有奇异性。

设函数 $f(t)$ 具有支集紧($\text{supp}f(t) = [t_a, t_b]$), 若 $f(t)$ 是光滑的(用 C^∞ 表示全体光滑函数所构成的集合), 根据分部积分法得:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{t_a}^{t_b} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{t_a}^{t_b} + \frac{1}{i\omega} \int_{t_a}^{t_b} f'(t) e^{-i\omega t} dt \quad (6) \end{aligned}$$

由于 $f \in C^\infty$, 故上述分部积分法可进行任意次, 故有:

$$f(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^N} \int_{t_a}^{t_b} f^{(N)}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (7)$$

因此 $f(\omega) = O\left(\frac{1}{|\omega|^N}\right)$, $|\omega| \rightarrow \infty$, 式中 N 是任意自然数。

由此可见, 若 $f(t)$ 是光滑函数, 则其 Fourier 变换(当 $|\omega| \rightarrow \infty$ 时)趋于零的速度要比 $\frac{1}{|\omega|}$ 的任意次幂快。反之, 也可证明: 若函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $f(\omega)$ 趋于零的速度比 $\frac{1}{|\omega|}$ 的任意次幂快, 则 $f(t)$ 必定是光滑的。

设 $f(t)$ 在 $t_0 (t_a < t_0 < t_b)$ 处间断(即 $f(t_0-0) \neq f(t_0+0)$), 则有

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{f(t) e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{t_a}^{t_0-0} + \frac{f(t) e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{t_0+0}^{t_b} \\ &\quad + \frac{1}{i\omega} \int_{t_a}^{t_b} f'(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{i\omega} [f(t_0+0) - f(t_0-0)] e^{-i\omega t_0} + O\left(\frac{1}{|\omega|}\right) \quad (8) \end{aligned}$$

由此可见, $f(\omega)$ 趋于零的速度只能是 $O\left(\frac{1}{|\omega|}\right)$ 。类似地, 若 $f(t)$ 在 t_0 处连续, 但其一阶

导数不连续, 则其 Fourier 变换 $f(\omega)$ 趋于零的速度只能是 $O\left[\frac{1}{|\omega|^2}\right]$ 。一般地, 若 $f(t)$ 在 t_0 处的 $k-1$ 阶导数连续, 但 k 阶导数有间断, 则其 Fourier 变换 $f(\omega)$ 趋于零的速度只能是 $O\left[\frac{1}{|\omega|^{k+1}}\right]$ 。也就是说, 由一个函数的 Fourier 变换趋于零的快慢可以推断该函数是否有奇异性及奇异性之强弱。然而我们所关心的问题是提取信号中的突变点的位置及判断其奇异性(或光滑性), 由于 Fourier 变换缺乏空间局部性, 因此由函数的 Fourier 变换只能确定其奇异性的整体性质, 而难以确定其奇异性的空间分布情况, 也就是说, 当函数有许多奇点时, 用 Fourier 变换难以确定各奇点的位置及各奇点奇异性的强弱。

3 奇异信号在小波变换下的特征

小波由于同时具有空间域与频率域的局部性, 加上小波变换具有“变焦”的特性, 因此可以想象, 它对信号突变点位置的确定应该是很有效的。Mallat^[3~5] 等人建立了小波变换与刻画信号奇异性的 Lipschitz 指数之间的密切关系, 从而可以通过小波变换来确定信号的奇异点位置。

在数学上, 信号的奇异性是由 Lipschitz 指数来刻划的。

定义 1 (1) 设 n 为整数且有 $n \leq \alpha \leq n+1$, 称信号 $f(t)$ 在 t_0 处有当且仅当存在两个常数 A 及 $h_0 > 0$, 以及一个 n 阶多项式 $P_n(t)$, 使得对于所有正数 $h < h_0$ 下式成立

$$|f(t_0+h) - P_n(h)| \leq A|h|^\alpha \quad (9)$$

(2) 称信号 $f(t)$ 在区间 $[t_a, t_b]$ 上一致有 Lipschitz 指数 α , 当且仅当存在常数 A 和一个 n 阶多项式 $P_n(t)$, 对于任意 $t_0 \in [t_a, t_b]$, 只要 $t_0+h \in [t_a, t_b]$, 即式(9)成立。

$f(t)$ 在 t_0 点若是连续可微, 则在该点具有 Lipschitz 指数 1。如果函数的 Lipschitz 正则性阶数 α_0 越大, 则它在 t_0 处的奇异性越小。Lipschitz 正则性与 $f(t)$ 的可微性有密切联系, 但前者刻划更精确。若 $f(t)$ 在 t_0 处的 Lipschitz 正则性 α_0 能满足 $n < \alpha_0 < n+1$, 则 $f(t)$ 在 t_0 处具有 n 阶导数, 但 Lipschitz 正则性还表明, 其 n 阶导数在 t_0 处奇异, 且指数 α_0 正刻划了该点奇异性。

从小波变换特征可知, 小波变换 $W_\Psi f(a, t_0)$ 的值强烈地依赖于信号 $f(t)$ 在 t_0 处邻域附近的值, 并且尺度 a 越小, 邻域区间也越小, 因此在合适的尺度上, $W_\Psi f(a, t_0)$ 将提供所需要的信号在 t_0 附近

的局部信息。下面的定理给出了信号小波变换沿尺度的衰减与信号局部 Lipschitz 指数的关系, 并由此得到信号奇异性的特征。信号的奇异性在小波变换下的特征由下面定理描述, 信号的奇异点与小波变换模极大值与该点 Lipschitz 指数有密切的关系。

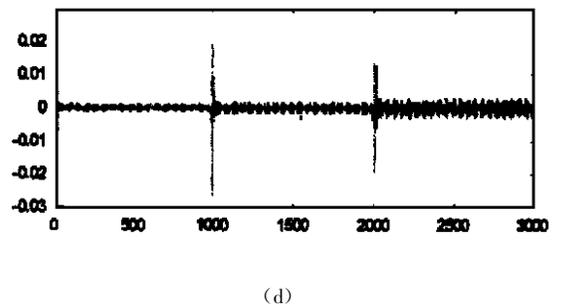
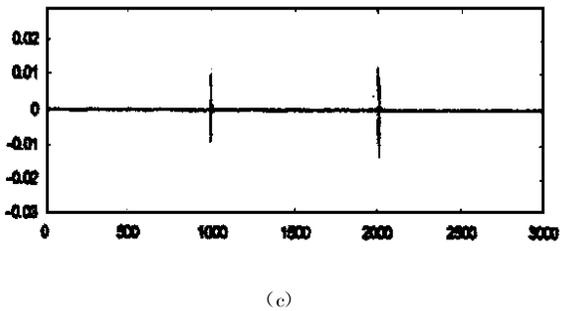
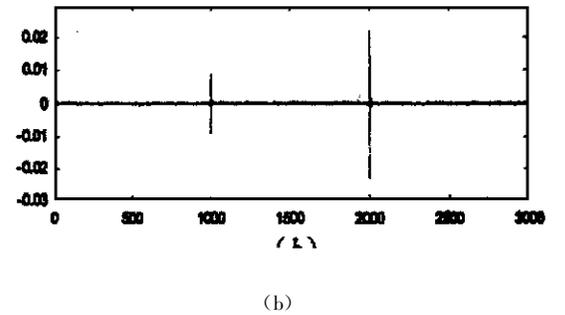
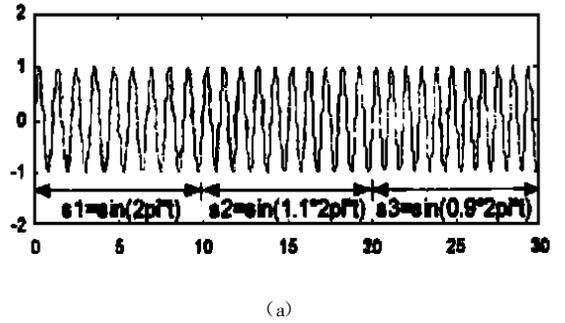


图 1 信号的小波变换

定义 2 在尺度 a 下, 若 $\frac{d}{dt}W_\Psi(a, t)$ 在 t_0 处有一过零点, 则 t_0 是小波变换的局部极值点; 若在某一邻域 $\vartheta_0, \forall t \in \vartheta_0, |W_\Psi f(a, t)| \leq |W_\Psi f(a, t_0)|$, 则 t_0 为小波变换的模极大值点。

下面的定理说明一个函数的 Lipschitz 指数可

(下转第 88 页)

- 杨家本译. 北京: 清华大学出版社, 南宁: 广西科学出版社, 1994
- [3] 宋建社. 小波分析及应用例选. 北京: 现代出版社, 1998. 5
- [4] 韩立岩, 汪培之. 应用模糊数学. 北京: 首都经济贸易大学出版社, 1989. 8
- [5] 刘有才, 刘增良. 模糊专家系统原理与设计. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1995
- [6] 胡昌华, 许化龙. 控制系统故障诊断与容错控制的分析和设计. 北京: 国防工业出版社, 2000. 7
- [7] 张定会, 戴曙光. 混合故障诊断专家系统. 模式识别与人工智能, 2000, 9 (3): 276~279
- [8] 陆正刚, 杨杰. 模糊逻辑及其在数据融合中的应用. 红外与激光工程, 2000, 10 (5): 59~59
- [9] 杨军, 冯振声, 张锡恩, 刘鹏远. 导弹故障智能诊断的一种实现方法. 军械工程学院学报, 2000, 3 (1): 42~44
- [10] 崔吉俊. 火箭导弹测试技术. 北京: 国防工业出版社, 1999. 2
- [11] 徐章遂, 房立清, 王希武, 左宪章. 故障信息诊断原理及应用. 北京: 国防工业出版社, 2000. 7

(责任编辑 蔡炳华)

(上接第 80 页)

以通过它不同尺度上小波变换的绝对值的变化情况来决定。假设小波 $\Psi(t)$ 是连续可微, 并且在无穷远处是速降的。

定理 设 $0 < \alpha < 1$, 函数 $f(t)$ 在 $[t_0, t_b]$ 上一致, Lipschitz 指数 α 的充要条件是存在一个常数 $K > 0$, 使得 $\forall t \in [t_0, t_b]$, 小波变换能满足 $|W_{2^j} f| \leq K (2^j)^\alpha$ 。

由定理得 $\log_2 |W_{2^j} f| \leq \log_2 K + \alpha_j$ 。因此, 如果函数 $f(t)$ 的 Lipschitz 指数 $\alpha > 0$, 则该函数的小波变换模极大值将随着尺度的增大而增大; 反之, 若 $\alpha \leq 0$, 则函数 $f(t)$ 的小波变换模极大值将随着尺度的增大而减小。

下面就对一个一阶微分不连续的信号进行分析。原始信号如图 1(a) 所示, 图 1(b)~(d) 分别是信号在尺度 ($a=2^1, 2^2, 2^3$) 上的小波变换。信号在 $t=10, 20$ 处出现了一阶微分不连续, 小波变换在此两处存在局部模极大值。可见, 该信号的不同尺度下的小波变换, 将信号的一阶微分不连续点显示得相当明显。这个例子有力地说明了小波分析比传统的傅立叶分析有更大的优越性。在傅立叶分析中, 我们在频域中是无法检测出信号在时域中的突变点的。

由此可见, 信号小波变换的模局部极值点精确定位了信号的奇异点, 并对信号的突变现象给予了很准确的定量刻划。从奇异信号在小波变换下的特征分析, 可以有这样的结论: 信号小波变换模极值点即是信号的奇异点, 而描述信号奇异性 Lipschitz 指数是由沿小波变换尺度的变化计算。这对信号分析、特征提取、模式识别等均有重要的应用价值。

参考文献

- [1] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported. Comm. Pure and Appl. Math. 1988; XLI: 909~996
- [2] Daubechies I. The wavelet transform, time frequency localization and signal analysis. IEEE Trans. On Information Theory, 1990, 36(5): 961~1005
- [3] Mallat S. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of L^2 . Trans. IEEE. AMS., 1989, 315: 67~87
- [4] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition; the wavelet representation. IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 674~693
- [5] Mallat S, Hwang W L. Singularity Detection and Processing with Wavelets. IEEE Trans. On Information Theory, 1992, 38(2): 617~643

(责任编辑 蔡炳华)