DOI:10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2004.01.009
第25卷 第1期 固体力学学报 Vol.25 No.1
2004年 3月 ACTA MECHANICA SOLIDA SINICA March 2004

基于小波变换在线结构损伤检测分析研究*

唐和生[1] 薛松涛[1,2] 陈 镕[1] 王远功[1]

([1]同济大学结构工程与防灾研究所,上海,200092)

([2]日本近畿大学理工学部建筑学科,日本)

摘 要 传统的傅立叶变换只能确定一个函数奇异性的整体性质,而难以确定奇异点在空间的位置及分布情况.小波变换具有空间局部化性质,利用小波变换来分析信号的奇异性及奇异性位置和奇异度的大小是比较有效的.在结构发生损伤时,结构的刚度发生了变化,因此结构动力响应的在线监测信号相应的发生了间断点,由于小波分析具有刻划信号局部特征的作用,通过对结构响应进行小波分解以后可以确定结构是否出现损伤以及确定损伤发生的时刻.

关键词 小波变换,傅立叶变换,在线,损伤检测

0 引言

当前对小波变换的理论研究正方兴未艾,应用研究也越来越广泛.在信号分析与处理领域,小波变换是一种强有力的数学分析工具.小波变换在时域和频域都具有很好的局部化性质,较好地解决了时间和频率分辨率的矛盾;对信号的低频成分,可用宽时窗使得时域分辨率低而频域分辨率高,对信号的高频成分,则可用窄时窗使得时域分辨率高而频域分辨率低.小波变换这种自适应分辨分析的优良性质,使它在信号处理领域的很多方面,如地震信号处理、语音分析与合成、信号的奇异性检测与谱估计及图像处理等都取得了成功的应用.由于小波变换在时频域有很好的局部化性质,故它是研究时频分析的重要工具[1].

传统的基于傅立叶变换的时频信号分析方法仅能提供信号的平均统计结果,难以准确描述局部微弱的特征.小波变换具有优良"变焦"性能的时频局部化特性,是进行故障奇异信号分析和提取特征的有效工具.结构损伤体现在结构物理参数的改变,相对应的动力响应在结构的刚度变化时产生局部突变.小波分析具有对信号多分辨率分析能力和时频局部化性质,很容易把信号中的奇异部分提出来,从而进行确定奇异信号位置,这对于结构损伤实时监测信号的奇异性检测非常有效.

1 Fourier变换和小波变换与函数的奇异性分析

经典Fourier分析的本质是把相当任意的函数$f(t)$表示为具有不同频率的谐波函数的线性叠加,是一种纯频域分析.它的明显不足是缺乏空间局部性,在许多工程问题中,我们所关心的恰恰是信号的局部特征.尽管加窗可以突出变换的局部特征,但是一旦窗口函数取定,窗口的形状、大小也随之确定.我们只能得到信号在窗口区间内的总信息,如果在信号内有短时、高频成分,这种变换就不是非常有效的.

1.1 Fourier变换与函数的奇异性

在信号检测中,信号的突变部分(也就是函数变化剧烈的部位)常包含有很重要的故障信息,Fourier变换是处理这类问题的基本工具.若函数在某处有间断或某阶导数不连续,则称函数在此处有奇异性.

考虑一具有紧支集的光滑函数$f(t)$(用C^{∞}表示全体光滑函数所构成的集合),即

$$\operatorname{supp} f(t) = [t_a, t_b] \tag{1}$$

由于$f(t)\in C^{\infty}$,利用分部积分有[2]

$$f(\omega) = \frac{1}{(\mathrm{i}\omega)^N}\int_{t_a}^{t_b} f^{(N)}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{2}$$

式中$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b} f^{(N)}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$.

---

* 国家杰出青年科学基金(59925820)资助.

2002-07-24收到第1稿,2003-04-01收到修改稿.

因此 $f(\omega)=O\left(1/|\omega|^{N}\right)$，$|\omega|\to\infty$. 式中 N 是任意自然数.

由此可见，若 $f(t)$ 是光滑函数，则其 Fourier 变换(当 $|\omega|\to\infty$ 时)趋于零的速度要比 $1/|\omega|$ 的任意次幂快.

设 $f(t)$ 在 t_0($t_a< t_0< t_b$)处存在间断点(即 $f(t_0-0)\neq f(t_0+0)$)，则有

$$f(\omega)=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{t_a}^{t_0-0}-\frac{1}{\mathrm{i}\omega}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{t_0+0}^{t_b}+\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\int_{t_a}^{t_b}f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}[f(t_0+0)-f(t_0-0)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}+O\left(\frac{1}{|\omega|}\right) \tag{3}$$

由此可见，$f(t)$ 趋于零的速度只能是 $O(1/|\omega|)$. 类似地，若 $f(t)$ 在 t_0 处连续，但其一阶导数不连续，则其 Fourier 变换 $f(\omega)$ 趋于零的速度只能是 $O\left(1/|\omega|^2\right)$. 一般情况下，若 $f(t)$ 在 t_0 处的 $k-1$ 阶导数连续，但 k 阶导数有间断，则其 Fourier 变换 $f(\omega)$ 趋于零的速度只能是 $O\left(1/|\omega|^{k+1}\right)$. 也就是说一个函数的 Fourier 变换趋于零的快慢可以推断该函数是否有奇异性及奇异性之强弱. 然而我们所关心的问题是如何提取信号中的突变点的位置及判断其奇异性(或光滑性). 由于 Fourier 变换缺乏空间局部性，因此由函数的 Fourier 变换只能确定其奇异性的整体性质而难以确定其奇异性的空间分布情况. 也就是说当函数有许多奇点时，用 Fourier 变换难以确定各奇点的位置及各奇点奇异性的强弱.

1.2 多尺度小波变换与奇异信号

对于函数 $f(t)\in L^2(R)$ 的连续小波变换(CWT)的定义为[1,3,4]

$$W_{a,b}(f)=\int_R f(t)\,\psi_{a,b}^{*}(t)\mathrm{d}t \tag{4}$$

式中 $\psi_{a,b}^{*}(t)$ 表示 $\psi_{a,b}(t)$ 的共轭函数. $\psi_{a,b}(t)$ 为母小波 $\psi(t)$ 进行伸缩和平移变换后得到的下列函数族

$$\psi_{a,b}(t)=|a|^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{5}$$

其中 a 为伸缩尺度因子，b 为平移因子，$a, b\in R$，且 $a\neq 0$.

用窗函数的时频特点来分析小波变换的时频特性，窗函数在时域和频域上都已局部化，故可用作对信号进行时频局部化分析的基本函数. 它所确定的窗口是对其局部特性的刻画，即窗函数本身可用它的窗口尺寸来表征其局部特性，由于小波基函数在时、频域都具有有限或近似有限的定义域，显然，经过伸缩平移后的函数在时、频域仍是局部性的. 小波变换和傅氏变换一样，其正反变换具有对称性，因此，小波变换是傅氏变换的新发展，它不仅保留了傅氏变换的优点，且在时间上和频率上均可进行局部分析，并开拓了许多新的应用领域. 瞬态信号的突变点(信号变化急剧之处)常包含有很重要的故障信息，例如，结构损伤、机械故障、电力系统故障、脑电图心电图中的异常、地下目标的位置及形状等，都对应于测试信号的突变点，虽然它们发生的背景不同，但如果将测得的数据作为一个信号来看的话，我们所关心的是如何提取信号中的突变点的位置及判定其奇异性的问题.

信号突变点在小波变换域常对应于小波变换系数模的极大值点或过零点，并且信号奇异的大小是通过小波变换系数的极值随尺度的变化规律相对应的[5~8]，因此，将小波变换应用于对信号的瞬态特征描述是极有意义的. 目前，小波变换在上述各领域获得了广泛的应用.

小波变换由于同时具有时域和频域的局部性，加上小波变换具有“变焦”的特性，因此，它对信号的奇异点位置的确定很有效. Mallat[7] 等人建立了小波变换与刻化信号奇异性的 Lipschitz 指数之间的密切关系. 在数学上，信号的奇异性是由 Lipschitz 指数来刻化的.

定义　设 n 为正整数，若存在常数 $A>0$ 及 n 次多项式 $p_n(t)$，有

$$|f(t_0+h)-p_n(t_0)|\leqslant A|h|^{\alpha}\qquad n<\alpha<n+1 \tag{6}$$

则称 $f(t)$ 在 t_0 处的 Lipschitz 指数为 α，式中 h 是一个充分小量. 如果在区间 $[a, b]$，则要求当区间 $[a, b]$ 内的任意两点 t_0 和 t_0+h 都满足条件(6)时，称 $f(t)$ 在此区间为均匀 Lipschitz α. 当 $f(t)$ 在 t_0 处不是 Lipschitz 1 时，则称 $f(t)$ 在 t_0 处是奇异的. 如果 $f(t)$ 在 t_0 处不连续但有界，则称 Lipschitz 指数为 0，Lipschitz 指数越大，则 $f(t)$ 越光滑.

一般来讲，函数在某一点的李氏指数表征了该点的奇异性大小，α 越大，该点的光滑度越高；α 越小，该点的奇异性越大. 如果函数 $f(t)$ 在某一点可导，它的 $\alpha\geqslant 1$；如果 $f(t)$ 在某点不连续但其值有限，

则 $0\leqslant\alpha\leqslant1$. 对于脉冲函数, $\alpha=-1$; 而对于白噪声, $\alpha\leqslant0$. 根据某点的 Lipschitz 指数同该点的小波变换模极大值之间的关系, 从而判断其奇异性大小.

信号的突变点在不同尺度上都会产生对应的模极大值. 在任意尺度上模极大值对应于信号在尺度上平滑后该点一阶导数的大小. 小波理论表明, 模极大值的幅值随着尺度的变化规律是由信号在该突变点的局部李氏指数决定的. 当信号突变点非奇异时, 可以通过估计小波变换模极大值随尺度的变化来测得信号的光滑度.

首先来分析具有不连续性的突变点(称之为奇异点)的李氏指数同小波变换模极大值之间的关系. 假设小波函数 $\psi(t)$ 是连续可微的, 并且在无限远处的衰减速率为 $O(1/(1+t^2))$. Mallat 证明[7, 8]: 设 t 在区间 $[t_a, t_b]$ 中, 如果 $f(t)$ 的小波变换满足

$$|W_a f(t)| \leqslant k a^{\alpha} \tag{7}$$

也就是

$$\log|W_a f(t)| \leqslant \log k + \alpha \log a \tag{8}$$

其中 k 是一个常数, 则 $f(t)$ 在区间 $[t_a, t_b]$ 中的李氏指数均匀为 α. 当 $a=2^j$ 时, 上式变成

$$|W_{2^j} f(t)| \leqslant k(2^j)^{\alpha} \tag{9}$$

或

$$\log_2|W_{2^j} f(t)| \leqslant \log_2 k + j\alpha \tag{10}$$

式中 $j\alpha$ 这一项把小波变换的尺度特征 j 与 Lipschitz 指数 α 联系了起来. 式(8)给出了小波变换的对数值随尺度 j 或 α 的变化规律.

由上述可知如果信号 $f(t)$ 在 t_0 点是突变点, 那么在各个尺度上 t_0 点附近的 $|W_{2^j} f(t)|$ 都会产生一个局部极大值点, 并且随着尺度的减小, 这些模的局部极大值点收敛于 t_0. 因此, 我们可利用小波变换模极大值检测出信号 $f(t)$ 上的所有突变点, 而且, 还可根据小波变换模极大值随尺度的增加(或衰减)的变化规律测得突变点局部的李氏指数, 也可测得突变点奇异性的大小.

在结构发生损伤时, 结构的刚度发生了变化, 因此结构动力响应的在线监测信号相应的发生了间断点. 通过对结构响应进行小波分解所得的高频信号可以看出结构是否出现损伤, 以及损伤发生的时刻.

2　结构损伤识别数值模拟

下面对一单自由度的结构模型进行在线损伤检测数值模拟, 假设结构的损伤仅由结构的刚度变化形成而质量不变, 分别就不同的刚度变化曲线进行模拟, 以此来说明能够用小波分析确定损伤的时间定位. 如图 1 所示是一在线测试结构简图, 被监测结构通过传感器与分析计算机联接, 由分析计算机对实时信号进行分析处理.

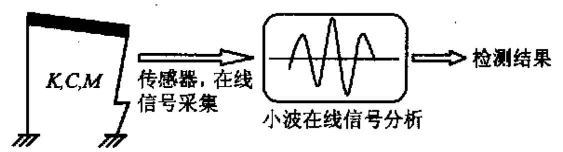

图 1　结构损伤在线检测

(1) 刚度在受激振过程中有突变情况

在此情况下结构的刚度在受激振的过程中发生了几次小的突变, 在对传感器传回来的动力响应, 经过小波分析很精确对损伤的时间定位. 结构初始刚度 $K=72$ N/m, $C=3.2$, $M=2$ kg, 采样频率为 $f_s=100$ Hz, 激振信号如图 2 所示, 结构的响应信号如图 3 所示, 结构的刚度变化曲线如图 4 所示. 用 coif5 小波[9] 对加速度响应进行了 3 层小波分解变换, 得到它的概貌信号 (a_1, a_2, a_3) 和细节信号也即高频信号 (d_1, d_2, d_3) 如图 5(a) ~ 5(d) 所示.

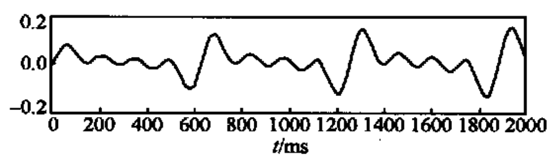

图 2　结构受激振信号

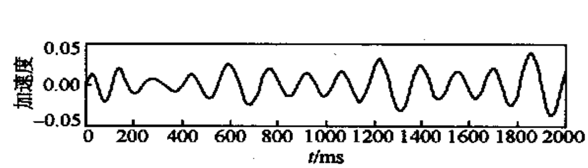

图 3　结构受激振后的动力响应

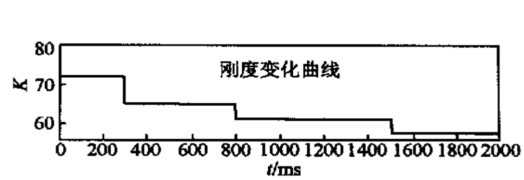

图 4　结构刚度时变曲线(突变情况)

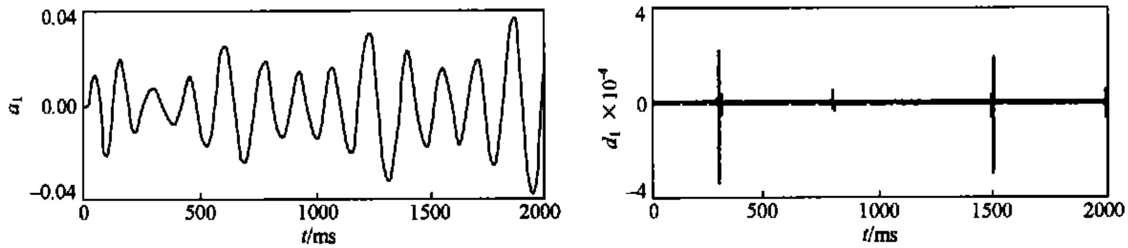

图 5(a)　第一层分解的低频概貌和高频细节信号

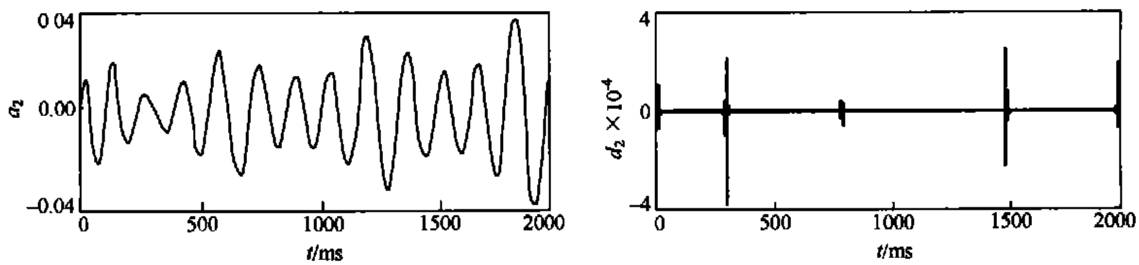

图 5(b)　第二层分解的低频概貌和高频细节信号

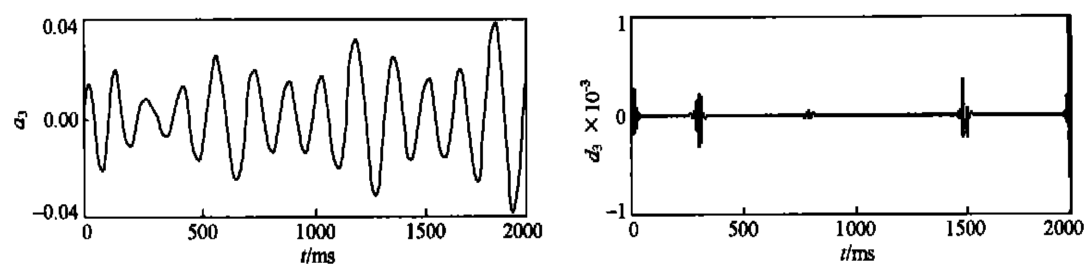

图 5(c)　第三层分解的低频概貌和高频细节信号

从上面的小波分析的结果我们可看出, 对于存在不连续的刚度变化时, 只要经过对加速度信号进行一层小波分解就可以精确的定位刚度变化的时间点, 用 Fourier 分析是做不到的.

(2) 刚度在受激振过程中光滑变化情况

下面分析结构的刚度在激振过程中存在比较光滑的改变(连续且可导)如图 6 所示, 结构受激振同上面相同. 用 coif5 小波对加速度响应进行了 3 层分解变换, 得到它的概貌信号(a_1, a_2, a_3)和细节信号也即高频信号(d_1, d_2, d_3)如图 7(a)~7(c)所示.

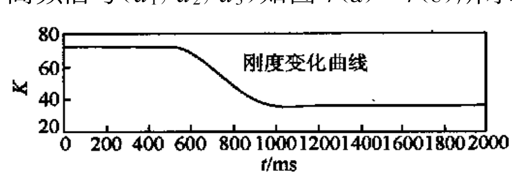

图 6　结构刚度时变曲线(光滑情况)

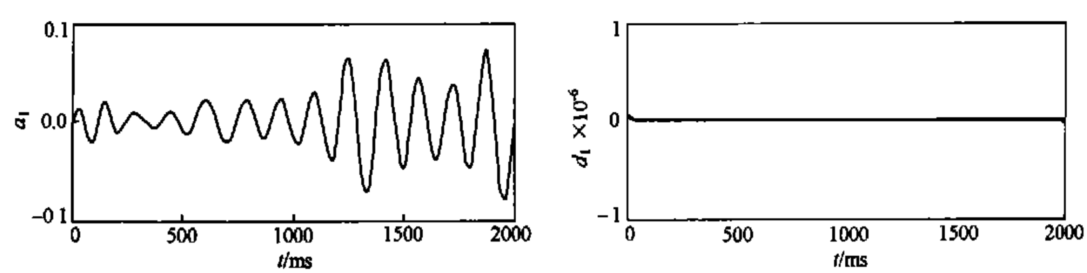

图 7(a)　第一层分解的低频概貌和高频细节信号

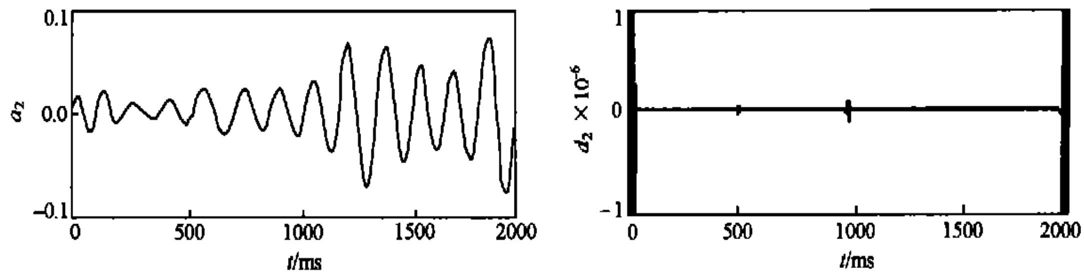

图 7(b)　第二层分解的低频概貌和高频细节信号

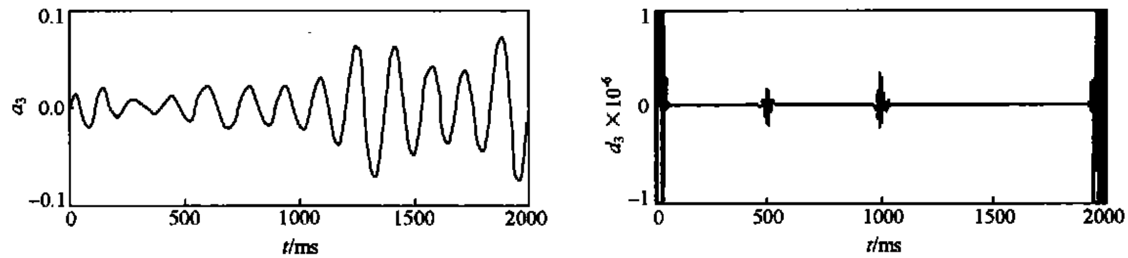

图 7(c)　第三层分解的低频概貌和高频细节信号

从上面的小波分析的结果我们可看出，对于存在连续且可导的刚度变化与情况(1)不连续的刚度变化，在对加速度信号进行小波分解时，第二种情况在第一层分解时如图 7(a)所示没法判断其损伤的时间定位，但是在第二层分解时就可以精确的定位刚度变化的时间点，所以在对损伤的定位时经常要经过至少三层以上的分解，经过多层的极大值模分析才能准确定位. 另外要说明的是，在进行信号处理时，信号两端由于是直接截取而没有采取光滑处理，因此产生了 Gibbs 现象[10].

3　结论

本文对小波分析的奇异信号检测进行了探讨. 并且进行了基于小波分析的在线结构损伤检测方法的数值模拟研究，得出如下一些主要结论：

(1) 傅立叶变换是研究函数奇异性的主要工具，它是研究函数在傅立叶变换域的衰减以推断函数是否具有奇异性及奇异性的大小，但是傅立叶变换缺乏空间局部性，只能确定一个函数奇异性的整体性质，而难以确定奇异点在空间的位置及分布情况. 小波变换具有空间局部化性质，因此，利用小波变换来分析信号的奇异性及奇异性位置和奇异度的大小是比较有效的.

(2) 当结构发生损伤时，结构的刚度发生了变化，因此动力响应相应的产生了间断点，而傅立叶分析判断信号的奇异性是从整体来进行分析，因此淹没了结构动力响应信号存在的奇异性. 小波分析弥补了这一缺点，对结构损伤在线监测定位非常有效. 对于存在孤立的奇异点信号，定位效果更好.

(3) 数值模拟的算例表明，小波分析可以提取结构的损伤信号：结构的损伤或者结构系统刚度的变化可以通过对结构响应进行小波分解得到的细节(高频)信号的变化来检测；并且，这些高频信号在时间轴的位置可以准确表示损伤发生的时刻.

参　考　文　献

1　Chui C K. An introduction to wavelets. Academic Press Limited, 1992

2　唐和生，薛松涛，谢强. 基于小波变换的奇异信号分析. 上海海运学院学报，2001，22(3)：78～80，88

3　Daubechies I. Orthonomal bases of compactly supported wavelet. Comm on Pure and App1 Math, 1988, 41：909～996

4　Strang G. Wavelet and dilation equations, a brief introduction. SIAM Review, 1989, 31：614～627

5　Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition: The wavelet transform. IEEE Trans, 1989, PAMI-11(7)：674～693

6　Daubechies I. The wave1et transform, time-frequency localization and signal analysis. IEEE Trans, 1990, IT-36(5)：961～1005

7　Mallat S et a1. Singularity detection and processing with wavelets. IEEE Trans, 1992, IT-38(2)：617～643

8 Mallat S. Zero-crossing of a wavelet transform. IEEE Trans, 1991, IT-37(4): 1019 ~ 1033
9 杨福生. 小波变换的工程分析与应用. 北京: 科学出版社, 2000
10 张贤达. 现代信号处理. 北京: 清华大学出版社, 2001

ANALYSES OF ONLINE STRUCTURAL DAMAGE DETECTION BASED ON WAVELET TRANSFORM

Tang Hesheng[1] Xue Songtao[1,2] Chen Rong[1] Wang Yuangong[1]
([1] *Research Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Tongji University, Shanghai, 200092*)
([2] *Department of Architecture, School of Science and Engineering, Kinki University, Osaka, Japan*)

Abstract Traditional Fourier transform is almost impossible to point out the singularity location and distribution of a function with singularity. However, wavelet transform has the characteristic to pick out the singularity from the whole signal with singular property. A wavelet-based approach is proposed for online structural damage detection. In the case of abrupt damage, occurrence of the damage and the moment when it occurs can be determined by the wavelet decomposition of those data. It shows that structural damage or a change in system stiffness may be detected by spikes in the details of the wavelet decomposition of the response data, and the locations of these spikes may accurately indicate the moments when the structural damage occurred.

Key words wavelet transform, Fourier transform, online, damage detection