

文章编号: 1000-0887(2005)11-1314-09

无约束平面框架结构冲击响应 分析(I)——公式推导*

陈 蓉^{1,2}, 郑海涛¹, 薛松涛^{1,2,3}, 唐和生^{1,2}

- (1. 同济大学 结构工程与防灾研究所, 上海 200092;
2. 同济大学 空天技术中心, 上海 200092;
3. 日本近畿大学 理工学部建筑学科, 日本大阪 577-8502)

(我刊原编委何福保推荐)

摘要: 运用广义 Fourier 级数方法推导了无约束平面框架结构受运动刚体冲击时的瞬态动力响应公式, 利用这些公式得到冲击系统动力响应解析解。在公式推导过程中得出结构系统中弹性响应的动量之和为零的结论。从公式推导可以看出, 模态分析法同样可以用来解决此类冲击问题。

关键词: 无约束平面框架结构; 冲击响应; 刚性响应; 弹性响应

中图分类号: O347.1 **文献标识码:** A

引 言

近年来, 在约束结构受冲击作用时瞬态响应和应力波传播问题上已经有了很多的研究^{1,2}, 然而, 关于无约束结构的冲击分析, 则鲜见公开发表的研究文献。无约束结构多为空间结构, 而且常为十分重要的结构, 如在微重力、零重力情况下运行的航天器、太空站、实验卫星等。当这类结构受到物体冲击时, 即使是荷载不大的冲击, 也会对结构的运行或结构所承担的实验任务产生严重的影响甚至导致实验失败, 因此, 对于此类无约束结构的冲击响应问题就必须运用精确方法进行分析。其研究成果则可以应用于航天器的对接、空间站或实验卫星的振动控制等航天技术领域。

作者曾经分别对无约束杆的纵向冲击、无约束 Timoshenko 梁的横向冲击问题进行了分析³, 得到了冲击响应的解析解, 并得出冲击响应中弹性响应动量之和为零的结论。对于无约束杆系结构受到运动刚体冲击的问题, 是否可以用相同的方法(广义 Fourier 级数方法)求解冲击响应? 冲击系统是否遵循同样的规律? 计算结果是否可以清晰地阐明构件中应力波的传播现象? …带着这些问题, 本文对一个无约束平面框架结构受到一运动刚体冲击的问题进行了分析。本文分为两部分, 第 I 部分推导了无约束平面框架结构受运动刚体冲击时的瞬态动力响应公式, 第 II 部分为数值算例分析。

* 收稿日期: 2003-05-19; 修订日期: 2005-07-01

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(59925820)

作者简介: 陈蓉(1944—), 男, 江苏人, 教授, 博士(联系人, Tel: +86-21-65982390; E-mail: chenrong@mail.tongji.edu.cn)。

1 冲击系统

考虑一个对称的无约束平面矩形框架结构(如图 1 所示),其长为 L , 宽为 $L/2$ 。在框架的对称轴上(B 点处)受到一质量 M_0 、速度 S_0 的运动刚体沿对称轴方向(BE 杆轴向)的冲击。结构中的节点 $A、C、D、F$ 为铰接节点;节点 $B、E$ 为刚接节点。将 $AD、CF$ 作为杆单元分析;由于结构和荷载的对称性,构件 BE 中只产生轴向变形而不产生横向位移,因此可以与 AD 和 CF 一样看成是杆单元;构件 $AC、DF$ 采用 Timoshenko 梁理论,考虑梁的剪切变形。

将运动刚体和无约束矩形框架结构看成一个接触-冲击系统,由于结构和荷载的对称性,可以选取半边结构进行分析(如图 2 所示)。分别记梁 AB 、梁 DE 为梁 1、梁 2;记杆 DA 、杆 EB 为杆 3、杆 4。对构件 1、2、3、4 分别采用局部坐标系 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 、 (x_4, y_4) , 各坐标系原点 $O_1、O_2、O_3、O_4$ 分别为节点 $A、D、D、E$ 。

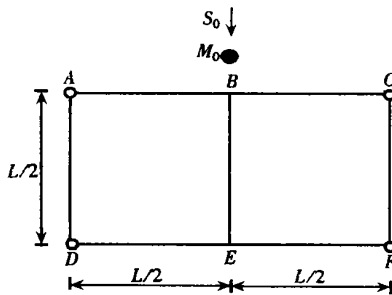


图 1 冲击系统

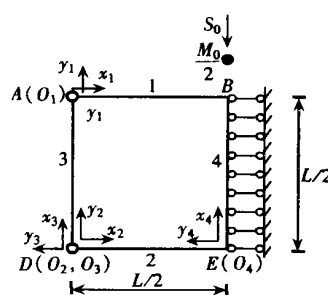


图 2 等效冲击系统

2 振型函数

2.1 Timoshenko 梁的振型函数

Timoshenko 梁微元的运动方程为:

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + kAG \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} - \psi \right\} - \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - kAG \left\{ \frac{\partial v}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} = 0, \quad (2)$$

式中: $v(x, t)$ 为横向位移; $\psi(x, t)$ 为截面由弯曲产生的转角; E 为弹性模量; G 为剪切弹性模量; I 为横截面惯性矩; A 为横截面面积; ρ 为密度; k 为取决于横截面形状的数值因子。

梁 1、梁 2 的横向位移和弯曲转角可以写成:

$$v_i(\xi_i, t) = V_i(\xi_i, p) \sin pt, \quad (3)$$

$$\psi(\xi_i, t) = \Psi_i(\xi_i, p) \sin pt, \quad (4)$$

其中 $i = 1, 2$, 分别表示梁 1 和梁 2; $\xi_i = x_i/L$ 为梁 1 和梁 2 的无量纲坐标; p 为冲击系统的圆频率; L 为矩形框架结构的长。

经过推导, 梁 1 和梁 2 的横向位移和弯曲转角振型函数可以写成如下的形式^[4]:

$$V_i(\xi_i) = C_{i1} \cos(b_i \alpha_i \xi_i) + C_{i2} \sin(b_i \alpha_i \xi_i) + C_{i3} \cos(b_i \beta_i \xi_i) + C_{i4} \sin(b_i \beta_i \xi_i), \quad (5)$$

$$\Psi_i(\xi_i) = D_{i1} \sin(b_i \alpha_i \xi_i) + D_{i2} \cos(b_i \alpha_i \xi_i) + D_{i3} \sin(b_i \beta_i \xi_i) + D_{i4} \cos(b_i \beta_i \xi_i), \quad (6)$$

式中

$$\alpha_i = \left[\frac{r_i^2 + s_i^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{r_i^2 - s_i^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{b_i^2}} \right]^{1/2}, \quad b_i^2 = \frac{1}{E_i I_i} \rho_i A_i L^4 p^2, \quad r_i^2 = \frac{I_i}{A_i L^2}, \quad s_i^2 = \frac{E_i I_i}{k_i A_i G_i L^2}.$$

并且可以推得(5)、(6)式中的系数 $C_{i1} \sim C_{i4}$ 和 $D_{i1} \sim D_{i4}$ 之间满足以下关系^[4]:

$$C_{i1} = \frac{L \alpha_i}{b_i} \cdot \frac{1}{s_i^2 - \alpha_i^2} D_{i1}, \quad C_{i2} = \frac{L \alpha_i}{b_i} \cdot \frac{1}{s_i^2 - \alpha_i^2} D_{i2},$$

$$C_{i3} = \frac{L \beta_i}{b_i} \cdot \frac{1}{s_i^2 - \beta_i^2} D_{i3}, \quad C_{i4} = \frac{L \beta_i}{b_i} \cdot \frac{1}{s_i^2 - \beta_i^2} D_{i4}.$$

2.2 杆的振型函数

杆微元的纵向运动方程为:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (7)$$

杆3和杆4的纵向位移可以设为:

$$u_j(x_j, t) = U_j(\xi_j, p) \cdot \sin pt, \quad (8)$$

其中 $j = 3, 4$, 分别表示杆3和杆4; ξ_j 和 p 的定义同梁中规定一样。

将(8)式代入(7)中, 可得杆3和杆4的纵向位移振型函数:

$$U_j(\xi_j) = D_{j1} \cdot \cos(\Omega_j \xi_j) + D_{j2} \cdot \sin(\Omega_j \xi_j), \quad (9)$$

式中: $\Omega_j = b_j \cdot r_j$, $b_j^2 = \rho_j A_j L^4 p^2 / E_j I_j$, $r_j^2 = I_j / A_j L^2$ 。

3 边界条件

对于图2所示的等效冲击系统, 各节点的平衡条件和协调条件如下:

节点A的平衡条件:

$$k_1 A_1 G_1 \cdot \left. \left(\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1} - \Psi_1 \right) \right|_{\xi_1=0} = E_3 A_3 \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial U_3}{\partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=1/2}, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=0} = 0. \quad (10)$$

节点B的平衡条件:

$$k_1 A_1 G_1 \cdot \left. \left(\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1} - \Psi_1 \right) \right|_{\xi_1=1/2} - \frac{1}{2} \cdot M_0 \cdot p^2 \cdot V_1 \Big|_{\xi_1=1/2} =$$

$$- E_4 \cdot \frac{A_4}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial U_4}{\partial \xi_4} \Big|_{\xi_4=1/2}, \quad \Psi_1 \Big|_{\xi_1=1/2} = 0. \quad (11)$$

节点D的平衡条件:

$$k_2 A_2 G_2 \cdot \left. \left(\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial \xi_2} - \Psi_2 \right) \right|_{\xi_2=0} = - E_3 A_3 \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial U_3}{\partial \xi_3} \Big|_{\xi_3=0}, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=0} = 0. \quad (12)$$

节点E的平衡条件:

$$k_2 A_2 G_2 \cdot \left. \left(\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial \xi_2} - \Psi_2 \right) \right|_{\xi_2=1/2} = E_4 \cdot \frac{A_4}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial U_4}{\partial \xi_4} \Big|_{\xi_4=0}, \quad \Psi_2 \Big|_{\xi_2=1/2} = 0. \quad (13)$$

节点A的协调条件:

$$V_1 \Big|_{\xi_1=0} = U_3 \Big|_{\xi_3=1/2}. \quad (14)$$

节点B的协调条件:

$$V_1 \Big|_{\xi_1=1/2} = U_4 \Big|_{\xi_4=1/2}. \quad (15)$$

节点 D 的协调条件:

$$V_2 \Big|_{\xi_2=0} = U_3 \Big|_{\xi_3=0} \quad (16)$$

节点 E 的协调条件:

$$V_2 \Big|_{\xi_2=1/2} = U_4 \Big|_{\xi_4=0} \quad (17)$$

4 特征方程和固有频率

将(5)、(6)式和(9)式代入以上边界条件(10)式~(17)式, 联立 C_j 与 D_{ij} ($i, j = 1, \dots, 4$) 关系式; 并引入梁 AC 与运动刚体的质量比 $\lambda = \rho_1 A_1 L / M_0$, 可以得到关于振型函数中系数的齐次线性方程:

$$\frac{s_1^2}{\alpha_1^2 - s_1^2} D_{12} + \frac{s_1^2}{\beta_1^2 - s_1^2} D_{14} + \frac{E_3 A_3 \cdot b_3 r_3}{k_1 A_1 G_1 \cdot L} \left(\sin \frac{b_3 r_3}{2} D_{31} - \cos \frac{b_3 r_3}{2} D_{32} \right) = 0, \quad (18)$$

$$b_1 \alpha_1 D_{11} + b_1 \beta_1 D_{13} = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{s_1^2}{\alpha_1^2 - s_1^2} \left(\sin \frac{b_1 \alpha_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1 \alpha_1}{\lambda} \cdot \cos \frac{b_1 \alpha_1}{2} \right) D_{11} + \\ & \frac{s_1^2}{\alpha_1^2 - s_1^2} \left\{ \cos \frac{b_1 \alpha_1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1 \alpha_1}{\lambda} \cdot \sin \frac{b_1 \alpha_1}{2} \right\} D_{12} + \\ & \frac{s_1^2}{\beta_1^2 - s_1^2} \left\{ \sin \frac{b_1 \beta_1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1 \beta_1}{\lambda} \cdot \cos \frac{b_1 \beta_1}{2} \right\} D_{13} + \\ & \frac{s_1^2}{\beta_1^2 - s_1^2} \left\{ \cos \frac{b_1 \beta_1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1 \beta_1}{\lambda} \cdot \sin \frac{b_1 \beta_1}{2} \right\} D_{14} - \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{E_4 A_4 \cdot b_4 r_4}{k_1 A_1 G_1 \cdot L} \left(\sin \frac{b_4 r_4}{2} D_{41} - \cos \frac{b_4 r_4}{2} D_{42} \right) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\sin \frac{b_1 \alpha_1}{2} D_{11} + \cos \frac{b_1 \alpha_1}{2} D_{12} + \sin \frac{b_1 \beta_1}{2} D_{13} + \cos \frac{b_1 \beta_1}{2} D_{14} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{s_2^2}{\alpha_2^2 - s_2^2} D_{22} + \frac{s_2^2}{\beta_2^2 - s_2^2} D_{24} + \frac{E_3 A_3 \cdot b_3 r_3}{k_2 A_2 G_2 \cdot L} D_{32} = 0, \quad (22)$$

$$b_2 \alpha_2 D_{21} + b_2 \beta_2 D_{23} = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{s_2^2}{\alpha_2^2 - s_2^2} \sin \frac{b_2 \alpha_2}{2} D_{21} + \frac{s_2^2}{\alpha_2^2 - s_2^2} \cos \frac{b_2 \alpha_2}{2} D_{22} + \frac{s_2^2}{\beta_2^2 - s_2^2} \sin \frac{b_2 \beta_2}{2} D_{23} + \\ & \frac{s_2^2}{\beta_2^2 - s_2^2} \cos \frac{b_2 \beta_2}{2} D_{24} - \frac{1}{2} \cdot \frac{E_4 A_4 \cdot b_4 r_4}{k_2 A_2 G_2 \cdot L} D_{42} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sin \frac{b_2 \alpha_2}{2} D_{21} + \cos \frac{b_2 \alpha_2}{2} D_{22} + \sin \frac{b_2 \beta_2}{2} D_{23} + \cos \frac{b_2 \beta_2}{2} D_{24} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{L \alpha_1}{b_1} \cdot \frac{1}{\alpha_1^2 - s_1^2} D_{11} + \frac{L \beta_1}{b_1} \cdot \frac{1}{\beta_1^2 - s_1^2} D_{13} + \cos \frac{b_3 r_3}{2} D_{31} + \sin \frac{b_3 r_3}{2} D_{32} = 0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{L \alpha_1}{b_1} \cdot \frac{1}{\alpha_1^2 - s_1^2} \cos \frac{b_1 \alpha_1}{2} D_{11} - \frac{L \alpha_1}{b_1} \cdot \frac{1}{\alpha_1^2 - s_1^2} \sin \frac{b_1 \alpha_1}{2} D_{12} + \\ & \frac{L \beta_1}{b_1} \cdot \frac{1}{\beta_1^2 - s_1^2} \cos \frac{b_1 \beta_1}{2} D_{13} - \frac{L \beta_1}{b_1} \cdot \frac{1}{\beta_1^2 - s_1^2} \sin \frac{b_1 \beta_1}{2} D_{14} + \\ & \cos \frac{b_4 r_4}{2} D_{41} + \sin \frac{b_4 r_4}{2} D_{42} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{L \alpha_2}{b_2} \cdot \frac{1}{\alpha_2^2 - s_2^2} D_{21} + \frac{L \beta_2}{b_2} \cdot \frac{1}{\beta_2^2 - s_2^2} D_{23} + D_{31} = 0, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{L \alpha_2}{b_2} \cdot \frac{1}{\alpha_2^2 - s_2^2} \cdot \cos \frac{b_2 \alpha_2}{2} \cdot D_{21} - \frac{L \alpha_2}{b_2} \cdot \frac{1}{\alpha_2^2 - s_2^2} \cdot \sin \frac{b_2 \alpha_2}{2} \cdot D_{22} + \\ & \frac{L \beta_2}{b_2} \cdot \frac{1}{\beta_2^2 - s_2^2} \cdot \cos \frac{b_2 \beta_2}{2} \cdot D_{23} - \frac{L \beta_2}{b_2} \cdot \frac{1}{\beta_2^2 - s_2^2} \cdot \sin \frac{b_2 \beta_2}{2} \cdot D_{24} + D_{41} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

上述(18)式~(29)式可以写成矩阵形式,记为

$$A \cdot d = 0, \quad (30)$$

其中 $d = (D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24}, D_{31}, D_{32}, D_{41}, D_{42})^T$ 是由各构件的位移和转角振型函数 $V_1(\xi_1)$ 、 $\Psi_1(\xi_1)$ 、 $V_2(\xi_2)$ 、 $\Psi_2(\xi_2)$ 、 $U_3(\xi_3)$ 、 $U_4(\xi_4)$ 中系数组成的向量;

由于各构件的参数不同,故即使结构在以同一自振频率 p 振动时各构件的无量纲频率 b_k , $k = 1, \dots, 4$ 亦各不相同,为了简单且能说明问题起见,这里取所有构件的截面性质均相同,则各构件的无量纲频率 b_k , $k = 1, \dots, 4$ 均相同,以下记为 b 。

对于矩阵方程(30)式,只有当行列式 $|A|$ 为 0 时才有非 0 解。令 $f(b) = |A|$, 则

$$f(b) = |A| = 0, \quad (31)$$

就是冲击系统的特征方程(即频率方程),方程有无穷多个正实数根(即无量纲固有频率) b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, 这无穷多个特征根对应于冲击系统的无穷多阶固有频率 p_n , $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$p_n^2 = \frac{EI}{\rho AL^4} b_n^2. \quad (32)$$

对于每个特征根 b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, 可以求得对应的“特征向量”:

$$d_n = (D_{11, n}, D_{12, n}, D_{13, n}, D_{14, n}, D_{21, n}, D_{22, n}, D_{23, n}, D_{24, n}, D_{31, n}, D_{32, n}, D_{41, n}, D_{42, n})^T. \quad (33)$$

在一般的结构振动分析中,特征向量就表示振型^[5],而此处的“特征向量”则与之不同,是用矩阵理论求解矩阵方程(30)式所得到的特征向量,表示的是每阶振型函数 $V_{1, n}(\xi_1)$ 、 $\Psi_{2, n}(\xi_1)$ 、 $V_{2, n}(\xi_2)$ 、 $\Psi_{2, n}(\xi_2)$ 、 $U_{3, n}(\xi_3)$ 、 $U_{4, n}(\xi_4)$ 中的系数所组成的向量。利用 C_{ij} 与 D_{ij} 关系式,可以确定每个特征根对应的振型函数:

$$\begin{aligned} V_{1, n}(\xi_1) &= \frac{L \alpha_n}{b_n} \cdot \frac{1}{s^2 - \alpha_n^2} \cdot D_{11, n} \cdot \cos(b_n \alpha_n \xi_1) - \frac{L \alpha_n}{b_n} \cdot \frac{1}{s^2 - \alpha_n^2} \cdot D_{12, n} \cdot \sin(b_n \alpha_n \xi_1) + \\ & \frac{L \beta_n}{b_n} \cdot \frac{1}{s^2 - \beta_n^2} \cdot D_{13, n} \cdot \cos(b_n \beta_n \xi_1) - \frac{L \beta_n}{b_n} \cdot \frac{1}{s^2 - \beta_n^2} \cdot D_{14, n} \cdot \sin(b_n \beta_n \xi_1), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1, n}(\xi_1) &= D_{11, n} \cdot \sin(b_n \alpha_n \xi_1) + D_{12, n} \cdot \cos(b_n \alpha_n \xi_1) + \\ & D_{13, n} \cdot \sin(b_n \beta_n \xi_1) + D_{14, n} \cdot \cos(b_n \beta_n \xi_1), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} V_{2, n}(\xi_2) &= \frac{L \alpha_n}{b_n} \cdot \frac{1}{s^2 - \alpha_n^2} \cdot D_{21, n} \cdot \cos(b_n \alpha_n \xi_2) - \frac{L \alpha_n}{b_n} \cdot \frac{1}{s^2 - \alpha_n^2} \cdot D_{22, n} \cdot \sin(b_n \alpha_n \xi_2) + \\ & \frac{L \beta_n}{b_n} \cdot \frac{1}{s^2 - \beta_n^2} \cdot D_{23, n} \cdot \cos(b_n \beta_n \xi_2) - \frac{L \beta_n}{b_n} \cdot \frac{1}{s^2 - \beta_n^2} \cdot D_{24, n} \cdot \sin(b_n \beta_n \xi_2), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{2, n}(\xi_2) &= D_{21, n} \cdot \sin(b_n \alpha_n \xi_2) + D_{22, n} \cdot \cos(b_n \alpha_n \xi_2) + \\ & D_{23, n} \cdot \sin(b_n \beta_n \xi_2) + D_{24, n} \cdot \cos(b_n \beta_n \xi_2), \end{aligned} \quad (37)$$

$$U_{3, n}(\xi_3) = D_{31, n} \cdot \cos(\Omega_n \xi_3) + D_{32, n} \cdot \sin(\Omega_n \xi_3), \quad (38)$$

$$U_{4, n}(\xi_4) = D_{41, n} \cdot \cos(\Omega_n \xi_4) + D_{42, n} \cdot \sin(\Omega_n \xi_4). \quad (39)$$

5 动力响应

系统的每阶特征根 b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ 对应于一组特征向量 d_n , 由 d_n 可确定各振型函数

$V_{1,n}(\xi_1)$ 、 $\Psi_{2,n}(\xi_1)$ 、 $V_{2,n}(\xi_2)$ 、 $\Psi_{2,n}(\xi_2)$ 、 $U_{3,n}(\xi_3)$ 、 $U_{4,n}(\xi_4)$ 。将这些振型函数用某一系数(如 $V_{1,n}(\xi_1)$ 中 $\cos(b_n\alpha_n\xi_1)$ 的系数 $D_{11,n}L\alpha_n/(b_n(s^2-\alpha_n^2))$) 去除所有的量, 令此系数为 A_n , 它相当于将振型函数“规格化”了, 可以得到“规格化”的振型函数 $V_{1,n}(\xi_1)$ 、 $\Psi_{2,n}(\xi_1)$ 、 $V_{2,n}(\xi_2)$ 、 $\Psi_{2,n}(\xi_2)$ 、 $U_{3,n}(\xi_3)$ 、 $U_{4,n}(\xi_4)$, 其中的量均为已知, 仅 A_n 未知。于是所有的振型函数均可用同一个 A_n 与各自的“规格化”振型函数的积表示。

由于结构与荷载的对称性, 梁只存在刚性平动位移, 而不存在刚性转动位移, 对整个结构而言, 其刚性位移用 A_0t+B_0 表示。因此, 冲击系统各个构件的位移响应和转角响应可以表示成如下级数形式:

1) 梁 1:

$$v_{1,n}(\xi_1, t) = A_0 \circ t + B_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \circ V_{1,n}(\xi_1) \circ \sin p_n t, \quad (40)$$

$$\psi_{1,n}(\xi_1, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \circ \Psi_{1,n}(\xi_1) \circ \sin p_n t \quad (41)$$

2) 梁 2:

$$v_{2,n}(\xi_2, t) = A_0 \circ t + B_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \circ V_{2,n}(\xi_2) \circ \sin p_n t, \quad (42)$$

$$\psi_{2,n}(\xi_2, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \circ \Psi_{2,n}(\xi_2) \circ \sin p_n t \quad (43)$$

3) 杆 3:

$$u_{3,n}(\xi_3, t) = A_0 \circ t + B_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \circ U_{3,n}(\xi_3) \circ \sin p_n t \quad (44)$$

4) 杆 4:

$$u_{4,n}(\xi_4, t) = A_0 \circ t + B_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \circ U_{4,n}(\xi_4) \circ \sin p_n t \quad (45)$$

6 初始条件

冲击系统的初始条件如下:

$$v_1(\xi_1, t) \Big|_{t=0} = 0; \quad \psi_1(\xi_1, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq \xi_1 \leq 1/2, \quad (46)$$

$$v_2(\xi_2, t) \Big|_{t=0} = 0; \quad \psi_2(\xi_2, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq \xi_2 \leq 1/2, \quad (47)$$

$$u_3(\xi_3, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq \xi_3 \leq 1/2, \quad (48)$$

$$u_4(\xi_4, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq \xi_4 \leq 1/2, \quad (49)$$

$$g_1(\xi_1) = \frac{\partial v_1(\xi_1, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \begin{cases} -S_0, & \xi_1 = 1/2, \\ 0, & 0 \leq \xi_1 < 1/2, \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1(\xi_1, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, & \frac{\partial v_2(\xi_2, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial \psi_2(\xi_2, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, & \frac{\partial u_3(\xi_3, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (51)$$

$$\frac{\partial u_4(\xi_4, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \begin{cases} -S_0, & \xi_4 = 1/2, \\ 0, & 0 \leq \xi_4 < 1/2. \end{cases} \quad (52)$$

由位移初始条件(46)、(47)、(48)、(49)式可知:

$$B_0 = 0^\circ \quad (53)$$

转角初始条件则自动满足。

7 刚性响应系数 A_0

运用 Betti 定律^[3], 对于系统的刚体模态和弹性模态, 有正交条件:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_0^{1/2-\epsilon} \bar{m}_1(\xi_1) \circ V_{1,0}(\xi_1) \circ V_{1,n}(\xi_1) \circ d\xi_1 + \right. \\ & \left. \int_0^{1/2-\epsilon} \bar{m}_4(\xi_4) \circ U_{4,0}(\xi_4) \circ U_{4,n}(\xi_4) \circ d\xi_4 \right] + \\ & \int_0^{1/2} \bar{m}_2(\xi_2) \circ V_{2,0}(\xi_2) \circ V_{2,n}(\xi_2) \circ d\xi_2 + \\ & \int_0^{1/2} \bar{m}_3(\xi_3) \circ U_{3,0}(\xi_3) \circ U_{3,n}(\xi_3) \circ d\xi_3 + \\ & M \circ V_{1,0} \left(\frac{1}{2} \right) \circ V_{1,n} \left(\frac{1}{2} \right) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (54)$$

式中 $\bar{m}_1(\xi_1)$ 、 $\bar{m}_2(\xi_2)$ 、 $\bar{m}_3(\xi_3)$ 、 $\bar{m}_4(\xi_4)$ 分别为梁1、梁2、杆3、杆4的分布质量密度; M 为等效冲击系统中运动刚体的集中质量。

并运用初始条件(46)式~(52)式和正交条件(54)式, 可得刚性响应系数 A_0 :

$$A_0 = -S_0 / (3.5^\circ \lambda + 1)^\circ \quad (55)$$

注意到, 上式中 A_0 就是结构的刚性速度响应 $v_r = -S_0 / (3.5^\circ \lambda + 1)$, 则结构刚性响应的动量为 $(3.5^\circ \lambda + 1) \circ M_0 \circ v_r$, 恰等于冲击前刚体 M_0 的动量(初始动量) $-M_0 \circ S_0$ 。因此, 根据动量守恒定理, 无约束结构的弹性响应的动量总和为 0° 。根据这个性质可以直接导出冲击系统中结构的刚性响应。

8 弹性响应系数 A_n

运用 Betti 定律^[3], 对于结构系统的不同阶的弹性模态, 可以写出类似的正交条件。由初始条件(46)式~(52)式和正交条件, 可得弹性响应系数 A_n :

$$\begin{aligned} A_n = & M \circ V_{1,n} \left(\frac{1}{2} \right) \circ g_1 \left(\frac{1}{2} \right) \left\{ p_n^* \left[\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_0^{1/2-\epsilon} [\bar{m}_1(\xi_1) \circ V_{1,n}^2(\xi_1) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. I_1(\xi_1) \circ \Psi_{1,n}^2(\xi_1)] \circ d\xi_1 + \int_0^{1/2-\epsilon} \bar{m}_4(\xi_4) \circ U_{4,n}^2(\xi_4) \circ d\xi_4 \right\} + \right. \right. \\ & \left. \int_0^{1/2} [\bar{m}_2(\xi_2) \circ V_{2,n}^2(\xi_2) + I_2(\xi_2) \circ \Psi_{2,n}^2(\xi_2)] \circ d\xi_2 + \right. \\ & \left. \left. \int_0^{1/2} \bar{m}_3(\xi_3) \circ U_{3,n}^2(\xi_3) \circ d\xi_3 + M \circ V_{1,n}^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right\} \right\} \circ \quad (56) \end{aligned}$$

9 冲击系统动力响应

将广义系数 A_0 、 A_n 代入(40)式~(45)式中, 可以得到结构的各个构件的平动位移和弯曲转角响应。在此基础上, 可以进一步得到剪力 $Q(\xi, t)$ 、弯矩 $M(\xi, t)$ 、轴力 $N(\xi, t)$ 等动力响应:

1) 梁1:

$$Q_1(\xi_1, t) = -kAG \circ \left[\frac{1}{L} \circ \frac{\partial v_1(\xi_1, t)}{\partial \xi_1} - \psi_1(\xi_1, t) \right] =$$

$$-kAG \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \left[\frac{1}{L} \frac{\partial \mathcal{V}_{1,n}(\xi_1)}{\partial \xi_1} - \Psi_{1,n}(\xi_1) \right] \sin pnt, \quad (57)$$

$$M_1(\xi_1, t) = EI \frac{1}{L} \frac{\partial \psi_1(\xi_1, t)}{\partial \xi_1} = EI \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{1}{L} \frac{\partial \Psi_{1,n}(\xi_1)}{\partial \xi_1} \sin pnt. \quad (58)$$

2) 梁 2:

$$Q_2(\xi_2, t) = -kAG \left[\frac{1}{L} \frac{\partial v_2(\xi_2, t)}{\partial \xi_2} - \psi_2(\xi_2, t) \right] =$$

$$-kAG \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \left[\frac{1}{L} \frac{\partial \mathcal{V}_{2,n}(\xi_2)}{\partial \xi_2} - \Psi_{2,n}(\xi_2) \right] \sin pnt, \quad (59)$$

$$M_2(\xi_2, t) = EI \frac{1}{L} \frac{\partial \psi_2(\xi_2, t)}{\partial \xi_2} = EI \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{1}{L} \frac{\partial \Psi_{2,n}(\xi_2)}{\partial \xi_2} \sin pnt. \quad (60)$$

3) 杆 3:

$$N_3(\xi_3, t) = EA \frac{\partial u_3(\xi_3, t)}{\partial \xi_3} = EA \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{\partial \mathcal{U}_{3,n}(\xi_3)}{\partial \xi_3} \sin pnt. \quad (61)$$

4) 杆 4:

$$N_4(\xi_4, t) = EA \frac{\partial u_4(\xi_4, t)}{\partial \xi_4} = EA \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{\partial \mathcal{U}_{4,n}(\xi_4)}{\partial \xi_4} \sin pnt. \quad (62)$$

10 结 论

1) 文中运用广义 Fourier 级数方法系统地推导了无约束平面框架结构受到运动刚体冲击时的瞬态响应解析解公式, 由推导结果说明模态方法同样可以很好地解决此类冲击问题。

2) 通过推导, 发现了无约束结构的冲击问题遵循与[3]中前面两章相同的规律: 受刚体冲击的无约束平面框架结构的位移响应由刚性位移和弹性位移两部分组成, 结构系统的刚性响应主要由质量比决定; 结构系统的刚性响应的动量等于冲击作用前运动刚体的动量, 根据动量守恒原理, 结构系统的弹性响应的动量总和为零。

3) 本文中的方法可用于类似的无约束平面框架的冲击响应公式的推导。

[参 考 文 献]

- [1] Doyle J F. *Wave Propagation in Structures* [M]. New York: Springer-Verlag, 1989, 7—156.
- [2] Pao Y H, Keh D C, Howard S M. Dynamic response and wave propagation in plane trusses and frames [J]. *AIAA J*, 1999, 37(5): 594—603.
- [3] 郑海涛. 无约束结构的冲击瞬态响应和应力波传播[D]. 硕士学位论文. 上海: 同济大学, 2002, 6—33.
- [4] Huang T C. The effect of rotary inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1961, 28(4): 579—584.
- [5] 克拉夫 R W, 彭津 J. 结构动力学[M]. 王光远等译. 北京: 科学出版社, 1981, 204—216.

Analysis on Impact Responses of an Unrestrained Planar Frame Structure(I) —Formula Derivation

CHEN Rong^{1,2}, ZHENG Hai-tao¹, XUE Song-tao^{1,2,3}, TANG He-sheng^{1,2}

(1. *Research Institution of Structural Engineering and Disaster Reduction,*

Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China;

2. *Center for Aerospace Technology, Tongji University,*

Shanghai 200092, P. R. China;

3. *Department of Architecture, School of Science and Engineering,*

Kinki University, Osaka 577-8502, Japan)

Abstract: The generalized Fourier series method was used to derive the impact responses formula of an unrestrained planar frame structure when subjected to an impact of a moving rigid-body. By using these formula the analytic solutions of dynamic responses of the contact-impact system can be obtained. During the derivation the momentum sum of elastic responses of the contact-impact system is demonstrated to be zero. From the derivation it is seen that the modal method can also be used to solve this kind of impact problem.

Key words: unrestrained planar frame structure; impact; rigid response; elastic response