

Timoshenko 梁运动方程的修正及其影响

陈 ^{1, 3}, 万春风¹, 薛松涛^{1, 2, 3}, 唐和生^{1, 3}

(1. 同济大学 结构工程与防灾研究所, 上海 200092; 2. 日本近畿大学 理工学部建筑学科, 日本 大阪 577-8502;
3. 同济大学 空天技术中心, 上海 200092)

摘要: 在 Timoshenko 梁的基础上, 考虑剪切变形所引起的转动惯量, 对传统的 Timoshenko 梁的运动方程进行了修正, 分析了这种修正对梁的运动特性所带来的影响, 并论证了 Timoshenko 梁实际上只存在一个相速度系, 一个群速度系, 以及一个固有频谱. 这种修正在低频段影响很小, 而在高频段影响比较显著, 因此在诸如冲击等高频影响占重要地位的动力分析中必须加以考虑.

关键词: 修正 Timoshenko 梁; 运动方程; 波速; 群速度; 固有频率

中图分类号: O 347.1

文献标识码: A

文章编号: 0253-374X(2005)06-0711-05

Modification of Motion Equation of Timoshenko Beam and Its Effect

CHEN Rong^{1, 3}, WAN Chun-feng¹, XUE Song-tao^{1, 2, 3}, TANG He-sheng^{1, 3}

(1. Research Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Department of Architecture School of Science and Engineering, Kinki University, Osaka 577-8502, Japan;

3. Center for Aerospace Technology, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on the Timoshenko beam theory, the rotary inertia caused by the shear deformation of the beam is considered in this paper, and the motion equation of the Timoshenko beam theory is then modified. The dynamic characters of this new model has been discussed and it can be concluded that in the beam only one set of phase velocity series, one set of group velocity series and one natural frequency spectrum exist, respectively. The effect of this modification is very small when the frequency is very low, but when the frequency is much high, the effect is very evident and should be considered, especially for the dynamic transient response analysis, such as impact analysis, in which high frequencies have important effect.

Key words: modified Timoshenko beam; motion equation; wave velocity; group velocity; natural frequency

从 18 世纪以来, 人们对梁的横向振动开始了系统的研究, 已提出了一系列的理论^[1], 有在初等假设的基础上的 Bernoulli-Euler 梁理论, 有考虑梁弯曲变形引起的转动惯量的 Rayleigh 理论, 有同时考

虑梁弯曲变形引起的转动惯量和梁的剪切变形的 Timoshenko 梁理论^[2].

本文基于 Timoshenko 梁理论考虑了剪切变形引起的转动惯量影响(简称修正 Timoshenko 梁), 推

收稿日期: 2004-03-11

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(59925820)

作者简介: 陈 (1944-), 男, 江苏南通人, 研究员, 工学博士, 博士生导师. E-mail: chenrong@mail.tongji.edu.cn

导了修正 Timoshenko 梁的运动方程,并用算例说明了由剪切变形的转动惯量对梁的动力特性的影响。

1 基本方程

如图 1a 所示考虑一根在 $x-y$ 平面内的梁由于承受横向荷载作用而引起的横向振动.图 1b 表示长度为 dx 的梁微元的受力平衡图.图中剪力 V 和弯矩 M 遵循梁的正负号惯例,即剪力使该截面的邻

近微段有作顺时针转动趋势时取正号;弯矩使该截面的邻近微段向下凹时取正号.图中的负号表示与图示箭头方向相反.

本文采用如下基本假设:① 梁的运动仅发生在 xOy 平面内,且位移 y 是很小的;② 梁的截面关于 y 轴对称,在变形过程中,梁的横截面始终保持平面;③ 同时考虑梁的由于弯曲变形引起的转动惯量、剪切变形以及由剪切变形引起的转动惯量;④ 横向剪应力沿梁高等效均匀分布.

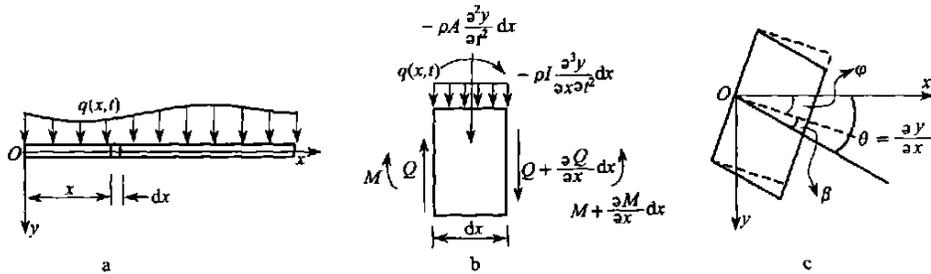


图 1 梁及微元受力图

Fig. 1 Force diagrams of the beam and its infinitesimal element

由微元段的受力平衡条件可得

$$-Qdx + \frac{\partial M}{\partial x} dx + \rho I \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} dx = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2)$$

式中: ρ 为梁材料的密度; A 为梁截面面积; I 为梁截面对中性轴的惯性矩.微元段的变形如图 1c 所示,梁的挠度可以认为是由弯矩引起的挠度 y_b 和由剪切变形引起的挠度 y_s 组成,因此可得转角方程

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y_b}{\partial x} + \frac{\partial y_s}{\partial x} \quad \text{或} \quad \theta = \varphi + \beta \quad (3)$$

其中

$$\theta = \frac{\partial y}{\partial x}; \quad \varphi = \frac{\partial y_b}{\partial x}; \quad \beta = \frac{\partial y_s}{\partial x} \quad (4)$$

式中: θ 为梁的中性轴的总转角; φ 为由弯曲变形引起的截面转角,也即为弯曲引起的中性轴的转角; β 为由剪切变形引起的中性轴的转角,也即是梁单元纯剪的剪切角.将式(3), (4)代入式(1)得

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} + \rho I \frac{\partial^3 y_b}{\partial x \partial t^2} + \rho I \frac{\partial^3 y_s}{\partial x \partial t^2} \quad (5)$$

式(5)的右边的第 1 项即为 Bernoulli-Euler 初等梁理论的剪力结果,前 2 项即为经典 Timoshenko 梁理论的结果,它引入了弯曲转动惯量,而第 3 项则是由于考虑了剪切变形引起的转动惯量的影响而产生

的.根据材料力学有

$$M = -EI \partial \varphi / \partial x \quad (6)$$

$$Q = AG^\mu (\partial y / \partial x - \varphi) \quad (7)$$

其中: E 为弹性模量; G 为剪切弹性模量; μ 为截面系数,也称截面剪切修正因子,这实际上是对剪应力和剪应变在横截面上均匀分布假设的修正.将式(6), (7)代入式(1), (2), 则得

$$AG^\mu \left[\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi \right] = -EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho I \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} \quad (8)$$

$$AG^\mu \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] + q = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (9)$$

上两式即是修正 Timoshenko 梁的运动方程.消去截面转角 φ 后可得仅关于横向位移 y 的基本运动方程如下:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left[q - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] - \rho I \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{EI}{AG^\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[q - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (10)$$

式(10)中第 1, 2 项对应 Bernoulli-Euler 梁理论,第 3 项对应主转动惯量项,第 4 项对应主剪切变形项.而根据经典的 Timoshenko 梁理论得到的公式如下^[2]:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left[q - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] -$$

$$\rho I \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{EI}{AG^\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[q - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] - \frac{\rho I}{AG^\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[q - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (11)$$

式(11)中第 1, 2 项对应 Bernoulli-Euler 梁理论, 第 3 项对应主转动惯量项, 第 4 项对应主剪切变形项, 第 5 项对应合并的转动惯量和剪切变形项。

比较修正 Timoshenko 梁的公式和由经典 Timoshenko 梁理论所得出的梁的运动方程可见, 两者相差了最后一项: “合并的转动惯量和剪切变形”项, 可见在经典 Timoshenko 梁理论的梁的运动方程所出现的这一项, 正是由于其忽略了梁单元由剪切变形所引起的转动惯量所致。

2 修正 Timoshenko 梁的波速和群速度

(1) 修正 Timoshenko 梁的波速

若令 $q=0$, 则式(10)即变为自由振动方程, 可写成

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left[\frac{EI}{AG^\mu} + \frac{I}{A} \right] \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (12)$$

考虑其基本解

$$y = H e^{i(kx - \omega t)} \quad (13)$$

式中: H 为振幅, 它与频率有关; k 为波数; ω 为圆频率, $\omega = kc$; c 为波速. 将式(13)代入式(12)即得

$$\frac{EI}{\rho A} k^4 - k^2 c^2 - \left[\frac{I}{A} + \frac{EI}{AG^\mu} \right] k^4 c^2 = 0 \quad (14)$$

当波数 k 不为 0 时, 式(14)又可写为

$$\frac{EI}{\rho A} k^2 - \left[1 + \left[\frac{I}{A} + \frac{EI}{AG^\mu} \right] k^2 \right] c^2 = 0 \quad (15)$$

由此即可得修正 Timoshenko 梁波速为

$$c = \pm \left\{ \frac{EI}{\rho A} k^2 \left[1 + \left[\frac{I}{A} + \frac{EI}{AG^\mu} \right] k^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (16)$$

由上式可知修正 Timoshenko 梁中的波速与梁的材料特性以及截面特性有密切的关系. 对结构中的波, 令剪切波速和纵波波速分别为

$$c_s = (G^\mu / \rho)^{1/2}, \quad \omega_0 = (E / \rho)^{1/2} \quad (17)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 对式(16)取其极限并取正根得

$$c_\infty = c_s [E / (G^\mu + E)]^{1/2} \quad (18)$$

从式(18)可以看出, 修正 Timoshenko 梁中的波速在当波数 $k \rightarrow \infty$ 时, 趋于一个定值, 这个极限值和梁截面的形状有关, 也和梁的材料特性有关, 但与截面惯性矩无关, 而由以往的研究可以得到, Bernoulli-

Euler 梁的弯曲波速为

$$c_{BE} = (EI / \rho A)^{1/2} k \quad (19)$$

经典 Timoshenko 梁理论的波速 c_T 为

$$c_T = \left\{ \left\{ k^2 + b^2 k^4 \pm \left[(k^2 + b^2 k^4)^2 - 4a^2 s^2 k^8 \right]^{1/2} \right\} / 2s^2 k^4 \right\}^{1/2} \quad (20)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a &= (EI / \rho A)^{1/2} \\ b &= [(I / A)(1 + E / G^\mu)]^{1/2} \\ s &= (\rho I / AG^\mu)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

可见, 经典 Timoshenko 梁有两个波速.

(2) 修正 Timoshenko 梁的群速度

对于弥散系统更为关心的是具有分布波数的波的整体即波包或波群的传播, 在描述弥散系统中波群能量的传播特征时, 波的群速度尤其显得重要. 对于弥散系统, 其群速度为

$$c_g = d\omega / dk \quad (22)$$

由式(16)可以得到频率关于波数的表达式

$$\omega = ak^2 \cdot (1 + b^2 k^2)^{-1/2} \quad (23)$$

将式(23)代入式(22)即得到修正 Timoshenko 梁的群速度 c_g 为

$$c_g = (2ak + ab^2 k^3)(1 + b^2 k^2)^{-3/2} \quad (24)$$

取极限有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_g = a / b = c_s [E / (G^\mu + E)]^{1/2} = c_\infty, \quad \lim_{k \rightarrow 0} c_g = 0 = \lim_{k \rightarrow 0} c \quad (25)$$

也就是说, 当波数趋向无穷以及趋向于 0 时, 群速度和相速度相等. 而 Bernoulli-Euler 梁的弯曲波的群速度 c_{gBE} 为

$$c_{gBE} = 2(EI / \rho A)^{1/2} k = 2c_{BE} \quad (26)$$

将基本解代入式(11), 得到经典 Timoshenko 梁的频率、波数方程如下:

$$\omega^2 = \frac{1 + b^2 k^2 \pm [(1 + b^2 k^2)^2 - 4a^2 s^2 k^4]^{1/2}}{2s^2} \quad (27)$$

因此得经典 Timoshenko 梁的群速度 c_{gT} 为

$$c_{gT} = \left\{ b^2 k \pm [(1 + b^2 k^2)b^2 k - 4a^2 s^2 k^3] / [(1 + b^2 k^2)^2 - 4a^2 s^2 k^4]^{-1/2} \right\} / 2\omega s^2 \quad (28)$$

可知, 经典 Timoshenko 梁也有两个群速度.

(3) 修正 Timoshenko 梁的固有频率

以简支梁为例, 取 Bernoulli-Euler 梁两端简支的振型函数作为梁的振型函数

$$y_n = \sin \frac{n\pi x}{l} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (29)$$

其中: l 为梁的长度; n 为振型的阶次; ω_n 为梁第 n 阶次的固有频率. 将式(29)代入修正 Timoshenko 梁运动方程, 可得到修正 Timoshenko 梁的频率方程为

$$a^2 \frac{n^4 \pi^4}{l^4} - \omega_n^2 - \omega_n^2 \frac{n^2 \pi^2 I}{l^2 A} - \omega_n^2 \frac{n^2 \pi^2 I}{l^2 A} \frac{E}{G\mu} = 0 \quad (30)$$

式中第 3 项即为转动惯量效应项, 第 4 项为剪切效应项. 由式(30)可得出修正 Timoshenko 梁的固有频率 ω_n 为: $\omega_n = (a\pi^2/\lambda_n^2)(1 + \pi^2 b^2/\lambda_n^2)^{-1/2}$. 其中 λ_n 为表征波长的一个物理量, 具体表达如下: $\lambda_n = l/n$. 而 Bernonlli-Euler 梁的固有频率 ω_{nBE} 为: $\omega_{nBE} = a\pi^2/\lambda_n^2$. 经典 Timoshenko 梁的固有频率 ω_{nT} 为

$$\omega_{nT} = \{ \lambda_n^2 + \pi^2 b^2 \pm [(\lambda_n^2 + \pi^2 b^2)^2 - 4\pi^4 a^2 s^2]^{1/2} \}^{1/2} / \sqrt{2} \lambda_n S \quad (31)$$

由此式可知经典 Timoshenko 梁有两个频率.

3 算例分析

取一矩形截面简支梁, 假设其截面宽 $b_1 = 0.25$ m; 截面高 $h = 0.5$ m, 梁长 $l = 4$ m; 弹性模量 $E = 2.0 \times 10^5$ MPa; 剪切模量 $G = 0.75 \times 10^5$ MPa; 截面剪切系数 $\mu = 5/6$; 梁的密度 $\rho = 7.8 \times 10^3$ kg \cdot m $^{-3}$, 则可作出 Bernonlli-Euler 梁、经典 Timoshenko 梁、修正 Timoshenko 梁的波速 c , 群速度 c_g 和波数 k 关系图如图 2 和图 3 所示.

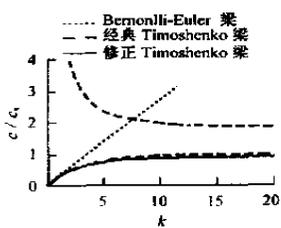


图 2 梁的波速和波数的关系图

Fig. 2 Relationships of wave velocities and wave numbers

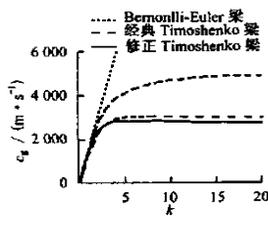


图 3 三种梁理论的群速度

Fig. 3 Group velocities of three beam theories

由图 2 可见, Bernonlli-Euler 梁的弯曲波相速度可以无限线性增长以至无穷, 这在物理上说是不合理的. 经典 Timoshenko 梁理论由于考虑了弯曲引起的转动惯量和剪切变形, 使其大大精确于 Bernonlli-Euler 梁, 转动惯量和剪切变形的考虑使波速减小, 但是它的波速有两个正根系, 其中较大的一个在波数较小, 亦即波长较大的时候始终处于高速行进状

态, 即使在波数较大时, 其波速也大于纵波波速, 这是不合理的. 修正 Timoshenko 梁由于考虑了由剪切变形引起的转动惯量, 它使波速进一步减小, 同时它只有一个波速系, 在波数较小时和经典 Timoshenko 梁的一个波速系非常接近.

对于群速度来说, 如图 3 所示, Bernonlli-Euler 梁的弯曲波的频散为反常频散, 而且当 $k \rightarrow \infty$ 时, 群速度 $c_{gBE}(\omega) \rightarrow \infty$ 这是违背波动能量不可能瞬时传送这一因果关系的. 经典 Timoshenko 梁考虑了弯曲引起的转动惯量以及剪切变形的影响, 使得这个矛盾得以消失, 但其存在两个群速度系, 对比图 2 和图 3 可知, 当经典 Timoshenko 梁的一个相速度趋向为 0, 对应的一个群速度也趋向为 0 是合乎实际的, 但是另一个相速度趋向为无穷大的同时, 其对应的群速度却趋向为 0 则是不能被接受的, 因为波以高速传播而能量却没有传播这两者显然是矛盾的. 从这个矛盾也能看出经典 Timoshenko 梁只能取一个相速度系和一个群速度系, 它们在波数 k 很大时都趋于剪切波速, 而在波数 k 很小时都趋于 0. 和它的相速度类似, 修正 Timoshenko 梁由于考虑了剪切变形引起的转动惯量, 只存在一个群速度系, 在波数较小时, 和经典 Timoshenko 梁的群速度非常接近, 在波数稍大时, 其群速度则比经典 Timoshenko 梁的群速度有较大的减小. 另外可以看出, 而当波数趋于 0 时, 修正 Timoshenko 梁的群速度和波速均趋于 0, 这是和波的能量传播不能先于波的传播相一致的; 在波数很大时, 相速度曲线已经非常平坦, 基本上不再随波数的变化而变化, 因此在靠近无穷极限波速的窄频带内将呈现出无频散关系, 因此出现式(25)所示的极限群速度应和相速度相等的特性.

图 4 和图 5 是有关梁的波长的关系图. 从图 4 可以看出, 经典 Timoshenko 梁有两个频谱, 但虚线所表示的频谱无论波长 λ 有多大, 它都始终处于较高频状态, 这显然是不合理的. 对于 Timoshenko 梁的频谱究竟是一个还是两个, 这在历史上很早就有了争论, Trail-Nash 和 Collar 第一个提出 Timoshenko 梁存在两个频谱^[4]; Anderson 在他独立的研究中也指出, 因为经典 Timoshenko 梁的运动方程是时间和空间的四阶微分方程, 因此存在两个实频率系^[5]; 另外 Downs^[3], Bhashyama 和 Prathap^[6,7] 等人也认为有两个频谱. 然而, 也有很多科学家持反对态度, Levinson 和 Cooke^[8], Abbas 和 Thomas^[9] 等认为在梁中只存在有一个频谱; Nesterenko 则用能量法分析得出: 那第二个频谱是没有物理意义

的^[10], 而 Stephen 则把第二个频谱的频率与用精确弹性理论得出的值作了比较, 结果发现这第二频谱和精确弹性方程得出的解没有任何联系, 因此也指出第二频谱是没有任何物理意义的^[11].

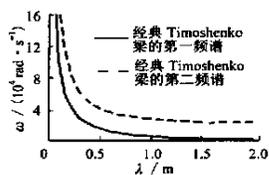


图 4 经典 Timoshenko 梁的两个频谱

Fig. 4 Two frequency spectra of the classical Timoshenko beam

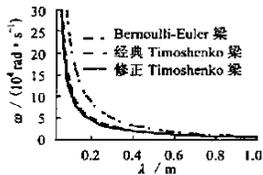


图 5 三种梁的频率和波长关系图

Fig. 5 Frequency-wavelength relationships of three beam theories

事实上, 经典 Timoshenko 梁由于忽略了剪切变形引起的转动惯量而在其运动方程中多了一个关于时间的四阶导数项, 正如 Anderson 所说的那样自然就产生了第二个频谱, 这一点与经典 Timoshenko 梁出现两个波速, 两个群速度是一致的, 而考虑了梁剪切变形引起的转动惯量以后, 随着时间的四阶导数项的消失, 这第二频谱自然也就不存在了。

图 5 对经典 Timoshenko 梁只取其第一频谱, 可以看出, 当波长较大时, 三种梁的频率曲线趋于一致, 修正的 Timoshenko 梁与经典 Timoshenko 梁的频率在小波长时相差较大, 说明由剪切变形所引起的转动惯量在高频段将产生较大的影响, 经计算: 在 $\lambda=0.1$ 处修正的 Timoshenko 梁与经典 Timoshenko 梁的频率相差超过 10 000 Hz, 误差达约 13%, 当梁长 $l=4$ m 时, 此时对应的振型的阶次为 40 阶。

4 结论

(1) 本文在经典 Timoshenko 梁理论的基础上, 首次考虑了梁的剪切变形所引起的转动惯量, 对经典 Timoshenko 梁的运动方程进行了修正, 并对其动力特性做了影响分析。

(2) 本文论证了 Timoshenko 梁实际上只存在一个相速度系, 一个群速度系, 以及一个固有频谱。

(3) 由分析可知, 剪切变形引起的转动惯量将使得梁的波速、群速度以及固有频率都有一定程度

的减小, 而这种修正在低频段影响不大, 而在较高频率处影响比较显著. 从对修正的 Timoshenko 梁的动力特性的具体分析可以看出, 修正后的 Timoshenko 梁理论能比经典的 Timoshenko 梁理论(特别是在频率相对较高的地方)作出更好的近似, 这对于如冲击等高频成分为主的瞬态动力响应问题显得非常重要。

参考文献:

- [1] Han S M, Benaroya H, Wei T. Dynamics of transversely vibrating beam using four engineering theories[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 225(5): 935—988.
- [2] S 铁摩辛柯, D H 杨, W 小韦孚. 工程中的振动问题[M]. 胡人礼译. 北京: 人民铁道出版社, 1978. Timoshenko S, Young D H, Weaver W. Vibration problems in engineering[M]. Translated by HU Ren-li. Beijing: People's Railway Press 1978.
- [3] Downs B. Transverse vibration of a uniform simply supported Timoshenko beam without transverse deflection[J]. Journal of Applied Mechanics, 1976, 43(4): 671—674.
- [4] Traill-Nash R W, Collar A R. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams[J]. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1953, 6: 186—213.
- [5] Anderson R A, Calif P. Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory[J]. Journal of Applied Mechanics, 1953, 20(3): 504—510.
- [6] Bhashyam G R, Prathap G. The second frequency spectrum of Timoshenko beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 1981, 76(3): 407—420.
- [7] Prathap G. The two frequency spectra of Timoshenko beams—a re-assessment[J]. Journal of Sound and Vibration, 1983, 90(3): 443—445.
- [8] Levinson M, Cooke D W. On the two frequency spectra of Timoshenko beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 1982, 84(3): 319—326.
- [9] Abbas B A H, Thomas J. The second frequency spectrum of Timoshenko beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 1977, 51(1): 123—137.
- [10] Nesterenko V V. A theory for transverse vibrations of the Timoshenko beam[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1993, 57(3): 669—677.
- [11] Stephen N G. The second frequency spectrum of Timoshenko beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 1982, 80(4): 578—582.

(编辑: 王东方)