

无约束修正 Timoshenko 梁的冲击问题¹⁾

陈 镒^{*,2)} 万春风^{*} 薛松涛^{*,†} 唐和生^{*}

^{*}(同济大学结构工程与防灾研究所, 同济大学航空技术中心, 上海 200092)

[†](日本近畿大学理工学部建筑学科, 日本大阪 577-8502)

摘要 介绍了修正后的 Timoshenko 梁运动方程, 并比较了修正 Timoshenko 梁与经典 Timoshenko 梁的运动方程. 推导了考虑剪切变形引起的转动惯量的修正 Timoshenko 梁的正交条件, 推导了集中质量对无约束修正 Timoshenko 梁的正碰撞对梁所引起的瞬态冲击响应公式, 并用算例进行了分析, 且与集中质量对经典的无约束 Timoshenko 梁的正碰撞对梁所引起的冲击响应进行了比较, 另外还用算例分析了梁的刚度的变化和冲击质量比对其冲击响应产生的影响.

关键词 无约束, 修正 Timoshenko 梁, 剪切变形, 转动惯量, 正交条件, 冲击响应

中图分类号: O347.1 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2006)02-0262-08

引 言

从 18 世纪以来, 人们对梁的横向振动开始了系统的研究并提出了一系列的理论, 有在初等假设基础上的 Bernoulli-Euler 梁理论; 有考虑梁弯曲变形所引起的转动惯量的 Rayleigh 理论; 有同时考虑梁弯曲变形引起的转动惯量和梁的剪切变形的 Timoshenko 梁理论^[1]. 许多人还研究了 Timoshenko 梁的冲击问题, 如邢誉峰等^[2~4]. 陈镒等^[5]还研究了无约束 Timoshenko 梁的横向冲击响应问题. 陈镒等人基于 Timoshenko 梁理论考虑了剪切变形所引起的转动惯量的影响 (简称修正 Timoshenko 梁), 推导出了修正 Timoshenko 梁的运动方程^[6]. 本文在此基础上推导了修正 Timoshenko 梁的正交条件, 并推导了无约束 Timoshenko 梁在集中质量正碰撞时的冲击响应公式.

1 Timoshenko 梁运动方程的修正

由文献 [6], 修正 Timoshenko 梁的运动方程如下

$$AG\mu \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \varphi \right) = -EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \rho I \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} \quad (1)$$

$$AG\mu \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + q = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2)$$

上两式消去截面转角 φ 后可得仅关于横向位移 y 的

基本运动方程如下

$$\frac{EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left(q - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) - \rho I \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{EI}{AG\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(q - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)}{AG\mu} = 0 \quad (3)$$

式中 3 个划线部分依次对应 Bernoulli-Euler 梁理论, 主转动惯量项, 主剪切变形项, 而根据经典的 Timoshenko 梁理论得到的公式应为如下所示^[1]

$$\frac{EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left(q - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) - \rho I \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{EI}{AG\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(q - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) - \frac{\rho I}{AG\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(q - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)}{AG\mu} = 0 \quad (4)$$

式中 4 个划线部分依次对应: Bernoulli-Euler 梁理论, 主转动惯量项, 主剪切变形项, 合并的转动惯量和剪切变形项.

比较修正 Timoshenko 梁的公式和由经典 Timoshenko 梁理论所得出的梁的运动方程可见, 两者相差了最后一项: “合并的转动惯量和剪切变形”项, 可见在经典 Timoshenko 梁理论的梁的运动方程所出现的这一项, 正是由于其忽略了梁单元由剪切变形所引起的转动惯量所致.

2004-09-20 收到第 1 稿, 2005-12-31 收到修改稿.

1) 国家杰出青年科学基金资助项目 (59925820).

2) E-mail: chenrong@mail.tongji.edu.cn

文献 [6] 通过简支梁算例论证 Timoshenko 梁实际上只存在一个相速度系，一个群速度系以及一个固有频率。并指出，修正 Timoshenko 梁与经典 Timoshenko 梁在低频范围内结果十分接近，但在高频范围内差别比较明显。因此，对于冲击等高频成分为主的瞬态动力响应分析问题应当考虑剪切变形引起的转动惯量的影响，也即应当采用修正 Timoshenko 梁模型。可见在某些情况下，修正 Timoshenko 梁比经典 Timoshenko 梁更合理，更接近真实情况。

2 修正 Timoshenko 梁的振型正交性

根据修正 Timoshenko 梁的运动方程可求出梁弹性横向位移 $y(x, t)$ ，截面转角 $\varphi(x, t)$ 和剪切转角 $\beta(x, t)$ 的固有振型函数以及相应的时间函数分别为 [7]

$$Y(x) = c_1 \cosh g_1 x + c_2 \sinh g_1 x + c_3 \cos g_2 x + c_4 \sin g_2 x \quad (5)$$

$$\Psi(x) = c_1 g_3 \sinh g_1 x + c_2 g_3 \cosh g_1 x + c_3 (-g_4) \sin g_2 x + c_4 g_4 \cos g_2 x \quad (6)$$

$$B(x) = -\{c_1(g_3 - g_1) \sinh g_1 x + c_2(g_3 - g_1) \cosh g_1 x + c_3(-g_4 + g_2) \sin g_2 x + c_4(g_4 - g_2) \cos g_2 x\} \quad (7)$$

$$T(t) = d \sin \omega t + e \cos \omega t \quad (8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \sqrt{\frac{-b^2 \omega^2 + \sqrt{b^4 \omega^4 + 4a^2 \omega^2}}{2a^2}} \\ g_2 &= \sqrt{\frac{b^2 \omega^2 + \sqrt{b^4 \omega^4 + 4a^2 \omega^2}}{2a^2}} \\ g_3 &= g_1 \left(1 + \frac{\rho b^2 \omega^2}{G\mu}\right) + \frac{Er_g^2}{G\mu} g_1^3 \\ g_4 &= g_2 \left(1 + \frac{\rho b^2 \omega^2}{G\mu}\right) - \frac{Er_g^2}{G\mu} g_2^3 \\ a &= \sqrt{Er_g/\rho}, \quad b = \sqrt{r_g(1 + E/G\mu)} \\ r_g &= \sqrt{I/A} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

振型正交性是振型分解法解决结构动力响应问题的一个关键问题，只有得出了正交特性才能有效地对方程中的时间和空间进行有效的分离，从而方便地求出结构的动力响应。根据 Betti 定理可求出修正的 Timoshenko 梁振型的正交条件。

对于简单支承条件下修正 Timoshenko 梁，不同阶次的固有频率之间，即 $\omega_n^2 \neq \omega_m^2$ 时，有振型的正

交条件为

$$\int_0^l [Y_n(x)Y_m(x) + r_g^2 Y_n'(x)Y_m'(x)] dx = 0 \quad (10)$$

式中 $Y_n'(x)$, $Y_m'(x)$ 分别为 $Y_n(x)$, $Y_m(x)$ 对 x 的导数。

当 $\omega_n^2 = \omega_m^2$ 时，则可以得到系统广义刚度为

$$K_n = \int_0^l [(Y_n(x))^2 + r_g^2 (Y_n'(x))^2] dx \quad (11)$$

当考虑梁为无约束的自由梁时，那么它不仅具有弹性模态，也会有刚性模态。可推得修正 Timoshenko 梁刚性模态和弹性模态的正交条件为

$$\int_0^l Y_0(x)Y_n(x) dx = 0 \quad (12)$$

其中 $Y_0(x)$ 为梁的刚体模态，可见这个正交条件是和经典 Timoshenko 梁是一样的。

当修正 Timoshenko 梁的一端（如 $x = l$ 端）带有集中质量情况下，可以求得其正交条件为

$$\int_0^l [Y_n(x)Y_m(x) + r_g^2 Y_n'(x)Y_m'(x)] dx + \frac{M}{\rho A} Y_n(l)Y_m(l) = 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots; m \neq n) \quad (13)$$

以及广义刚度为

$$K_n = \int_0^l [Y_n^2(x) + r_g^2 (Y_n'(x))^2] dx + \frac{M}{\rho A} Y_n^2(l) = 0 \quad (14)$$

3 集中质量对无约束梁的横向对称冲击

考虑一个两端自由的无约束梁中点处受一质量为 M_0 ，撞击速度为 V_0 的运动刚体的横向冲击（如图 1 所示），并假设此运动刚体可近似为一个集中质量。将梁与刚体作为一个整体，看成是一个接触 - 冲击系统。根据冲击系统的对称性，可以选取左半段梁（如图 2 所示）进行分析。

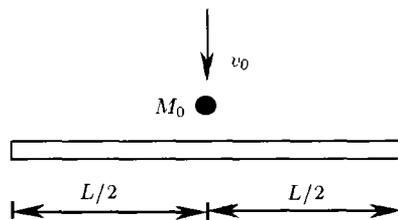


图 1 冲击系统

Fig.1 Impact system

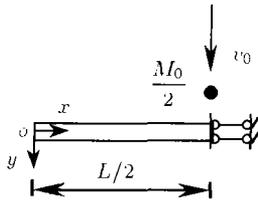


图 2 等效冲击系统

Fig.2 Equivalent impact system

3.1 等效无约束冲击系统的固有频率
由等效冲击系统的边界条件可得

$$\Psi'(0) = B(0) = \Psi(l) = 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{F}(\omega) = \begin{bmatrix} g_1 g_3 & 0 & -g_2 g_4 & 0 \\ 0 & g_3 - g_1 & 0 & g_4 - g_2 \\ g_3 \sinh g_1 l & g_3 \cosh g_1 l & (-g_4) \sin g_2 l & g_4 \cos g_2 l \\ \left(\begin{matrix} (g_3 - g_1) \sinh g_1 l \\ +k\omega^2 \cosh g_1 l \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} (g_3 - g_1) \cosh g_1 l \\ +k\omega^2 \sinh g_1 l \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} (-g_4 + g_2) \sin g_2 l \\ +k\omega^2 \cos g_2 l \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} (g_4 - g_2) \cos g_2 l \\ +k\omega^2 \sin g_2 l \end{matrix} \right) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T \quad (20)$$

显然此等效冲击系统的频率方程为

$$|\mathbf{F}(\omega)| = 0 \quad (21)$$

3.2 等效无约束冲击系统的固有振型

由矩阵方程 (21) 可以求得向量 \mathbf{C} 的各元素之间的关系为

$$c_2 = -\frac{g_3 \sinh g_1 l - \frac{g_1 g_3}{g_2} \sin g_2 l}{g_3 \cosh g_1 l - \frac{g_4 (g_3 - g_1)}{g_4 - g_2} \cos g_2 l} c_1 \quad (22)$$

$$c_3 = \frac{g_1 g_3}{g_2 g_4} c_1 \quad (23)$$

$$c_4 = \frac{g_3 - g_1}{g_4 - g_2} \cdot \frac{g_3 \sinh g_1 l - \frac{g_1 g_3}{g_2} \sin g_2 l}{g_3 \cosh g_1 l - \frac{g_4 (g_3 - g_1)}{g_4 - g_2} \cos g_2 l} c_1 \quad (24)$$

将式 (22)~(24) 代入式 (5)~(7) 并将系数 c_1 归一为 1, 则可得到冲击系统的横向位移, 截面转角位移以及剪切变形的振型表达式 $Y(\omega)$, $\Psi(\omega)$ 以及 $B(\omega)$.

对于等效冲击系统来说, 由于其 y 方向没有约束, 因此它可以在 y 方向自由运动, 所以此等效冲击系统不仅具有弹性振型, 还具有刚体振型, 可求得其刚体模态为

$$Y_0(x) = 1 \quad (25)$$

$$B(l) = k\omega^2 Y(l) \quad (16)$$

其中

$$l = \frac{L}{2}, \quad k = \frac{M_0}{2AGu} \quad (17)$$

将式 (5)~(7) 分别代入式 (15),(16) 可得到矩阵方程为

$$|\mathbf{F}(\omega) \cdot \mathbf{C}| = 0 \quad (18)$$

其中

$$\Psi_0(x) = B_0(x) = 0 \quad (26)$$

由此可见, 此等效冲击系统只存在横向位移一个刚体振型, 表现为系统的横向平动, 而在其他方向没有刚体运动.

3.3 等效无约束冲击系统的初始条件

等效冲击系统的横向位移可以认为是由系统的刚体位移和系统的弹性位移组成, 其表达式可写为

$$y_T(x, t) = y_0(x, t) + y(x, t) \quad (27)$$

其中, $y_T(x, t)$ 为梁的总位移; $y_0(x, t)$ 为梁的刚体位移, 它对应于 $\omega_0 = 0$ 的情况; $y(x, t)$ 为弹性位移.

等效冲击系统在初始状态, 显然横向位移、梁截面转角和剪切变形角均为 0, 在梁的端点具有一个初速度, 此初速度应等于集中质量碰到梁瞬间时的速度. 由此, 等效冲击系统的初始条件可以表达为

$$y(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (28)$$

$$y_0(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (29)$$

$$\varphi(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (30)$$

$$\beta(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial y_T(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \begin{cases} v_0, & x = l \\ 0, & 0 \leq x < l \end{cases} \quad (32)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (33)$$

$$\left. \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (34)$$

4 无约束梁冲击系统的动力响应

等效冲击系统的刚体响应为

$$y_0(x, t) = d_0 t + e_0 \quad (35)$$

$$\varphi_0(x, t) = \beta_0(x, t) = 0 \quad (36)$$

可见此等效冲击系统只存在横向刚体位移。对于弹性位移，由模态叠加法可得到

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) (d_n \sin \omega_n t + e_n \cos \omega_n t) \quad (37)$$

由初始条件 (28) 和 (29) 可得

$$e_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (38)$$

将式 (37), (38) 代入式 (27) 即得

$$y_T(x, t) = d_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot Y_n(x) \sin \omega_n t \quad (39)$$

同样由振型叠加法可得

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \Psi_n(x) \sin \omega_n t \quad (40)$$

$$\beta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot B_n(x) \sin \omega_n t \quad (41)$$

由初始条件式 (32) 并代入式 (39) 可得

$$d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \omega_n \cdot Y_n(x) = \begin{cases} v_0, & x = l \\ 0, & 0 \leq x < l \end{cases} \quad (42)$$

由式 (33), (34), (39) 及转角方程^[6] 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \omega_n \cdot Y'_n(x) = 0 \quad (43)$$

由式 (42), (43) 结合正交条件 (13) 可以求出系数 d_n ($n = 0, 1, 2, \dots$)。

当 $n = 0$ 时

$$d_0 = \frac{M_0/2}{\rho A l + M_0/2} v_0 \quad (44)$$

d_0 即为系统的刚性响应系数，它与经典 Timoshenko 梁的结果是一致的，说明系统考虑的弹性因素的改变并不改变其刚性响应。

当 $n = 1, 2, 3, \dots$ 时

$$d_n = \frac{M_0 v_0 Y_n(l)}{2 \rho A \omega_n K_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (45)$$

d_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 即为系统的弹性响应系数，得到了所有的响应系数后，系统的所有动力响应也就可以求得。求得系统的速度 $v(x, t)$ ，剪力 $Q(x, t)$ ，弯曲 $M(x, t)$

$$v(x, t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \omega_n \cdot Y_n(x) \cos \omega_n t \quad (46)$$

$$Q(x, t) = A G \mu \cdot \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot B_n(x) \sin \omega_n t \quad (47)$$

$$M(x, t) = -E I \cdot \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot \Psi'_n(x) \sin \omega_n t \quad (48)$$

冲击力为冲击点左右两端的剪力之差，由于本冲击系统的结构和荷载在全结构范围内呈正对称分布，因此速度响应 $v(x, t)$ ，弯曲响应 $M(x, t)$ 在全结构范围内也呈正对称分布，而剪力响应 $Q(x, t)$ 在全结构范围内则呈反对称分布，原冲击系统的冲击力可以写为

$$P(t) = 2Q(l^-, t) \quad (49)$$

这里 $Q(l^-, t)$ 表示冲击点左端的剪力。

5 算例分析

选取一根两端自由梁，在中点受一小球正碰撞，如图 1 所示，取梁长 $L = 36.576 \text{ cm}$ ；截面积 $A = 6.452 \text{ cm}^2$ ；弹性模量 $E = 2.067 \times 10^5 \text{ MPa}$ ；质量密度 $\rho = 7.75 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ；截面形状系数 $\mu = 2/3$ ；弹性、剪切模量比 $E/G = 8/3$ ；小球与梁的质量比 $\lambda = 1$ ；截面惯性半径 $r_g = 0.02L$ 。挠曲波中的纵波波速与剪切波波速分别为 $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ 和 $c_s = \sqrt{kG/\rho}$ ，二者之比为 $c_0/c_s = 2$ 。由于冲击的过程非常短，因此采用以纵波的波速来量度冲击的时间，不妨令

$$\tau = t \cdot c_0/L \quad (50)$$

从上式可以看出，纵波从冲击点传到梁端，再从梁端反弹回冲击点的时间为 1。

由于系统的对称性，用对称原则将系统响应在全梁范围内给出，并将沿梁长的 x 轴的零点定在梁的左端点，于是冲击点对应位置在 $x/L = 0.5$ 处，而右端点则在 $x/L = 1$ 处。

由图 3 中可以看出，在考虑了梁的剪切变形所引起的转动惯量后，在初始一段时间内冲击力的峰

值明显减小，并且冲击力有一个明显的上升过程，而不是像经典 Timoshenko 梁的冲击力在 $\tau = 0$ 时就突然出现最大的峰值，事实上在碰撞过程中冲击力是不可能一开始就到达峰值的，另外在 $\tau = 1.5$ 左右，经典 Timoshenko 梁冲击力呈现很大的波动，然而这时刻，在梁冲击点处，回弹反射的波中将只有纵波而剪切波尚未到达，因此出现如此大的波动是不客观的。

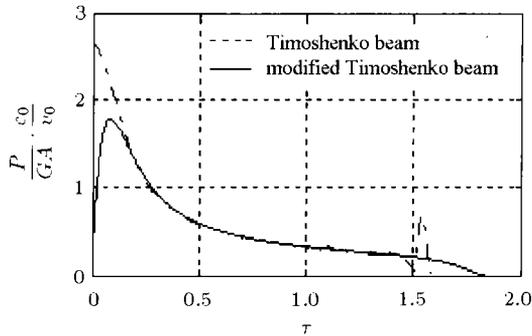


图 3 冲击系统的冲击力响应
Fig.3 Impact force response of impact system

图 4 为 $\tau = 0.4$ 时梁的剪力分布图，此时剪切波行进了约 $\tau \cdot L/2$ 距离，到达 $x/L = 0.3$ 处，从图中可以看出，梁的剪切变形所引起的转动惯量对剪力的峰值影响很大，这是由于剪切变形所引起的转动惯量吸收了部分能量所致，它起了一个缓冲的作用，使得在剪切波到达时不会出现特别尖锐的很大的峰值。

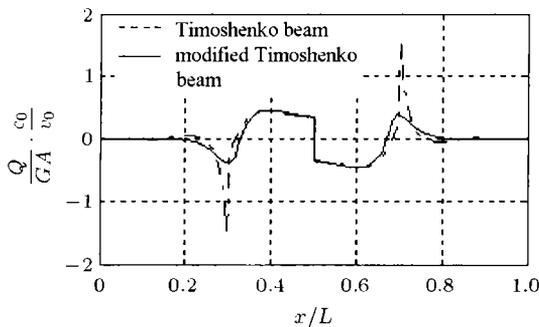


图 4 冲击系统的剪力响应分布 ($\tau = 0.4$)
Fig.4 Shear force response distribution of impact system ($\tau = 0.4$)

图 5 为 $\tau = 0.4$ 时梁的弯矩分布图，从图中可以看出梁的剪切变形所引起的转动惯量对梁的弯矩影响不大，经典 Timoshenko 梁和修正的 Timoshenko 梁中的弯矩相差不大。

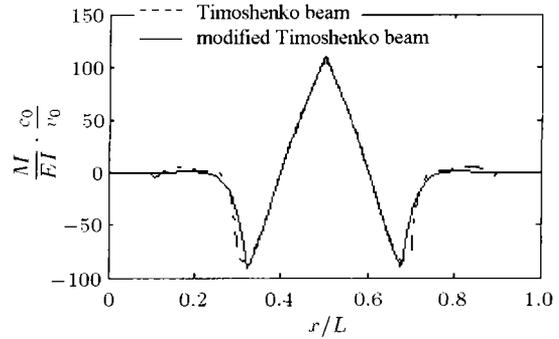


图 5 冲击系统的弯矩响应分布 ($\tau = 0.4$)

Fig.5 Bending moment response distribution of impact system ($\tau = 0.4$)

图 6 表示冲击点处的弯矩随时间的变化情况，可以看出在纵波反射波尚未到达冲击点时，Timoshenko 梁和修正的 Timoshenko 梁在冲击点的弯矩几乎相同，但当纵波反射波到达冲击点后，Timoshenko 梁的弯矩先出现小幅的振荡，到 $\tau = 1.5$ 处，则出现大幅的振荡，然而在这一段时间内剪切波尚未传到冲击点，可以认为这个振荡是由纵波所引起的，但是引起如此大的振荡，似乎是不合理的，而在修正的 Timoshenko 梁中，由图可以看出，纵波引起的振荡是非常小的。

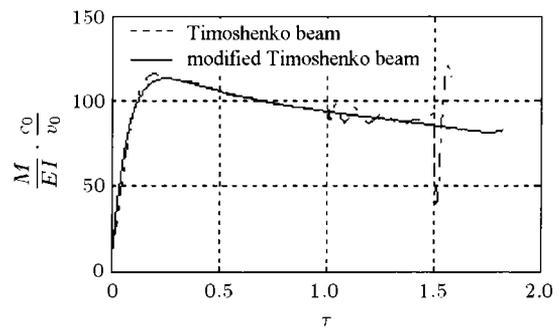


图 6 冲击点处的弯矩随时间变化图

Fig.6 Bending moment-time chart at impact point

在以上算例的具体参数基础上，作者另外选取了两种不同材料的梁，其中一种梁的剪切模量 G 减小 20%，其余均与上述算例相同；另一种梁的弯曲模量 E 增大 25%，其余参数均与上面算例相同。另外还单独将质量比减小为原来的 0.1 倍，求出了它的响应。为求统一，将各响应图用以表达的尺度（即分母上的 GA 或 EI ，以及分子上的 c_0 ，时间横坐标 τ ）均以原算例使用的数据进行计算，并记为 $G_0A, E_0I, c_0 = \sqrt{E_0/\rho}$ ， τ 还是定义为纵波以波速 c_0 传波距离为 L （梁的全长）时所用时间为 1，以上变化的响应可由下面的比较图所示。

如图 7 所示，当弯曲刚度增大 25%(其余条件不变)时，冲击力的变化比较小，但随着冲击时间的延长，剪切波回传到冲击点，将激起第 2 个波峰。当剪切刚度减小 20% 后(其余条件不变)，冲击力的峰值有一定的减小，但随着冲击时间的延长，剪切波回传到冲击点，将同样激起第 2 个波峰，但其第 2 个波峰的出现有一个明显的滞后现象，这是由于剪切刚度的减小，使得剪切波波速减小所致。由图还可以看出，当质量比减小时，其冲击力和冲击时间都减小，由于质量比的影响比较直观而易于接收，以下就不再叙述。

图 8 显示了刚度变化和质量比对剪力分布响应的影响，图中所画曲线为 $\tau = 0.4$ 时的剪力分布图，由图可以看出剪切刚度减小后，使剪力分布在波峰处有比较明显的削弱，当弯曲刚度增大后，对梁的剪力分布影响不大。

从图 9 可以看出，剪切刚度的变化，对梁中弯矩的响应分布几乎没有影响；弯曲刚度的变化，则将使梁的弯矩分布有比较明显的影响。

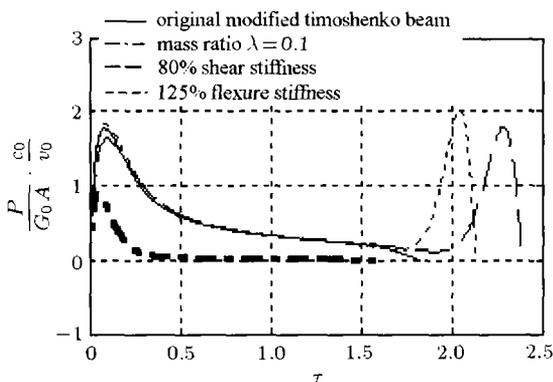


图 7 刚度变化和质量比对冲击力响应的影响
Fig.7 Effect of stiffness and mass ratio on impact force response

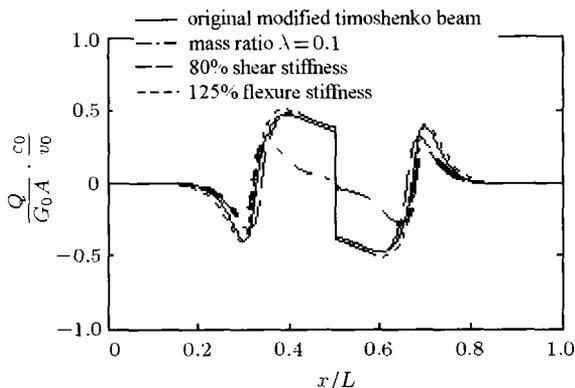


图 8 刚度变化和质量比对剪力分布响应的影响 ($\tau = 0.4$)
Fig.8 Effect of stiffness and mass ratio on distribution of shear force response of beam ($\tau = 0.4$)

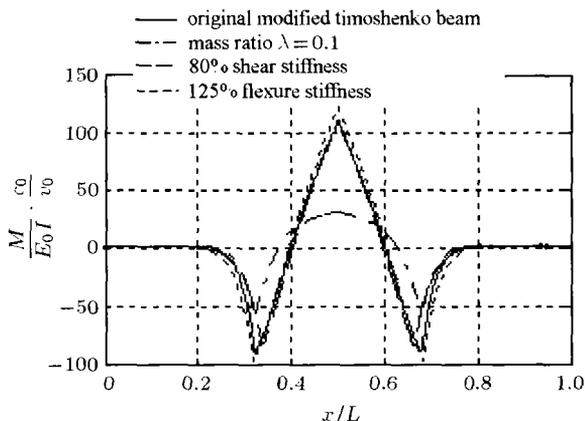


图 9 刚度的变化和质量比对梁弯矩响应分布的影响 ($\tau = 0.4$)
Fig.9 Effect of stiffness and mass ratio on distribution of bending moment response of beam ($\tau = 0.4$)

由图 10 可以看出，弯曲刚度的变化，使梁冲击点弯矩产生了明显的影响，在弯曲刚度增加而使冲击过程延长的情况下，在大约 $\tau = 2$ 的时候，弯矩出现了第 2 个峰值并迅速回落直至冲击过程结束；而剪切刚度的减小，除了使得其冲击过程时间延长，并可能出现第 2 个弯矩峰值外，对冲击点的弯矩基本没有变化，其弯矩第 2 个响应波峰也同样有明显的降低及滞后现象。

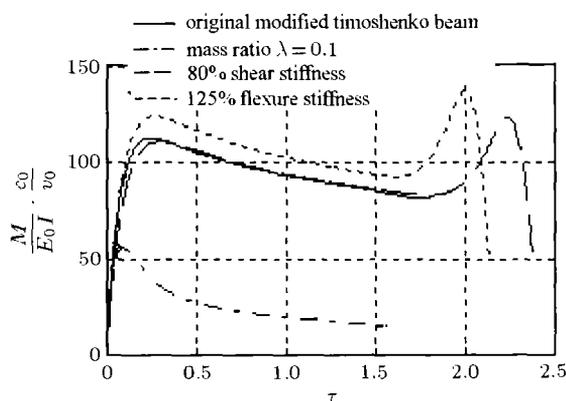


图 10 刚度变化和质量比对冲击点弯矩响应的影响
Fig.10 Effect of stiffness and mass ratio on bending moment response at impact point of beam

6 结 论

(1) 推导了修正 Timoshenko 梁的振型正交性。

运用分离变量法求出了一个冲击系统的横向动力响应解析解。

(2) 对无约束冲击系统进行了冲击数值分析, 求出了无约束修正 Timoshenko 梁受一个集中质量冲击后的响应, 并与经典 Timoshenko 梁受同样冲击后的响应进行了分析比较. 梁的剪切变形所引起的转动惯量对梁的剪力影响比较大, 特别是剪力峰值的地方; 而对梁的弯矩分布影响不大, 在纵波反射波传到之前几乎没有影响, 在纵波反射波传到该处后则出现了明显的影响. 但对冲击点处的弯矩, 对梁的剪切变形所引起的转动惯量的考虑, 修正了不考虑剪切变形所引起转动惯量的情况下在纵波反射波传到该处所逐渐出现的大幅振荡现象.

(3) 分析了刚度和冲击质量比的变化对系统动力响应的影响, 发现弯曲刚度的变化, 对冲击力来说, 在其第 2 个波峰出现前影响不大, 但对冲击点的弯矩响应有较大的影响, 当弯曲刚度增大时, 将使冲击时间延长, 当冲击过程结束之前, 若剪切波能从梁端反射回冲击端, 则梁的冲击力和冲击点的弯矩都将被激起第 2 个峰值. 剪切刚度的减小, 将使剪切力峰值减小, 系统的冲击力峰值减小, 使冲击时间延长, 当冲击过程结束之前, 若剪切波能从梁端反射回冲击端, 则梁的冲击力和冲击点的弯矩同样都将被激起第 2 个峰值, 但由剪切刚度减小而激起的这两个第 2 波峰都会出现明显滞后现象, 另外, 质量比的减小将使这些响应减小, 相应时间缩短.

参 考 文 献

- 1 Timoshenko S, Young DH, Weaver Jr W. *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley & Sons, Inc, 1974
- 2 邢誉峰. 有限长 Timoshenko 梁弹性碰撞接触瞬间的动态特性. *力学学报*, 1999, 31(1): 67~74 (Xing Yufeng. The characteristics of Timoshenko beam during the process of elastic impact and contact. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, 31(1): 67~74(in Chinese))
- 3 邢誉峰, 诸德超. 用模态法识别结构弹性碰撞载荷的可行性. *力学学报*, 1995, 27(5): 560~566 (Xing Yufeng, Zhu Dechao. The feasibility of determination of rigid/elastic impact loads between structures with the method of mode superposition. *Acta Mechanica Sinica*, 1995, 27(5): 560~566(in Chinese))
- 4 诸德超, 邢誉峰. 点弹性碰撞问题之解析解. *力学学报*, 1996, 28(1): 99~103 (Zhu Dechao, Xing Yufeng. Analytical solution of point elastic impact between structures. *Acta Mechanica Sinica*, 1996, 28(1): 99~103(in Chinese))
- 5 陈镭, 郑海涛, 薛松涛等. 无约束 Timoshenko 梁横向冲击响应分析. *应用数学和力学*, 2004, 25(11): 1195~1202 (Chen Rong, Zheng Haitao, Xue Songtao, et al. Analysis on transverse impact response of an unrestrained Timoshenko beam. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, 25(11): 1195~1202(in Chinese))
- 6 陈镭, 万春风, 薛松涛等. Timoshenko 梁运动方程的修正及其影响. *同济大学学报 (自然科学版)*, 2005, 33(6): 711~715 (Chen Rong, Wan Chunfeng, Xue Songtao, et al. Modification of motion equation of Timoshenko beam and its effect. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2005, 33(6): 711~715(in Chinese))
- 7 万春风. Timoshenko 梁运动方程的修正及其在结构冲击响应中的应用. [硕士论文]. 上海: 同济大学, 2003.12 (Wan Chunfeng. The modification of motion equation of timoshenko beam and its application in impact response of structures. [Master Thesis]. Shanghai: Tongji University, Dec. 2003 (in Chinese))

1 Timoshenko S, Young DH, Weaver Jr W. *Vibration Prob-*

IMPACT RESPONSE OF AN UNRESTRAINED MODIFIED TIMOSHENKO BEAM¹⁾

Chen Rong^{*,2)} Wan Chunfeng* Xue Songtao^{*†} Tang Hesheng*

**(Research Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Center for Aerospace Technology,
Tongji University, Shanghai 200092, China)*

†(Department of Architecture, School of Science and Engineering, Kinki University, Osaka 577-8802, Japan)

Abstract In this paper, the modified motion equation of Timoshenko beam is first introduced, which is then compared with that of Timoshenko beam. The orthogonality conditions of the modified Timoshenko beam, where the rotary inertia caused by the shear deformation is considered, are derived. The impact response formulas of an unrestrained modified Timoshenko beam under the impact of a lumped mass are deduced, and the corresponding numerical examples are analyzed. The evaluation results are compared with the impact response of the classical unrestrained Timoshenko beam with the same lumped mass. Finally, the effects of the beam stiffness and impact mass ratio on the response are discussed.

Key words unrestrained, modified Timoshenko beam, shear deformation, rotary inertia, orthogonal condition, impact response

Received 20 September 2004, revised 31 December 2005.

1) The project supported by the National Natural Science Found of China for Outstanding Young Scientists (59925820).

2) E-mail: chenrong@mail.tongji.edu.cn