

杆系结构多荷载识别的三角级数分析法

范存新¹, 陈家瑾¹, 张毅¹, 唐和生²

(1. 苏州科技学院 工程力学系江苏省结构工程重点实验室, 苏州 215011; 2. 同济大学 结构工程与防灾研究所, 上海 200092)

摘要: 本文提供了一种识别杆系结构受到多荷载的作用的三角级数识别方法。将集中荷载展成三角级数且借助结构力学中的位移法建立了单根基本梁(梁单元)的位移方程, 利用位移测量值反演所受到的集中荷载大小和位置。算例表明本文所用级数收敛性较好, 可获得稳定的收敛值。

关键词: 荷载识别; 杆系结构; 三角级数

中图分类号: O342 **文献标识码:** A **文章编号:** 0254-0053(2008)05-487-5

Analysis Method of Trigonometric Series for Multiloads Identification on Member Structure

FAN Cun-xin¹, CHEN Jia-jin¹, ZHANG Yi¹, TANG He-sen²

(1. Dept. of Engineering Mechanics, Suzhou University of Science & Technology, Suzhou 215011, China;

2. Research Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: An analysis method of trigonometric series for multi loads identification on member structure was presented. The concentrated load was carried out into trigonometric series. Based on the displacement method, the displacement equation of beam element was established. Based on the displacement of loaded structure, the size and the location of load on the structure were back-calculated iteratively. It is clear that the convergence property of trigonometric series is good through the example of the calculation.

Key words: loads identification; member structure; trigonometric series

随着智能结构在重大工程中的运用, 智能化的、在线的、实时的结构健康检测技术是这一问题的一个重要发展方向, 而智能结构最基本的特征是它具有自我诊断功能和自适应功能。自诊断功能是指结构能够根据外界环境的变化引起的动力、静力响应的变化, 判断导致该响应的原因^[1]。自诊断功能的实现过程从数学本质上讲是一个求解反问题的过程, 其中特别重要的是荷载识别的问题, 即当已知结构中一些点的位移信息, 反推出所受荷载的大小和作用点位置, 这种问题实际上是求解位移的反问题。近年来国内外有关学者对荷载识别问题进行了广泛的研究, 但大多研究单个荷载和简单结构的荷载的识别问题, 对于复杂杆系结构在多荷载作用下的识别问题研究甚少^[2~5]。本文就是针对杆系结构, 包括静定和超静定杆系结构, 在多荷载作用下的识别问题作了一些研究, 提供了一种识别杆系结构受到多荷载的作用的三角级数识别方法, 算例表明本文所用级数收敛性较好, 可获得稳定的收敛值。

1 梁单元的位移方程

现将杆系结构离散成有限个杆单元, 可以一根杆为一单元, 也可以同一刚度一段杆为一单元, 建立梁

收稿日期: 2007-10-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(50708076); 江苏省高校自然科学基金(08KJB560003)

作者简介: 范存新(1968-), 男, 江苏苏州人, 教授, 博士。研究方向: 工程力学。

单元的位移方程。

1.1 两端铰支梁单元位移方程

设简支梁在集中荷载 P_i 作用下,其作用点位置为 x_i ,该梁单元长度为 l_k ,刚度 EI ,直角坐标如图1。在此坐标下转角以顺时针为正,支座 A, B 相对线位移 Δ_{AB} 以顺时针为正,将荷载 P_i 展成正弦三角级数,可得梁上任一点线位移。

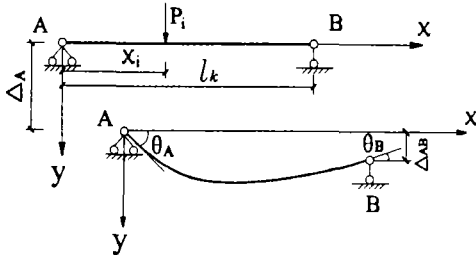


图1 两端铰支梁单元位移

Fig.1 Displacements of beam with hinged ends

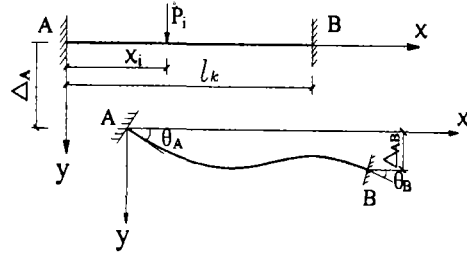


图2 两端固支梁单元位移

Fig.2 Displacements of beam with fixed ends

$$y(x) = - \sum_m \frac{2P_i l_k^3}{EI m^4 \pi^4} \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \sin \frac{m\pi}{l_k} x \quad (1)$$

若有多个集中荷载,则上式写成

$$\text{线位移: } y(x) = - \sum_m \left[\frac{2 l_k^3}{EI m^4 \pi^4} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \sin \frac{m\pi}{l_k} x \right] \quad (2)$$

$$\text{角位移: } \theta(x) = - \sum_m \left[\frac{2 l_k^2}{EI m^3 \pi^3} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \cos \frac{m\pi}{l_k} x \right] \quad (3)$$

设支座 A 的线位移 Δ_A , A, B 两支座相对侧向线位移 Δ_{AB} , 则

$$y(x) = \Delta_A + \frac{x}{l_k} \Delta_{AB} - \sum_m \left[\frac{2 l_k^3}{EI m^4 \pi^4} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \sin \frac{m\pi}{l_k} x \right] \quad (4)$$

$$\theta(x) = \frac{\Delta_{AB}}{l_k} - \sum_m \left[\frac{2 l_k^2}{EI m^3 \pi^3} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \cos \frac{m\pi}{l_k} x \right] \quad (5)$$

(4), (5) 式即为两端铰支梁单元在多集中荷载下的位移转角方程。若能测得梁单元上若干点位移,就可求得荷载大小与作用点位置。

1.2 两端固定梁单元位移方程

设两端固定梁在集中荷载 P_i 作用下,其作用点位置 x_i ,单元长 l_k 刚度 EI ,在此直角坐标下,转角与弯矩均以顺时针为正,可得

$$\begin{aligned} y(x) = & \Delta_A - \sum_m \left[\frac{2 l_k^3}{EI m^4 \pi^4} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \sin \frac{m\pi}{l_k} x \right] + \\ & \left(\frac{l_k}{3} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6 l_k} \right) \sum_m \left[\frac{8 l_k}{EI m^3 \pi^3} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \left(1 + \frac{(-1)^m}{2} \right) \right] + \\ & \frac{1}{6} \left(\frac{x^3}{l_k} - l_k x \right) \sum_m \left[\frac{8 l_k^3}{EI m^3 \pi^3} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \left((-1)^m + \frac{1}{2} \right) \right] + \\ & \frac{\theta_A}{l_k} \left(l_k x - 2x^2 + \frac{x^3}{l_k} \right) + \theta_B \left(-\frac{x^2}{l_k} + \frac{x^3}{l_k^3} \right) + \Delta_{AB} \left(3 \frac{x^2}{l_k^2} - \frac{x^3}{l_k^3} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\theta(x) = - \sum_m \left[\frac{2 l_k^2}{EI m^3 \pi^3} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \cos \frac{m\pi}{l_k} x \right] +$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{l_k}{3} - x + \frac{x^2}{2l_k}\right) \sum_m \left[\frac{8l_k}{EI m^3 \pi^3} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \left(1 + \frac{(-1)^m}{2} \right) \right] + \\ & \frac{1}{6} \left(\frac{3x^2}{l_k} - l_k \right) \sum_m \left[\frac{8l_k}{EI m^3 \pi^3} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \left((-1)^m + \frac{1}{2} \right) \right] + \\ & \frac{\theta_A}{l_k} \left(l_k - 4x + \frac{3x^2}{l_k} \right) + \frac{\theta_B}{l_k} \left(-2x + \frac{3x^2}{l_k} \right) + \Delta_{AB} \left(\frac{6x}{l_k^2} - \frac{6x^2}{l_k^3} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

1.3 一端固定一端铰支梁单元位移方程

一端固支一端铰支梁的情况,不难证明位移方程可导出为

$$\begin{aligned} y(x) = \Delta_A - \sum_m \left[\frac{2l_k^3}{EI m^4 \pi^4} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \sin \frac{m\pi x}{l_k} \right] + \left(\frac{l_k x}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6l_k} \right) \sum_m \left[\frac{6l_k}{EI m^4 \pi^4} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \right] + \\ 3 \left(\frac{l_k x}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6l_k} \right) \frac{\theta_A}{l} + 3 \left(\frac{x^2}{2l_k^2} - \frac{x^3}{6l_k^3} \right) \Delta_{AB} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \theta(x) = - \sum_m \left[\frac{2l_k^2}{EI m^3 \pi^3} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \cos \frac{m\pi x}{l_k} \right] + \left(\frac{l_k}{3} - x + \frac{x^2}{2l_k} \right) \sum_m \left[\frac{6lk}{EI m^3 \pi^3} \left(\sum_i P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} \right) \right] + \\ 3 \left(\frac{l_k}{3} - x + \frac{x^2}{2l_k} \right) \frac{\theta_A}{l} + 3 \left(\frac{x}{l_k^2} - \frac{x^2}{2l_k^3} \right) \Delta_{AB} \end{aligned} \quad (9)$$

由于一根梁中可能有几段变截面,则可将一根梁分成几个梁元。也可能一根杆上有几个集中荷载,因此也可将分成几个梁单元,设每个单元只存在一个集中荷载,则位移方程可根据边界条件支承情况,认定其属于哪一种梁单元。

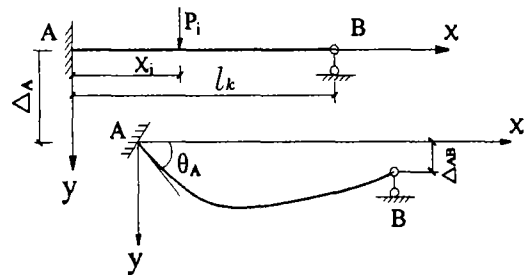


图3 一端固支一端铰支梁单元位移
Fig.3 Displacements of beam with one end fixed and the other hinged joined

2 识别方法

2.1 基本概念

本问题的基本未知数是荷载 P_i 的大小与作用点位置 x_i ,为了求出作用在结构上各杆上的荷载 P_i, x_i ,必须已知结构上各杆件(即各单元)足够多点的线位移 $y(x)$ (或角位移 $\theta(x)$,这些点可以是各单元中的某些点(距离杆端为 x 的距离)的线位移与角位移,也可以是杆端(单元端点)的线位移与角位移,这些位移与各荷载大小与作用点位置有确定的关系,因此只要有足够量的已知点的位移,就可根据不同支承的单元位移方程(4) - (9)求出杆端位移 $\Delta_A, \theta_A, \Delta_{AB}, \theta_B$ 和作用在各杆上的荷载 P_i, x_i 。必须指出当已知荷载下的结构的某点位移是唯一的,但某点的荷载大小与位置不一定是唯一的,因此要得到唯一解,必须是多个点的已知位移值,才能确定的某荷载的大小与位置。

2.2 基本原理

为了说明本文提出的级数分析法的原理。现以图4(a)结构来说明该方法的基本原理,为了计算 P_1, P_2, P_3, P_4 荷载大小与位置,现将刚架分成三个单元,根据连续性,单元①与单元②的杆端角位移 θ_B 相同。因此该结构有 $P_1, x_1, P_2, x_2, P_3, x_3, P_4, x_4$ 与 $\theta_B, \Delta_{BA}, \Delta_{CD}$ (其中 $\Delta_{BA} = \Delta_{CD}$)共10个未知数。前8个未知数是我们要求的未知数,后2个未知数是计算过程中过渡的未知数。因此必须测定比10个多的点的位移,才能求出此10个未知数。为了有足够的精确度和有确定解,必须事先测定比10个未知数多数倍(例如5倍或6倍)的点的位移值,因为单三角级数的收敛性较差。单元①可用(8) - (9)式计算。单元②可用(6) - (7)式计算,单元③可用(4) - (5)式计算。可用已知测定点的位移 $y(x)_n, \theta(x)_n$ 建立若干方程,然后可联立求解。求解过程中可先令 $z_m = P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k} (m = 1, 2, 3 \dots)$ 组成线性方程组。先解出 z_m ,然后再进一步求出 P_i, x_i 。其中未知数个数的确定按以下方法进行:

- 1) 公式(4)-(9)中有 Δ_A, θ_A 等, 它们与位移法中的线位移和角位移数相同, 即 $n_1 = n_\phi + n_f$, 式中 n_ϕ 为结构角位移数, n_f 为结构线位移数。
- 2) 每个荷载有大小和位置 2 个未知数, 即每个单元 i 个荷载共有 $n_2 = 2i$ 个未知数
- 3) 若取 m 项级数, 则新增未知数为 $n_3 = (m-1)i$
- 4) 结构的总未知数, 即需要测定的已知位移数由下式确定: $n = n_1 + kn_2 + kn_3 = n_\phi + n_f + 2ki + k(m-1)i$, 其中 k 为单元总数。

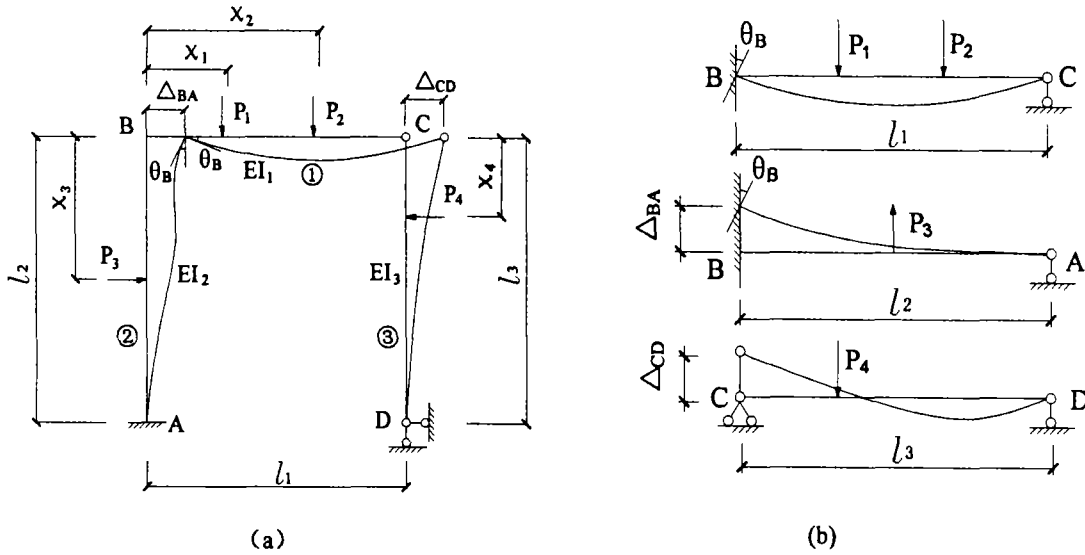


图 4 刚架
Fig. 4 Rigid frame

2.3 计算步骤

1. 将结构划分成若干单元;
2. 根据测定出的已知位移值, 建立各单元的若干单元位移方程;
3. 从方程组求出 $z_m = P_i \sin \frac{m\pi x_i}{l_k}$;
4. 再从多个的 z_m 求出 P_i 与 $\sin \frac{m\pi x_i}{l_k}$ 。然后再从若干个 $\sin \frac{m\pi x_i}{l_k}$ 中求 x_i 。

3 算例

超静定刚架 AB 杆受两个集中荷载, 横梁 BC 不受力横梁与竖柱的抗弯刚度 $EI = 16000\text{kN} \cdot \text{m}^2$, 测得 D、B、1、2、3、4、5、6 点位移为: D 点竖向位移 $\Delta_D = 0.0521\text{cm}$, B 点水平位移 $\Delta_B = 0.472\text{cm}$, $\Delta_1 = 0.414\text{cm}$, $\Delta_2 = 0.3333\text{cm}$, $\Delta_3 = 0.232\text{cm}$, $\Delta_4 = 0.0789\text{cm}$, $\Delta_5 = 0.0378\text{cm}$, $\Delta_6 = 0.0102\text{cm}$ 。

求杆 AB 上的两个集中荷载大小 P_1, P_2 与作用点位置 x_1, x_2 , 将刚架分成三个单元, BC 单元、A3 单元、3B 单元, 其未知数个数按 2.2 节中方法计算可知为 8, 即至少要已知 8 个点的位移值。

一、单元①, BC 单元可视为一端固定, 一端铰支

利用公式(8), 式中 $\Delta_A = 0, \Delta_{AB} = 0, \Delta_D = 0.000521\text{m}, l_k = 4\text{m}$, 可得 $\theta_B = 0.00069466\text{rad}$ 。

二、单元②为 A2 单元, 可视为两端固定

可利用公式(6)。此时 $\theta_A = 0, \Delta_A = 0, \Delta_{AB} = \Delta_3 = 0.00232\text{m}, l_k = \frac{l}{2} = 2\text{m}$ 。3 点 $x_3 = \frac{l}{2} = l_k = 2\text{m}, 4$

点 $x_4 = \frac{2l_k}{3} = 1.3333\text{m}, 5$ 点 $x_5 = \frac{l}{2} l_k = 0.6666\text{m}, 6$ 点 $x_6 = \frac{l}{12} = \frac{l_k}{6} = 0.3333\text{m}$ 。

解得 $P_1 = -10.278\text{kN}, x_1 = 1.2941\text{m}$ 。精确答案 $P_1 = -10\text{kN}, x_1 = 1.333\text{m}$, 误差 3% 左右。

三、单元③为 3B 单元, 也可视为两端固定

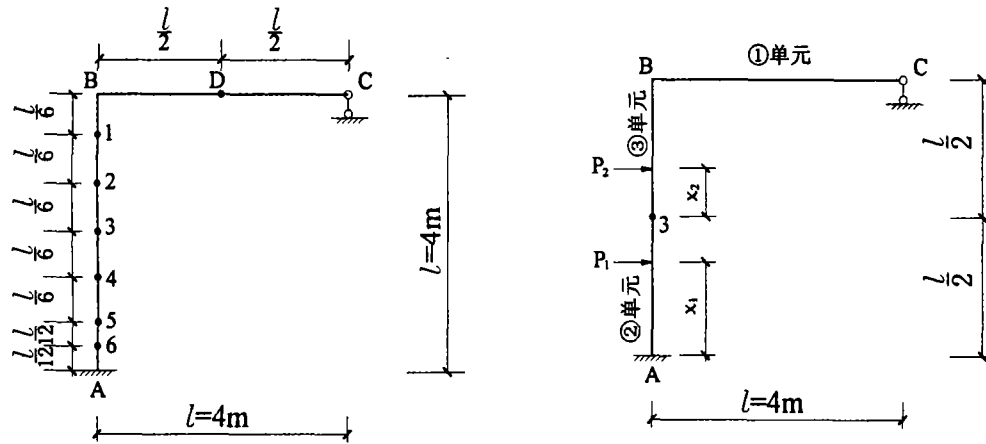


图5 刚架

Fig.5 Rigid frame

仍可利用公式(6)。公式中 $\Delta_A = \Delta_3 = 0.002322\text{m}$, $\Delta_{AB} = \Delta_B - \Delta_3 = 0.0024\text{m}$, $\theta_A = \theta_3 = 0.00161\text{rad}$, (在单元②中算出), $\theta_B = 0.00069466\text{rad}$ (在单元①中算出)。可求得 $x_2 = 0.5737\text{m}$ (精确答案 $x_2 = 10.6666\text{m}$), $P_2 = -11.42\text{kN}$ (精确解为 10kN), 误差: 荷载大小 14.2%, 作用点位置误差 9.3%。

4 结语

(1) 从实例计算看到有误差产生, 产生误差的原因主要有二个, 其一: 因为测量位移值是个近似值, 若位移点数不足够多, 计算就会有误差, 其二: 本文用的是将荷载展开成富氏级数, 计算中若仅取几项, 也会产生误差, 必须测量位移点值多, 这样所取的项数就可以多, 就可以减少误差。

(2) 本文方法仅适用于事先已知梁上的集中荷载数, 本文公式中的荷载位置就是直接从每个梁单元的端点起计算。利用本文方法可以计算出杆系结构在多集中荷载作用下的位移反问题。本文仅讨论了集中荷载作用下的情形, 对于分布荷载和集中力偶作用下的位移反问题, 也可以参考本文方法, 进一步研究得出。

参考文献:

- [1] 王孟, 王养丽. 一种结构荷载识别的级数展开法[J]. 华北电力大学学报, 2003, 28(3): 77-79.
- [2] 王书法, 沈大荣. 板结构荷载识别分析[J]. 武汉工业大学学报, 1997, 19(2): 102-104.
- [3] Zabaves N, Morellas V, Schaur D. Spatially regularized solution of inverse elasticity problem using the BEM[J]. Communications in Applied Numerical Methods, 1989, 5(8): 547-553.
- [4] Maniatty A, Zabaves N, Slotson K. Method for solving inverse elasto-viscoplastic problems [J]. J Eng mech Div ASCE, 1989, 115(6): 1303-1317.
- [5] 周晚林, 王鑫伟, 胡自力. 压电智能结构荷载识别方法的研究[J]. 力学学报. 2004, 36(4): 491-495.
- [6] 王登刚, 刘迎曦, 李守巨. 弹性力学非线性反演方法概述[J]. 力学进展, 2003, 33(2): 166-174.