

桁架结构形状优化的粒子群优化算法

唐和生¹, 李峰¹, 王勇¹, 薛松涛^{1,2}, 陈镭¹

(1. 同济大学 结构工程与防灾研究所, 上海 200092, thstj@hotmail.com;

2. 日本近畿大学 理工学部 建筑学科, 日本大阪 577-8502)

摘要: 为解决有应力约束、几何约束以及局部稳定性约束的桁架结构的形状优化设计, 将粒子群优化 (PSO) 算法应用于桁架结构的形状优化设计. 首先详细介绍了原始 PSO 算法的基本原理, 然后引入压缩因子改进了原始的 PSO 算法, 并提出了合理的参数设置值. 优化计算过程中, 综合考虑了节点坐标和截面面积等两类不同性质的设计变量. 最后对几个经典问题进行了求解, 并与传统的优化算法进行了比较. 数值结果表明, 改进的 PSO 算法具有良好的收敛性和稳定性, 可以有效地进行桁架结构的形状优化设计.

关键词: 粒子群优化; 优化; 形状优化; 桁架结构

中图分类号: TU323.4; TU311 **文献标识码:** A **文章编号:** 0367-6234(2009)12-0094-06

Particle swarm optimization algorithm for shape optimization of truss structures

TANG He-sheng¹, LI Feng¹, WANG Yong¹, XUE Song-tao^{1,2}, CHEN Rong¹

(1. Research Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Tongji University, Shanghai, 200092, China, thstj@hotmail.com; 2. Department of Architecture, School of Science and Engineering, Kinki University, Osaka, 577-8502, Japan)

Abstract: In order to realize the shape optimization of truss structures with stress constraints, geometrical constraints, and local stability constraints, particle swarm optimization (PSO) algorithm was adopted in this paper. The basic principle of original PSO algorithm was presented, then it was modified by the introduction of constriction coefficient, and the reasonable values of the coefficient were proposed for the modified PSO algorithm. Node coordinates and section area were considered in the optimization. Several classical problems were solved using the modified PSO algorithm, and the results were compared with those solved using traditional optimization algorithms. The numerical examples show that the modified PSO algorithm has good convergence and stability, then can be applied to the shape optimization of truss structures effectively.

Key words: particle swarm optimization; optimization; shape optimization; truss structures

桁架结构形状优化时的设计变量通常选取为节点坐标和杆件截面尺寸. 由于两类设计变量的性质不同, 其取值方式和对目标函数以及约束函数的影响程度也不一样. 早期的研究多将这两类变量统一起来处理^[1], 设计变量多, 计算量大, 同时可能会出现收敛困难. 为了避免上述困难, 近年来出现一些改进方法, 例如, 分层优化法^[2]、设计变量分离共轭梯度法优化方法^[3]、遗传算法 (GA)^[4]和渐进优化方法^[5]等. 虽然分层优化的

思想虽然减少了设计变量的数量, 但由于没有考虑两种设计变量之间的耦合作用, 通常很难得到最优解. 而共轭梯度法及渐进优化方法全局寻优能力差, 对结构的初始形状要求高, 很难得到全局最优解. GA 优化方法计算量较大, 难以应用于实际工程结构优化设计.

随着计算技术的发展, 一些新的算法逐渐被提出并开始被应用于工程优化领域, 粒子群优化 (PSO)^[6]算法便是其中之一, 该算法是一种基于随机优化技术的群集智能算法. 作为一种新的演化算法, PSO 因概念简单、易于执行及收敛迅速而

收稿日期: 2008-10-24.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50708076).

作者简介: 唐和生 (1973—), 男, 博士, 副教授.

逐渐得到人们的关注^[7~9]. 在结构工程中, 基于实际结构系统优化的 PSO 的文献很少. 本文将 PSO 算法应用于桁架结构的形状优化, 通过对典型算例的求解并与相关文献的结果比较, 以评价利用 PSO 进行桁架形状优化的效果.

1 粒子群优化(PSO)算法

PSO 中, 种群的备选解称作粒子, 依靠与相邻的粒子共享信息来共存和同时进化. 当种群飞跃问题的搜索空间时, 每个粒子产生一个用速度向量表示的解. 通过采用自己的飞行经验(如在以前的飞行中对最优位置的记忆)和它相邻位置的粒子的经验(如种群的最优解), 每个粒子调整它的速度来寻找较好的解(位置). $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ 为粒子群 i 的当前位置; $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ 为粒子群 i 的当前飞行速度; $P_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})$ 为粒子群 i 所经历的最好位置, 即个体最好位置. 速度更新方程和位置更新方程为

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t) (p_{ij}(t) - x_{ij}(t)) + c_2 r_{2j}(t) (P_{gj}(t) - x_{ij}(t)). \quad (1)$$

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + v_{ij}(t+1). \quad (2)$$

式中: j 为粒子的第 j 维; i 为第 i 个粒子; t 为粒子进化代数; c_1, c_2 为加速度常数; r_1 和 r_2 为服从 $[0, 1]$ 上相互独立均匀分布的随机数; $p_{ij}(t)$ 为粒子群 i 所经历的最优位置; $P_{gj}(t)$ 为所有粒子所经历的最优位置.

本文采用引入压缩因子^[10]改进的 PSO 进行结构优化设计, 速度更新方程为

$$v_{ij}(t+1) = \chi [v_{ij}(t) + c_1 r_{1j}(t) (p_{ij}(t) - x_{ij}(t)) + c_2 r_{2j}(t) (P_{gj}(t) - x_{ij}(t))]. \quad (3)$$

式中压缩因子为: $\chi = \frac{2}{|2 - \phi - \sqrt{\phi^2 - 4\phi}|}$,

$\phi = c_1 + c_2$. $\phi > 4$ 时, 压缩因子法能控制系统行为最终收敛, 选取合适的参数时压缩因子法可快速收敛^[10].

2 桁架结构形状优化

2.1 桁架结构形状优化的数学描述

桁架结构优化问题的求解, 即: 寻求使目标函数值最小且满足相关约束条件的最优设计变量 A .

2.1.1 设计变量

桁架结构的形状优化设计是在材料、布局一定的条件下, 对桁架的几何形状和截面尺寸进行优化设计, 因此取描述桁架结构的形状和截面尺寸的几何特征量为设计变量, 即节点坐标和截面

面积. 为了在优化过程中考虑这两类不同性质变量间的耦合作用对优化结果的影响, 本文综合考虑两类变量, 定义设计变量为

$$A = [A_1, A_2, \dots, A_n, X_1, X_2, \dots, X_l]^T. \quad (4)$$

式中: A_1, A_2, \dots, A_n 为杆件的截面积; X_1, X_2, \dots, X_l 为变量连接后各节点的坐标.

2.1.2 目标函数

目标函数是用来衡量设计方案好坏的一种指标, 与结构本身的特性有关. 由于桁架结构大都为钢结构, 从经济的角度考虑, 本文选择桁架的总重量为目标函数, 即

$$\min W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i(X) + \lambda M. \quad (5)$$

式中: W 为结构的重量; $L_i(X)$ 为第 i 组杆件的长度; A_i, ρ_i 分别为第 i 组杆件的截面积及密度; n 为截面设计变量进行变量连接后杆件的组数; M 为预先定义的一个大数; λ 为罚函数因子, 当结构设计变量满足约束条件时 $\lambda = 0$, 否则 $\lambda = 1$.

2.1.3 约束条件

桁架结构的形状优化还受到材料的性能、实际使用要求等条件的限制, 因此需要考虑的约束条件包括应力约束、位移约束、几何约束等.

1) 应力约束:

$$g_k^{\sigma}(A, X) = [\sigma_k] - \sigma_k \geq 0, \quad (k = 1, 2, \dots, K). \quad (6)$$

式中: $g_k^{\sigma}(A, X)$ 为应力约束; $[\sigma_k], \sigma_k$ 分别为第 k 组杆件的应力允许值和各种工况下的最不利应力值; K 为杆件的总组数.

2) 节点的位移约束:

$$g_{jl}^u(A, X) = [u_{jl}] - u_{jl} \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, ND). \quad (7)$$

式中: $[u_{jl}], u_{jl}$ 分别为特定节点 j 在给定方向 l 上的位移允许值和各种工况下最不利位移值; m 为节点总数; ND 为节点位移约束维数.

3) 杆件截面的尺寸约束:

$$A_{\min} \leq A \leq A_{\max}. \quad (8)$$

式中: A_{\min}, A_{\max} 为分别设定的杆件的截面尺寸的上、下限.

4) 节点的坐标约束:

$$\underline{x}_c \leq x_c \leq \bar{x}_c \quad (c = 1, 2, \dots, l). \quad (9)$$

式中: $\underline{x}_c, \bar{x}_c$ 分别是第 c 坐标的上下限; l 为节点变量数.

5) 局部稳定约束:

当杆件受压时, 临界应力和杆件的长度有关系. 形状优化过程中, 杆件长度随节点位置的变化而变化, 所以受压杆件的应力约束是动态变化的. 因此, 对于受压杆件需引入局

部稳定性约束条件

$$g_i^\sigma(A, X) = \phi_i [\sigma_i] - \sigma_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, q). \quad (10)$$

式中: $g_i^\sigma(A, X)$ 为考虑压杆稳定的应力约束, ϕ_i 为对应第 i 根受压杆件的受压稳定系数, q 为受压杆件的总数.

2.2 基于 PSO 算法的桁架形状优化程序

对桁架结构进行形状优化的过程中由于节点坐标是变化的, 结构分析时要依据设计变量值重新输入节点坐标, 这可能导致结构刚度矩阵发生奇异现象. 因此, 结构分析时先检查刚度矩阵是否奇异, 如果奇异, 则给杆件赋一个很大的应力值, 使其违反结构的应力约束, 从而使粒子自动逃离该位置. 取目标函数值为每个粒子的适应值. 基于 PSO 算法的桁架形状优化的流程如下:

步骤 1 设置程序参数, 初始化设计变量和粒子速度;

步骤 2 判断设计变量及粒子速度是否满足界限约束, 将设计变量限制在设计空间内;

步骤 3 进行结构分析, 计算出不同粒子所代表的设计变量对应的结构的性态变量, 即各杆件应力及节点位移. 优化过程中如果出现奇异的刚度矩阵时, 赋给杆件应力一个大值, 使其违反结构的应力约束;

步骤 4 计算粒子的适应度, 对不满足约束条件的粒子加上一个惩罚值;

步骤 5 比较每个粒子的适应度与其所经历的最好位置 P_i 的适应度, 取较好者作为该粒子当前的全局最优位置;

步骤 6 比较每个粒子的适应度与全局所经历的最优位置 P_g 的适应度, 取较好者作为当前的全局最优位置;

步骤 7 根据速度和位置更新方程更新粒子的速度和位置;

步骤 8 如未达到结束条件, 即足够好的适应度值或预设最大代数 G_{max} , 返回步骤二, 否则即停止.

3 数值分析

为了验证 PSO 对桁架结构进行优化设计的有效性, 以下对两个典型的桁架结构进行分析, 同时与其他方法进行比较. 考虑到工程实际情况, 本文的两个算例中只考虑了带有局部稳定性约束的情形. PSO 的计算参数选择如下: 粒子数 $PS = 40$, $\chi = 0.729$, 最大迭代次数 $G_{max} = 1000$, $c_1 = c_2 = 2.05$.

3.1 25 杆空间桁架

图 1 所示为 25 杆空间桁架, $L = 635\text{mm}$, 应力约束为 $[-275.8, 275.8]$ MPa, 材料的弹性模量 $E = 68947$ MPa, 密度 $\rho = 2768$ kg/m³, 1、2 节点的竖向位移约束 $d_{max} = 8.89$ mm. 两种工况下节点荷载见表 1, 杆件分组及对应的允许应力见表 2.

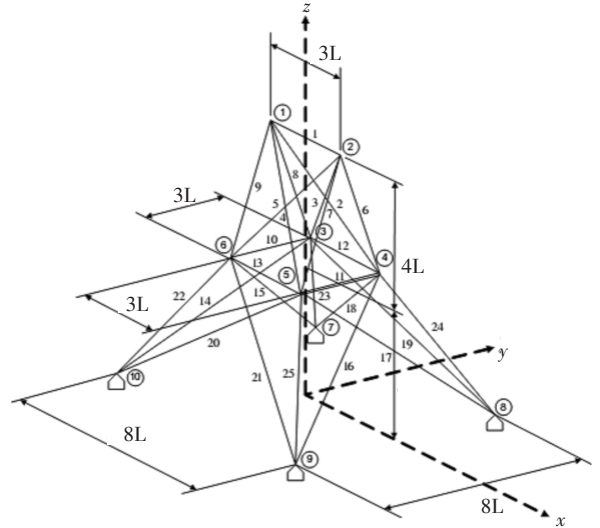


图 1 25-杆空间桁架

表 1 荷载工况及节点荷载

工况	节点号	F_x /kN	F_y /kN	F_z /kN
1	1	4.448	44.482	-22.241
	2	0	44.482	-22.241
	3	22.241	0	0
	6	22.241	0	0
2	1	0	88.964	-22.241
	2	0	-88.964	-22.241

表 2 杆件分组及允许应力

组号	杆件号	允许应力	
		σ^+ /MPa	σ^- /MPa
A_1	1	275.8	-275.8
A_2	2, 3, 4, 5	275.8	-275.8
A_3	6, 7, 8, 9	275.8	-275.8
A_4	10, 11	275.8	-275.8
A_5	12, 13	275.8	-275.8
A_6	14, 15, 16, 17	275.8	-275.8
A_7	18, 19, 20, 21	275.8	-275.8
A_8	22, 23, 24, 25	275.8	-275.8

节点 1、2 的位置在优化过程中保持固定, 节点 7、8、9、10 必须在 $x - y$ 平面内, 因此节点坐标设计变量设为 $[X_4, Y_4, Z_4, X_8, Y_8]^T$, 其他节点的位置坐标根据对称性得出. 设计变量为 $[A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, X_4, Y_4, Z_4, X_8, Y_8]^T$, 局部稳定性

约束取 $-39.27EA_i/L_i^2 \leq \sigma_{il}$ (杆件号 $i = 1, 2, \dots, 25$, 工况数 $l = 1, 2$), 节点坐标见表 3. 25 杆空间桁架形状优化评价函数曲线见图 2, 文献 [2] 及本文优化结果见表 4, 优化后桁架在两种工况下的杆件应力及对应的应力约束值见表 5, 优化的最终形状见图 3.

表 3 25 杆空间桁架节点坐标

节点	x	y	z
1	-952.5	0	5080.0
2	952.5	0	5080.0
3	$-X_4$	Y_4	Z_4
4	X_4	Y_4	Z_4
5	X_4	$-Y_4$	Z_4
6	$-X_4$	$-Y_4$	Z_4
7	$-X_8$	Y_8	0
8	X_8	Y_8	0
9	X_8	$-Y_8$	0
10	$-X_8$	$-Y_8$	0

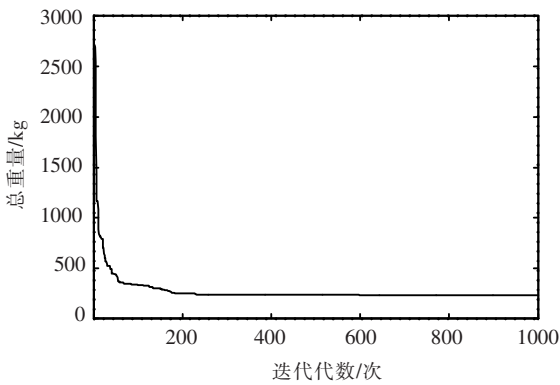


图 2 25 杆空间桁架形状优化收敛曲线

表 4 25 杆空间桁架形状优化结果比较

设计变量	本文	文献 [2]
A_1	65.1	6.452
A_2	301.0	358.064
A_3	642.1	973.546
A_4	64.7	6.452
A_5	91.0	86.451
A_6	263.5	94.839
A_7	442.3	512.257
A_8	411.0	444.515
X_4	911.9	913.638
Y_4	1530.3	1230.376
Z_4	3060.4	3095.498
X_8	971.2	1180.846
Y_8	3117.0	3064.256
总重量/kg	82.02	84.960

表 5 各工况下杆件应力以及对应的应力约束 MPa

杆件	工况 1 σ	工况 2 σ	允许应力	
			σ^+	σ^-
1	8.008	25.274	275.8	-48.613
2	-28.827	-75.200	275.8	-82.374
3	-16.080	68.329	275.8	-82.374
4	2.909	68.329	275.8	-82.374
5	15.655	-75.200	275.8	-82.374
6	-73.017	67.183	275.8	-242.048
7	29.715	-108.052	275.8	-242.048
8	-68.204	-108.052	275.8	-242.048
9	34.528	67.183	275.8	-242.048
10	16.308	31.690	275.8	-18.712
11	46.624	31.690	275.8	-18.712
12	125.124	30.700	275.8	-74.103
13	-73.888	30.700	275.8	-74.103
14	27.242	27.179	275.8	-23.048
15	-20.353	-23.041	275.8	-23.048
16	24.589	-23.041	275.8	-23.048
17	-23.006	27.179	275.8	-23.048
18	-35.790	53.475	275.8	-77.645
19	-55.690	-77.311	275.8	-77.645
20	31.162	-77.311	275.8	-77.645
21	11.262	53.475	275.8	-77.645
22	54.163	13.047	275.8	-93.661
23	-62.395	-53.135	275.8	-93.661
24	-93.636	13.047	275.8	-93.661
25	22.921	-53.135	275.8	-93.661

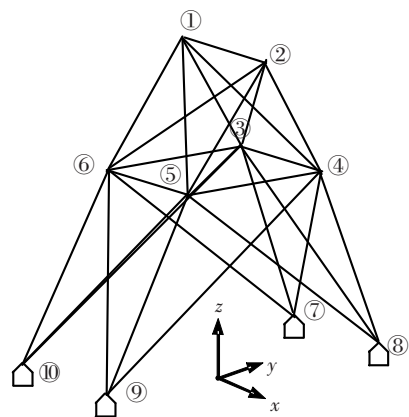


图 3 25 杆空间桁架形状优化结果

由图 2 可知 25 杆空间桁架形状的优化计算在迭代约 300 次后完全收敛。表 5 中加粗的数值表示对应的杆件达到了满应力, 在 1、2 节点 x 、 y 方向的最大位移为 8.89 mm 时, 第一种工况下杆件 24 达到满应力状态, 第二种工况下杆件 15、16、19 和 20 达到满应力状态。由表 4 可知, 优化

后所得桁架的总重量为 82.022 kg, 优于文献 [2] 的结果. 考虑到实际结构, 本文设定的截面尺寸下限为 64.52 mm², 而非文献 [2] 中的 6.45 mm². 由表 4 可知, 本文算法搜索空间较文献 [2] 小, 得到的总重量却更轻, 所以本文结果更优.

3.2 37 杆桁架桥

图 4 所示为 37 杆桁架桥的初始形状, 节点坐标见表 6. 假设下弦节点位置保持不变, 上弦节点可沿竖直方向移动, $P = 10 \text{ kN}$. 节点 10 的允许最大竖向位移为 10 mm, 优化过程中结构的对称性保持不变, 最小截面积为 50 mm², 材料的弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$, 密度 $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, 所有杆件的允许应力均为 240 MPa.

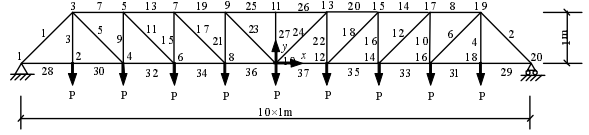


图 4 37 杆桁架桥

局部稳定性约束为 $\sigma_{cr_i} = \frac{\pi E \times A_i}{4L_i^2} (\sigma_i \leq \sigma_{cr_i})$. 根据结构的对称性, 取设计变量为 $[A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, A_{17}, A_{18}, A_{19}, Y_3, Y_5, Y_7, Y_9, Y_{11}]^T$. 优化评价函数曲线见图 5, 文献 [11] 与本文优化结果见表 7. 优化后桁架的杆件应力及对应的应力约束值见表 8, 优化的最终形状见图 6.

表 6 37 杆桁架桥节点坐标

节点	x	y	z	节点	x	y	z
1	-5000	0	0	11	0	Y_{11}	0
2	-4000	0	0	12	1000	0	0
3	-4000	Y_3	0	13	1000	Y_9	0
4	-3000	0	0	14	2000	0	0
5	-3000	Y_5	0	15	2000	Y_7	0
6	-2000	0	0	16	3000	0	0
7	-2000	Y_7	0	17	3000	Y_5	0
8	-1000	0	0	18	4000	0	0
9	-1000	Y_9	0	19	4000	Y_3	0
10	0	0	0	20	5000	0	0

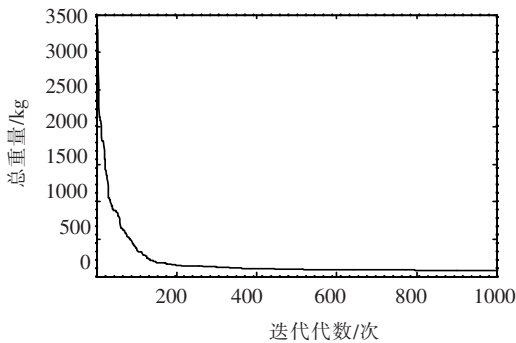


图 5 37 杆桁架桥形状优化收敛曲线

表 7 37 杆桁架桥形状优化结果比较

设计变量	本文结果	文献 [11]	设计变量	本文结果	文献 [11]
A_1	870.7	883.1	A_{14}	50.5	50.0
A_2	51.9	50.0	A_{15}	67.4	183.7
A_3	51.3	50.0	A_{16}	50.0	183.7
A_4	818.6	715.4	A_{17}	50.2	194.0
A_5	52.0	50.0	A_{18}	51.3	192.8
A_6	50.1	115.3	A_{19}	50.2	187.4
A_7	776.2	646.1	Y_3	508.2	1021
A_8	50.3	50.0	Y_5	904.4	1718
A_9	50.3	348.1	Y_7	1178.1	2269
A_{10}	754.0	553.8	Y_9	1346.1	2669
A_{11}	50.1	54.1	Y_{11}	1363.4	2734
A_{12}	50.9	50.0	总重量 /kg	77.46	105.2
A_{13}	746.8	528.2			

表 8 37 杆桁架桥杆件应力以及对应的允许应力 MPa

杆件	应力值 σ	允许应力	
		σ^+	σ^-
1	-114.068	240	-114.128
2	-114.068	240	-114.128
3	192.815	240	-33.115
4	192.815	240	-33.115
5	-1.746	240	-6.725
6	-1.746	240	-6.725
7	-116.239	240	-116.696
8	-116.239	240	-116.696
9	193.236	240	-10.478
10	193.236	240	-10.478
11	18.023	240	-4.544
12	18.023	240	-4.544
13	-119.053	240	-119.098
14	-119.053	240	-119.098
15	186.901	240	-5.974
16	186.901	240	-5.974
17	0.546	240	-3.475
18	0.546	240	-3.475
19	-119.891	240	-120.944

续表 8

20	-119.891	240	-120.944
21	199.321	240	-4.557
22	199.321	240	-4.557
23	83.536	240	-2.987
24	83.536	240	-2.987
25	-122.793	240	-123.131
26	-122.793	240	-123.131
27	62.734	240	-4.483
28	-3.467	240	-11.122
29	-3.467	240	-11.122
30	-4.676	240	-8.247
31	-4.676	240	-8.247
32	-6.243	240	-8.287
33	-6.243	240	-8.287
34	6.943	240	-8.454
35	6.943	240	-8.454
36	7.443	240	-8.279
37	7.443	240	-8.279

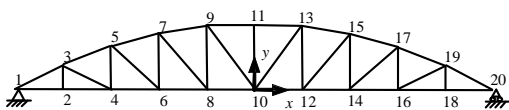


图 6 37 杆桁架桥形状优化结果

由图 5 可知,在考虑局部稳定性约束后,37 杆桁架桥形状优化计算在迭代约 500 次后基本收敛.表 8 中加粗的数值表示对应的杆件达到了满应力,节点 10 在 y 方向最大的位移仅为 8.07 mm,优化结果满足应力约束与位移约束.由表 7 可知,进行形状优化后桁架桥的总重量为 77.46 kg,优于文献 [11] 中的结果.由以上分析知,本文的算法可以有效地进行桁架结构的形状优化设计.

4 结 论

1) PSO 算法是一种新颖的启发式搜索的群集智能算法,和其他进化算法比较,PSO 算法不易陷入局部最优解,具有算法简单、易于实现、占用资源低等优点.

2) 对于桁架结构的形状优化,如果分开考虑两类变量分层进行优化,虽然可以降低计算的难度与计算量,但很难保证得到全局最优解.将 PSO 应用于桁架结构的优化,很容易实现同时考虑两种不同性质设计变量的问题.

3) PSO 算法可以成功地进行桁架结构的形状优化设计,收敛速度快,且具有良好的稳定性和有效性.

参考文献:

- [1] PEDERSEN P. Optimal joint positions for space trusses [J]. Journal of the Structural Division, ASCE, 1973, 99(12): 2459-2477.
- [2] 隋允康,由衷.具有两类变量的空间桁架分层优化方法[J].计算结构力学及其应用,1990,7(4): 82-92.
- [3] Lluís Gil, Antoni Andreu. Shape and cross-section optimization of a truss structure [J]. Computers & Structures. 2001, 79: 681-689.
- [4] 高峰,王德俊,胡俏,等.离散结构的遗传形状优化设计[J].计算力学学报,1998,15(4): 485-489.
- [5] WANG D, ZHANG W H, JIANG J S. Truss shape optimization with multiple displacement constraints [J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2002, 191: 3597-3612.
- [6] KENNEDY J, EBERHART R C. Particle swarm optimization [C]//Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1995: 1942-1948.
- [7] SURESH S, SUJIT P B, RAO A K. Particle swarm optimization approach for multi-objective composite box-beam design [J]. Composite Structures, 2007, 81: 598-605.
- [8] TANG H S, ZHANG W, XUE S T, et al. Parameter estimation using a CLPSO strategy [C]//IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI 2008), Hong Kong: June 1-6, 2008.
- [9] TANG H S, Mikio Fukuda, XUE S T. Particle swarm optimization for structural system identification [C]//The 6th International Workshop on Structural Health Monitoring, Stanford University, Stanford, September 11-13, 2007.
- [10] CLERC M, EBERHART R. Particle swarm explosion stability, and Convergence in multidimensional complex space [J]. IEEE Transactions On evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58-88.
- [11] 王栋,张卫红,姜节胜.桁架结构形状与尺寸组合优化[J].应用力学学报,2002,19(3): 72-76.

(编辑 姚向红)