

文章编号: 1007-791X (2013) 03-0265-05

## 桁架结构多目标优化的微分演化算法

胡长远<sup>1</sup>, 唐和生<sup>1,2,\*</sup>, 薛松涛<sup>1,3</sup>, 苏瑜<sup>1</sup>

(1. 同济大学 结构工程与防灾研究所, 上海 200092; 2. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092;  
3. 东北理工大学 建筑学科, 日本 仙台 982-8577)

**摘要:** 为了解决带有约束的桁架结构的多目标优化问题, 本文采用了一种基于微分演化的多目标优化 (DEMO) 方法。DEMO 方法采用多目标优化进化算法中 Pareto 和拥挤距离排序机制, 并保留了 DE 算法的优点。为了验证 DEMO 算法的可行性和有效性, 对经典桁架进行尺寸优化, 并与其他优化方法进行了比较, 数值结果表明 DEMO 算法性能比其他算法要好, 其所得的解具有更好的多样性、均匀性和收敛性。

**关键词:** 微分演化; 多目标优化; 非支配排序; 桁架结构

中图分类号: TU323.4; TU311 文献标识码: A DOI: 10.3969/j.issn.1007-791X.2013.03.015

### 0 引言

通常, 许多甚至大多数实际工程都包含多个目标, 例如在设计过程中, 既要考虑使其具有较好的性能, 又要考虑使其造价最低, 同时还要考虑结构的可制造性、可靠性和可维修性等, 这些设计指标可能相互抵触。解决这些问题是困难的但却是不可避免的。多个目标之间的相互冲突使多目标优化问题不存在唯一的全局最优解, 所以求解桁架多目标问题时相对比较复杂。传统的多目标优化方法是将多目标问题通过加权求和转化为单目标问题来处理, 这些方法往往需要多次重复计算, 且难以得到全局最优解, 对带有离散设计变量的优化问题则更难用传统算法进行有效求解。

相对于传统方法求解多目标优化问题的不足, 进化算法则可以有效地求解多目标优化问题, 近些年发展起来的多目标的优化方法, 绝大部分都是基于 Pareto 概念的进化多目标优化算法 (Evolution Multi-objective Optimization, EMO) [1-5]。自 1993 年起相继提出了两代多目标进化算法, 其中 NSGA-II (Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm II) 是最经典的多目标优化算法, 但它仍需在收敛性、全局搜索能力和运行效率等方面进行改

进<sup>[6]</sup>。2002 年, Luh 和 Chueh 提出了利用细胞因子处理约束问题的免疫多目标优化算法 (Constrained Multi-objective Immune Algorithm, CMOIA) [7]。

与此同时, 基于 Pareto 竞争与排序、改变操作算子等思想的多目标微分演化算法也相继出现, 2002 年, Madavan 提出了 PDEA 算法 (Pareto Differential Evolution Approach), 但没有将实验结果同其他方法进行比较, 并发现有些问题难以收敛到真正的 Pareto 前沿<sup>[8]</sup>。2009 年 Adeyemo 提出了最新的多目标差分演化算法 MDEA (Multi-objective Differential Evolution Algorithm), 但其未包含保证解集多样性的机制, 致使 Pareto 解集会产生“聚拢”现象<sup>[9]</sup>。DEMO 作为一种新颖的微分演化多目标算法, 自 2005 年被 Robič 和 Filipič 引入以来, 在解决复杂多目标优化问题上得到了很多关注<sup>[10]</sup>。DEMO 结合 DE 算法 (Differential Evolution) 的优点, 把非支配排序和拥挤距离引入到算法中, 使算法可较快地得到 Pareto 最优解。实验结果表明, DEMO 能够高效地收敛到真实的 Pareto 最优前沿, 并且解集合能够沿 Pareto 最优前沿均匀分布。

在结构工程中, 微分演化算法在桁架多目标优化方面的研究与应用还很少。本文所提的 DEMO

收稿日期: 2012-10-25 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51178337, 50708076); 科技部国家重点实验室基础研究资助项目 (SLDRCE11-B-01)

作者简介: 胡长远 (1982-), 男, 河南南阳人, 博士研究生, 主要研究方向为结构不确定性分析及结构优化; \*通信作者: 唐和生 (1973-), 男, 安徽安庆人, 博士, 副教授, 博士生导师, 主要研究方向为结构不确定性分析及优化设计, Email: thstj@tongji.edu.cn。

算法不仅能够克服传统多目标算法的缺点,而且能获得比其他进化算法更好的解。为了验证 DEMO 的有效性,本文以桁架的杆件截面面积为离散设计变量,以结构总重量和关键结点位移最小为目标,在满足一定应力条件下,对桁架结构进行尺寸多目标优化设计,并与其他方法作比较。

## 1 微分演化多目标优化算法

### 1.1 快速非支配排序

非支配排序是依据 Pareto 优劣关系对当前种群的个体进行分级。“快速”是针对 NSGA-II 中将该排序的计算复杂度由 $O(MN^2)$ 降到 $O(MN)$ 而言。DEMO 排序过程如下:当代种群中所有非支配个体的等级设为 1,然后将它们从种群中暂时移去;再在余下的种群中将所有非支配个体的等级设为 2,也暂时移去;如此循环直至所有个体都被赋值。

### 1.2 多样性保持

DEMO 中通过计算种群个体在目标空间中相对于同级个体的拥挤距离来保持种群在进化中的多样性。计算拥挤距离时,需按每个目标函数值大小对种群中的所有个体按升序排序。假设 MOP 问题如下:

$$\begin{cases} \max f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\} \\ \text{s. t. } g(x) \leq 0, h(x) = 0 \\ x \in \Omega \end{cases}, \quad (1)$$

其中,  $f$  为含有  $n$  个目标的参数化的最大化或最小化函数,函数  $g$  和  $h$  分别为不等式和等式约束。此处的  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$  是决策向量,  $l$  和  $n$  分别为设计变量和目标函数的个数,  $\Omega$  是可行域,  $n \geq 2$ 。将种群中可行个体的第  $i$  个等级中个体的目标函数正规化,即

$$f_{ki}' = \frac{f_{ki} - f_{ki, \min}}{\max(f_{ki} - f_{ki, \min})}, \quad (2)$$

其中,  $i$  表示第  $i$  个目标函数;  $k$  表示该等级种群中的第  $k$  个个体;  $f_{ki, \min}$  为该等级种群所有个体第  $i$  个目标函数值的最小值;  $f_{ki}'$  为该等级种群中第  $k$  个个体的第  $i$  个目标函数的正规化值。中间个体的拥挤距离  $Crd_k$  计算如下:

$$Crd_k = \sum_{i=1}^n \frac{f_{(k+1)i}' - f_{(k-1)i}'}{f_{ki, \max}' - f_{ki, \min}'}, \quad (3)$$

其中,  $k$  为个体的序号,中间个体的编号从 2 到  $p-1$ ;  $Crd_k$  为第  $k$  个个体的拥挤距离。对于边界个体,即编号为 1 和  $p$  的个体的拥挤距离设为无穷大。

保持种群多样性、避免其进化早熟是保证算法收敛到全局 Pareto 最优前沿的有效手段。

### 1.3 变异与交叉

变异的目的是为了保证种群的多样性,同时用合适的参数变化来指导已有的目标向量在合适的时间内达到一个更好的效果,从而保证了搜索的鲁棒性,本文选用 DE/rand/1 的变异方式<sup>[11]</sup>。与其他算法相似,DEMO 算法对经过变异后的个体进行交叉操作。

### 1.4 选择操作

选择操作使用以下的原则:1) 当子代解支配父代时,则子代被选择进入当前种群;2) 当父代解支配子代时,则子代舍弃,父代被选择;3) 当父、子二代互不支配时,则均被选择进入当前种群。这种将每代优势解进行选择的做法保证了精英解信息的保存。

### 1.5 种群裁减

对种群进行非支配分级与计算拥挤距离之后,选择质量最优的  $NP$  个个体进入下一代种群。在种群进化初期,非支配分级数比较多,裁减依照排序等级,裁去的个体多是排序等级较差的个体,有助于种群整体向着 Pareto 最优前沿逼近;在进化后期,随着越来越多的个体的非支配等级为 1,拥挤距离逐渐在裁减过程中起主导作用,使整个种群在 Pareto 最优前沿上趋于均匀分布。

### 1.6 基于 DEMO 算法的桁架结构多目标优化程序

采用 MATLAB 进行编程计算。基于 DEMO 算法的桁架结构多目标优化的流程如下:

Step1: 初始化程序参数,并在设计空间内随机初始化种群,  $it=0$ ;

Step2: 计算每个个体的各个目标函数值;

Step3: 变异、交叉操作,产生子代个体,并对种群个体进行边界约束检查;  $Add\_NP = 0$ ;

Step4: 选择操作,更新当前种群个体;

Step5: 对种群个体进行非支配分级,并计算每个个体的拥挤距离;

Step6: if  $Add\_NP > 0$ , 对种群进行裁减,得到个体数为  $NP$  的下一代种群;

Step7: 二维显示目标空间点集的优化收敛情况, 便于掌握迭代次数的选取;

Step8: 对新一代种群个体进行随机排列;

Step9: 判断是否停止: 是, 则停止; 否, 则转到 Step2。

## 2 桁架结构多目标优化

考虑一个桁架结构多目标优化设计, 目的是设计出满足所有约束条件的同时实现有最小的重量以及最小的变形。以  $n$  杆桁架结构系统为研究对象, 基本参数已知, 优化目标是在给定的荷载条件下找出  $n$  杆桁架的最优截面面积使结构质量最轻同时使节点变形达到最小。因此, 其数学模型可表示为

$$\text{求 } \mathbf{A} = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T,$$

$$\min f_1 = W = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i + \lambda M, \quad (4)$$

$$\min f_2 = u_{jl}, \quad (5)$$

$$\text{s. t. } g^i(\mathbf{A}) = [\sigma_i] - \sigma_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

$$\mathbf{A} \in \{a_1, a_2, \dots, a_q\}, \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{A} = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T$  为设计变量,  $n$  为变量连接后杆件的组数,  $W$  为结构的重量,  $L_i$ 、 $A_i$ 、 $\rho_i$  分别为第组杆件的长度、截面面积及密度;  $g^i(\mathbf{A})$  为应力约束,  $[\sigma_i]$ 、 $\sigma_i$  分别为第  $i$  组杆件的应力允许值和各种工况下的最不利应力值;  $u_{jl}$  为各工况下节点  $j$  在给定方向  $l$  上的位移值;  $\{a_1, a_2, \dots, a_q\}$  为可选的截面面积集合;  $f_1$ 、 $f_2$  为子目标函数;  $M$  为预先定义的一个足够大的正数;  $\lambda$  为罚函数因子, 当结构设计变量满足约束条件时  $\lambda=0$ , 否则  $\lambda=1$ 。

## 3 数值分析

为验证 DEMO 算法对桁架结构进行多目标优化设计的有效性, 以下对一典型的桁架结构进行分析, 同时与其他方法进行比较。DEMO 算法的参数选择如下: 种群大小  $NP=100$ ; 变异因子  $F=0.8$ ; 杂交概率  $CR=0.9$ ; 最大迭代次数  $G_{\max}$  取 500。

图 1 所示为 25 杆空间桁架, 材料的弹性模量  $E=68\ 950\ \text{MPa}$ , 密度  $\rho=2\ 768\ \text{kg/m}^3$ , 应力约束为  $\pm 275.8\ \text{MPa}$ ,  $l=635\ \text{mm}$ 。设计变量为离散变量,  $D$  为设计变量的取值范围,  $D=645.16 \times \{0.1, 0.2,$

$0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 3.0, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4\}$   $\text{mm}^2$ 。节点荷载见表 1, 杆件分组见表 2。本例以杆件截面面积为设计变量, 同时最小化结构的重量和所有节点最大位移这两个目标。

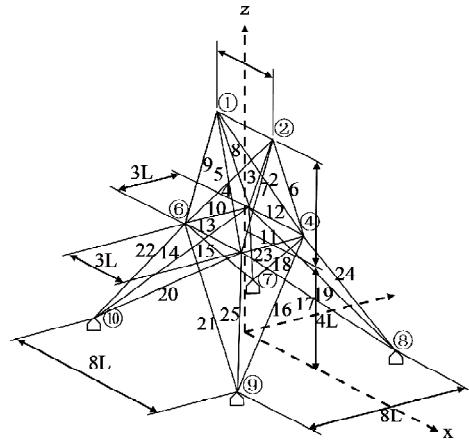


图 1 25 杆空间桁架

Fig. 1 25 bar space truss

表 1 25 杆桁架节点荷载

Tab. 1 Loading conditions of the 25-bar space truss

节点号	$F_x/\text{kN}$	$F_y/\text{kN}$	$F_z/\text{kN}$
1	4.445	44.452	-44.452
2	0	44.452	-44.452
3	2.223	0	0
6	2.667	0	0

表 2 25 杆件分组表

Tab. 2 Group members of the 25-bar space truss

组号	杆件号	组号	杆件号
$X_1$	1	$X_5$	12, 13
$X_2$	2, 3, 4, 5	$X_6$	14, 15, 16, 17
$X_3$	6, 7, 8, 9	$X_7$	18, 19, 20, 21
$X_4$	10, 11	$X_8$	22, 23, 24, 25

为了验证 DEMO 方法的优越性, 同时也与 NSGA-II 方法进行比较分析, NSGA-II 的种群数也取 100。图 2 给出了两种方法的 Pareto 最优前沿比较, 结果显示经过相同的代数迭代后 DEMO 的 Pareto 前沿比 NSGA-II 算法的 Pareto 前沿要明显趋于最优, 而且前者的非支配解的分布也更加均匀有致。两种方法的收敛曲线如图 3 所示, 从图 3 可以看出 DEMO 收敛速度明显要比 NSGA-II 快。不同迭代次数下的极端点坐标比较结果列于表 3, 从表 3 可看出, 与 NSGA-II 和 CMOIA 相比, DEMO 的竖向和水平向极端点都扩展得更远。500 代

DEMO Pareto 最优前沿与文献 [12-15] 的比较见图 4, 特殊点A点处杆件的截面积与文献 [12-13,15] 结果的对照见表 4。特殊点A为 Pareto 前沿上的一个特殊解, 即在 Pareto 前沿众多非支配解中寻找一个竖向坐标十分接近但未超过 8.89 mm 的点。

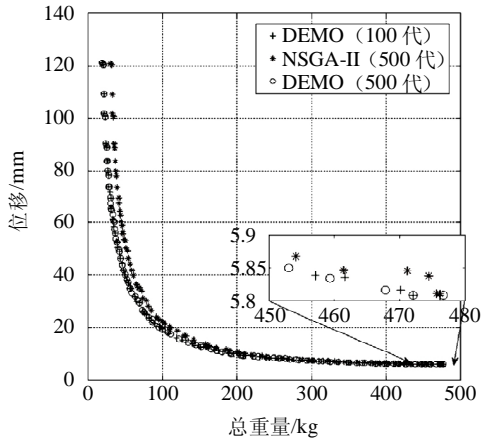


图 2 25 杆桁架 DEMO 和 NSGA-II 的 Pareto 最优前沿比较

Fig. 2 The comparison of Pareto optimal front between DEMO and NSGA-II for 25 bar truss

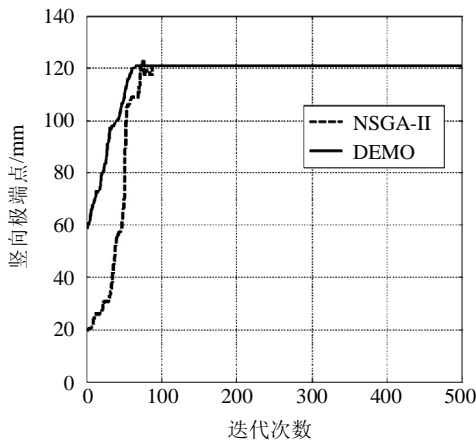


图 3 25 杆桁架极大位移点位移的收敛曲线

Fig. 3 The displacement convergence curves of vast displacement point for 25 bar truss

图 1 所示桁架中, 在应力约束为 $[-275.8, 275.8]$  MPa, 1、2 节点的最大竖向位移不能超过 8.889 mm 的情况下, 文献 [12-15] 的单目标最优解结果如图 4、表 4 所示。本文在应力约束相同, 而把位移作为另一目标函数的情况下, 文献 [12-15] 的解处在 DEMO 的 Pareto 最优前沿上, 且与特殊点A (总重量为 219.93 kg, 位移为 8.865 mm) 相近似, 由此可以证明单目标最优解是 DEMO 非支配解的一个子集。与单目标优化不同的是, DEMO 多目标 Pa-

reto 最优前沿包含有更多的解, 能为结构设计提供更多的方案, 相应的求解过程也更为复杂。

表 3 不同迭代次数下的极端点坐标比较

Tab. 3 The comparison of extreme point coordinates under different iterations

迭代方法 (次数)	位置	重量/kg	位移/mm
NSGA-II (50 代)	极大重量点	466.252	5.911
	极大位移点	49.879	86.056
DEMO (50 代)	极大重量点	467.21	5.898
	极大位移点	21.422	112.662
NSGA-II (100 代)	极大重量点	470.577	5.827
	极大位移点	30.255	120.953
DEMO (100 代)	极大重量点	476.146	5.809
	极大位移点	19.365	120.953
NSGA-II (300 代)	极大重量点	476.147	5.812
	极大位移点	30.255	120.953
CMOIA (300 代)	极大重量点	443.334	6.002
	极大位移点	45.300	51.514
DEMO (300 代)	极大重量点	476.756	5.809
	极大位移点	19.365	120.953

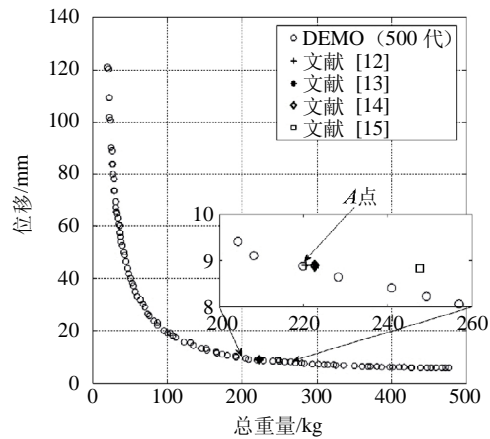


图 4 500 代 Pareto 最优前沿与单目标优化结果的比较

Fig. 4 Pareto solutions after 500 iterations and comparison with single-objective optimization methods

表 4 不同方法的截面变量值比较表

Tab. 4 Comparison of design variable values among different methods  $\text{mm}^2$

单元编号	DEMO (500 代)	文献 [12]	文献 [13]	文献 [15]
$X_1$	64.516	64.516	64.516	64.516
$X_2$	64.516	322.58	774.19	1 161.29
$X_3$	2 064.51	2 193.54	2 064.51	1 483.87
$X_4$	64.516	64.516	64.516	129.03
$X_5$	1 548.38	967.74	709.68	64.516
$X_6$	645.16	580.64	580.64	516.13
$X_7$	451.61	387.1	258.06	1 161.29
$X_8$	2 193.54	2 193.54	2 193.54	1 935.48
重量/kg	219.93	220.58	223.98	247.66
位移/mm	8.865	8.885	8.889	8.827

## 4 结论

1) 基于快速非支配排序、多样性保持和种群裁减的微分演化多目标优化算法, 算法简单, 收敛迅速, 易于实现, 且更好地保证了在演化过程中, 保持种群的多样性, 使得解集能够迅速、准确地定出 Pareto 最优前沿, 并使解集在该前沿均匀分布, 从而很好地达到了多目标优化的要求。

2) 本文应用多目标微分演化算法对典型桁架结构进行数值分析, 并且与 NSGA-II, CMOIA 及相关文献的优化结果进行比较讨论, 数值结果表明, 该算法很好地保持了所得最优解的多样性、均匀性以及较强的收敛性。

### 参考文献

- [1] 郭俊, 桂卫华, 阳春华. 改进差分进化算法在铝电解多目标优化中的应用[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2012, 43(1): 184-188.
- [2] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: improving the strength Pareto evolutionary algorithm [M] //Giannakoglou K, Tsahalis D T, Périaux J, et al.. Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems. Berlin: Springer-Verlag, 2002: 95-100.
- [3] Abido MA. Two level of nondominated solutions approach to multiobjective particle swarm optimization [C] //Thierens D, Beyer H G, Bongard J, et al.. Proc of the Genetic and Evolutionary Computation Conf. New York: ACM Press, 2007: 726-733.
- [4] Gong M, Jiao L, Du H, et al.. Multi-objective immune algorithm with non-dominated neighbor-based selection [J]. Evolutionary Computation, 2008, 16 (2): 225-255.
- [5] 尚荣华, 焦李成, 马文萍. 免疫多目标优化算法求解约束优化问题 [J]. 软件学报, 2008, 19 (11): 2943-2956.
- [6] Deb K, Agarwal S, Pratap A, et al.. A fast elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6 (2): 182-197.
- [7] Luh G C, Chueh C H. Multi-objective optimal design of truss structure with immune algorithm [J]. Computers and Structures, 2004, 82 (11/12): 829-844.
- [8] Madavan N K. Multi-objective optimization using a Pareto differential evolution approach [C] //Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation, 2002: 1145-1150.
- [9] Adeyemo J A, Otieno F A. Multi-objective differential evolution algorithm for solving engineering problems [J]. Journal of Applied Sciences, 2009, 9 (20): 3652-3661.
- [10] Robič T, Filipič B. DEMO: differential evolution for multiobjective optimization [J]. Proceedings of the 3rd International Conference on Evolutionary MultiCriterion Optimization, 2005, 520-533.
- [11] Storn R, Price, K. Differential evolution—a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces [R]. Berkeley: University of California, 2006.
- [12] Wu S J, Chow P T. Steady-state genetic algorithms for discrete optimization of trusses [J]. Computers and Structures, 1995, 56 (6): 979-991.
- [13] Erbaturo F, Ohasancebi O, Tütüncü I, et al.. Optimal design of planar and space structures with genetic algorithms [J]. Computers and Structures, 2000, 75 (2): 209-224.
- [14] Ponterosso P, Fox D S J. Heuristically seeded genetic algorithms applied to truss optimization [J]. Engineering with computers, 1999, 15 (4): 345-355.
- [15] Rajeev S, Krishnamoorthy C S. Discrete optimization of structures using genetic algorithms [J]. Journal of Structural Engineering, 1992, 118 (5): 1233-1250.

## Differential evolution algorithm for truss structure multi-objective optimization

HU Chang-yuan<sup>1</sup>, TANG He-sheng<sup>1,2</sup>, XUE Song-tao<sup>1,3</sup>, SU Yu<sup>1</sup>

(1. Research Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. State Key Laboratory of Disaster Prevention in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. Department of Architecture, Tohoku Institute of Technology, Sendai 982-8577, Japan)

**Abstract:** In order to solve the multi-objective optimization of truss structures with constraints, a new approach to multi-objective optimization based on differential evolution (DEMO) was adopted in this paper. DEMO adopted the mechanisms of Pareto based ranking and crowding distance sorting which used by evolutionary algorithms for multi-objective optimization, and preserved the advantages of differential evolution (DE). Classical truss sizing optimization problems are solved to demonstrate the feasibility and effectiveness of the DEMO algorithm, and the results are compared with other optimization methods. The results indicate that the DEMO provides better performance in the diversity, the uniformity and the convergence of the obtained solution than other methods.

**Key words:** differential evolution; multi-objective optimization; non-dominated sorting; truss structure