

结构固有频率不确定分析的证据理论方法

李大伟¹, 唐和生^{1,2}, 姚雯¹, 薛松涛¹

(1.同济大学结构工程与防灾研究所, 上海 200092; 2.同济大学土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

摘要: 结构参数的不确定性导致结构固有频率的不确定性。针对结构动力特性分析中存在的认知不确定, 提出一种基于证据理论的不确定量化及灵敏度分析方法。利用证据理论刻画结构参数(如材料属性、几何特征、荷载分布)的不确定性。将基于优化算法的区间分析策略应用于不确定结构的模态分析, 研究了结构参数中认知不确定对结构固有频率的影响。提出基于焦元区间变化比的敏感性分析框架判别不确定结构参数对结构固有频率的重要程度。最后, 通过一个平面桁架的动力特性分析, 验证了所提方法的适用性和有效性。

关键词: 结构动力特性; 认知不确定; 证据理论; 微分演化算法; 敏感性分析

中图分类号: TB123; TU318 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-4523(2017)06-0904-09

DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2017.06.003

引言

结构的频率特征和振型信息是结构动力分析的基础, 也是结构抗震设计和稳定性设计的重要内容。在结构设计初期, 设计者通过模态分析得到结构的自振周期并与设计特征周期相比较, 进而对结构初步设计的合理性做出评价; 也可通过计算结构的动力响应, 对结构进行抗震设计。在实际工程中, 结构的组成体系、材料参数、荷载条件、几何参数和支撑边界条件等不确定因素, 对结构动力特性分析有重要影响。

从20世纪60年代开始, 研究者便开始关注结构参数不确定对结构固有频率的影响并取得了丰富成果。以概率模型为依托, 多数研究将结构参数视为随机变量^[1](客观不确定), 求解结构固有频率的统计特性。如Collins^[2]和Shinozuka^[3]分别应用一阶摄动法与蒙特卡洛抽样对随机结构特征值问题进行统计描述。吴祥法等^[4]将结构参数的随机性视作结构在均值处的变分, 进而讨论了随机结构固有频率的统计性质。陈建军等^[5]利用瑞利商推导了结构固有频率变量数字特征的分析方法。宋述芳等^[6]利用结构固有频率统计矩的灵敏度分析研究了结构参数不确定对结构动力特性的影响。文献[7-8]引入

代理模型分析了大型结构固有频率的统计矩。

然而在工程设计和分析阶段, 人们收集的不确定信息通常是碎片的、不完整的。基于传统概率理论的分析框架并不能完全适用于这种仅能得到部分统计信息, 或者由于条件限制只能由专家给出经验描述的不确定。相关研究^[9]亦表明概率模型参数的小偏差可能引起结构可靠性分析结果出现较大误差。针对该问题, 研究学者提出将区间分析应用于分析结构参数不确定对结构动力特性的影响^[10-14]。通过引入区间算法能够较好地解决统计信息稀少的情况下结构动力特性不确定量化的问题; 但需要指出区间分析仅能得到系统响应的上下边界值, 即区间分析对于非边界响应的统计信息是浪费的。因而得出的不确定分析结果过于笼统, 不能够有效地指导工程实践。人们需要一种能够充分利用统计信息, 又避免因信息过少而造成量化失真的不确定量化方法。

证据理论^[15-16]作为对经典概率理论的推广, 能够有效地处理随机、模糊以及区间表达的不确定, 因而也被视作为更一般性的不确定建模理论^[17]。证据理论在建立之初, 就设定了对多源信息处理的融合规则^[15], 这是其余不确定量化理论所不具备的。与传统的概率理论相比, 证据理论可通过基本信任分配(BBA)表达任意形式的不确定信息而不需要附

收稿日期: 2016-11-25; 修订日期: 2017-06-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51578140, 51178337); 科技部国家重点实验室基础研究项目资助(SLDRCE14-B-03); 上海自然科学基金资助项目(17ZR1431900)

万方数据

加限制条件。

作为一种很有潜力的不确定量化方法,证据理论近年来发展迅速,在信息融合、不确定传播分析^[18]、可靠性优化设计^[19]等领域崭露头角。尽管对证据理论学术研究已取得一些进展,但其工程应用尚处于初步阶段。不确定传播过程中所需的计算成本是制约证据理论发展的主要原因。不同于概率理论的概率密度函数,证据理论采用一系列离散的区间对不确定信息进行表示。在多维不确定变量的传播过程中,由于离散区间组合而引起组合爆炸使不确定量化成本显著增加,因此讨论如何降低证据理论不确定分析的计算需求也是本文所需解决的重点问题。

作为精简变量,约减模型复杂度的有效手段,灵敏度分析一直是不确定量化研究领域的热点问题。传统的敏感性分析方法,如基于偏导数的灵敏度分析^[6]和基于方差的重要性测度^[20]都是在概率理论的基础上发展而来的。对于认知不确定的敏感性分析研究较少,近来在这方面一些学者也做了有益的尝试^[21-23]。综合前人研究可以看出,如文献[22]中所述的敏感性分析方法其计算需求较大,而文献[21]与[23]所述的方法会因为物理量纲的差异而导致敏感性结果失真。针对上述问题,本文将提出一种有效的敏感性分析方法。

本文提出利用证据理论量化由结构参数不确定对结构动力特性的影响。首先引入证据理论的基本概念,通过结构固有频率不确定量化过程对基于证据理论的不确定分析框架进行说明,引入微分演化算法的区间优化策略减轻证据理论的不确定传播代价。并提出基于输入、输出认知不确定变化比的证据理论敏感性分析方法。最后用一个平面桁架结构动力特性分析验证本文所提方法的适用性及有效性。

1 证据理论基本概念

证据理论是由 Dempster^[15] 提出,经 Shafer^[16] 推广最终形成一种专门研究数据稀少情况下不确定分析的理论,故而证据理论又称为 D-S 理论。证据理论包含如下基本概念:

(1) 辨识框架(Θ)用于定义事件发生所有可能的情况, $\Theta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 中所有 2^n 个子集构成幂集 $2^\Theta = \{\emptyset, x_1, x_2, \{x_1, x_2\}, \dots, x_n\}$ 。

(2) 基本信任分配(BBA)是证据理论的核心概万方数据

念,对于 2^Θ 中任意子集 A 总有对应的映射关系 $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1], m(A)$ 需满足

$$\begin{cases} m(A) \geq 0 \\ m(\emptyset) = 0 \\ \sum m(A) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中,若 $m(A) > 0$,则将 A 称为一个焦元区间。对于一个包含若干元素的子集 $A, m(A)$ 只能定义对子集 A 的信任程度,而不能将其细化到 A 中单个元素,这是与概率理论相区别的。

(3) 证据理论引入合成法则处理多源不确定信息,如依靠多专家意见形成各自不同的证据分配,利用合成法则得到综合信任分配。一个由两个独立证据来源表达的不确定变量,利用 Dempster 合成法则^[10]可表述为

$$m(B) = \frac{\sum_{A \cap C = B} m_1(A) m_2(C)}{1 - \sum_{A \cap C = \emptyset} m_1(A) m_2(C)}, B \neq \emptyset \quad (2)$$

其中, $\sum_{A \cap C = \emptyset} m_1(A) m_2(C)$ 表示不同不确定源的冲突程度。

(4) 信任函数 $Bel()$ 定义为

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad \forall B \subseteq 2^\Theta \quad (3)$$

信任函数 $Bel(A)$ 表示命题 A 为真的信任程度。需要说明 $Bel(A)$ 反映了支持命题 A 所有子集的基本信任分配之和,而 $m(A)$ 仅表示命题 A 本身的基本信任分配。

(5) 似然函数 $Pl()$ 定义为

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad \forall B \subseteq 2^\Theta \quad (4)$$

似然函数 $Pl(A)$ 表示命题 A 为非假的信任程度,若 $A \cap B \neq \emptyset$,则称 A 与 B 相容。对应地, $Pl(A)$ 为所有与 A 相容集合的基本信任分配之和。通过上述定义可以得到 $Bel(A) \leq Pl(A)$,且有如下关系成立:

$$Bel(A) + Pl(\bar{A}) = 1 \quad (5)$$

$$Bel(\bar{A}) + Pl(A) = 1 \quad (6)$$

联系经典概率理论,令 $P(A)$ 代表 A 的概率值,则有

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1 \quad (7)$$

综合式(5)~(7),易得

$$Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A) \quad (8)$$

其中, \bar{A} 代表 A 的补集,对比式(8)中对集合 A 信任程度的 3 种表达方式可以看出:概率值 $P(A)$ 包含于 $[Bel(A), Pl(A)]$ 中,对应的 $Bel(A)$ 和 $Pl(A)$ 的间距表示为认知不确定。显然,对于在包含认知不确定的不确定量化中证据理论利用上下边界的表达形式要比概率理论的表达形式更合理。

2 结构固有频率不确定量化

不失一般性,对于有 L 个输入变量的不确定系统,其数学抽象如下式所示

$$y = f(x^v, d) \quad (9)$$

其中, $x^v = [x^1, x^2, \dots, x^l, \dots, x^L]^T$ 表征结构系统的不确定输入, L 为系统输入不确定变量的总数; d 为结构的确定性输入; $f(\cdot)$ 表征不确定传播的系统函数; y 为系统的不确定响应。在证据理论不确定量化框架中,不确定变量 x^l 可表示为

$$([x_j^l, \bar{x}_j^l], m_j^l) \quad j \in \forall [1, J] \quad (10)$$

式中 J 为不确定变量 x^l 的焦元总数, x_j^l 和 \bar{x}_j^l 为 x^l 第 j 个焦元区间的上下边界, m_j^l 为焦元区间 x_j^l 对应的 BBA 值。在结构动力特性不确定分析中, x^v 通常由材料弹性模量 E , 构件广义几何尺寸 D , 材料密度 ρ 与结构质点集中质量 M_0 构成。系统不确定输入联合焦元区间和对应的 BBA 值如下式所示

$$\begin{cases} x_n^v = x_p^E \otimes x_q^D \otimes x_r^\rho \otimes x_s^{M_0} \\ m_n^v = m_p^E \times m_q^D \times m_r^\rho \times m_s^{M_0} \end{cases} \quad (11)$$

其中, $p \in \forall [1, P], q \in \forall [1, Q], r \in \forall [1, R], s \in \forall [1, S]; P, Q, R, S$ 分别是 x^E, x^D, x^ρ 与 x^{M_0} 的焦元数目; $n \in \forall [1, N], N = P \times Q \times R \times S$ 为组合焦元总数。在有限元分析中,单元刚度矩阵 $K_{i,n}^e$ 和质量矩阵 $M_{i,n}$ 如下式所示

$$\begin{cases} K_{i,n}^e = K(x_p^E, x_q^D, d) \\ M_{i,n} = M(x_r^\rho, d) \end{cases} \quad (12)$$

结构的整体刚度矩阵 K_n 和质量矩阵 M_n 定义如下式所示

$$\begin{cases} K_n = \sum_{i=1}^I K_{i,n}^e \\ M_n = \sum_{i=1}^I M_{i,n} + \sum_{t=1}^T M_{0,t} \end{cases} \quad (13)$$

式中 $M_{0,t}$ 为节点集中质量。

综上所述,在不确定输入变量联合焦元区间 x_n^v 内结构第 k 阶特征值 $\lambda_{k,n}$ 的区间极值求解过程如下式所示

$$\begin{cases} [\min(\lambda_{k,n}), \max(\lambda_{k,n})] \\ \text{subject to } \begin{cases} |K_n - \lambda_{k,n} M_n| = 0 \\ x_p^E \in [x_p^E, \bar{x}_p^E] & p \in \forall [1, P] \\ x_q^D \in [x_q^D, \bar{x}_q^D] & q \in \forall [1, Q] \\ x_r^\rho \in [x_r^\rho, \bar{x}_r^\rho] & r \in \forall [1, R] \\ x_s^{M_0} \in [x_s^{M_0}, \bar{x}_s^{M_0}] & s \in \forall [1, S] \end{cases} \end{cases} \quad (14)$$

对于式(14)的求解一般有 3 种方式:基于蒙特卡洛抽样方法,基于区间代数的计算方法以及基于优化技术的方法。蒙特卡洛方法的精确性依赖于抽样数目,而利用证据理论不确定建模时极易出现区间组合爆炸,这也限制了该方法的应用范围。而相对运算量较少的区间代数适用于系统有显式解,且求解过程不涉及强非线性情况。一旦缺少其中一个条件,其计算结果会出现区间过估计的情况^[23]。鉴于此,本文采用基于微分演化算法(DE)^[24]的区间优化技术求解结构在联合焦元区间上的极值响应问题。

微分演化算法采取与传统演化算法类似的结构,即变异、交叉、选择、交叉的策略进行优化分析。与传统的演化算法不同,DE 采用贪婪准则对子代进行更新。通过采用以上先进的优化策略使得微分演化算法能够快速高效地进行优化分析,加快不确定在焦元区间内的传播速度。关于微分演化算法的详细解释参见文献[24]。根据以上描述,基于证据理论不确定量化流程如图 1 所示。

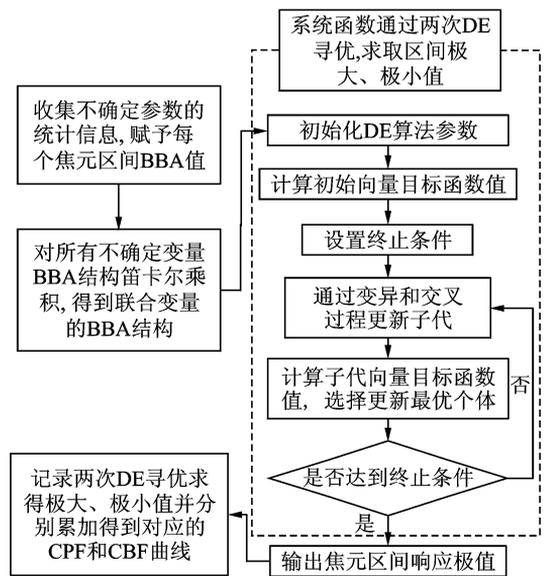


图 1 基于证据理论的不确定量化框架

Fig.1 Framework of UQ using evidence theory

3 灵敏度分析

在认知不确定分析中,不确定量化结果的累积分布曲线之间的距离作为认知不确定的度量。本文通过对比输入变量认知不确定对系统输出认知不确定的影响来衡量输入变量的重要程度。对于某一输入变量进行敏感性分析,首先保持该元素的证据理论表达不变,将其余元素固定为名义值,则系统不确定响应为

$$\begin{cases} y_j = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_j, \tilde{x}_j) \\ m(y_j) = m_j^l \end{cases} \quad (15)$$

其中,符号“~”表示变量的名义值。定义系统响应 y_j 和系统不确定输入 x^l 的焦元区间变化系数为

$$\begin{cases} \delta(y_j) = \frac{y_j - \underline{y}_j}{y_j + \underline{y}_j} \\ \delta(x_j^l) = \frac{\underline{x}_j^l - \underline{x}_j^l}{\underline{x}_j^l + \underline{x}_j^l} \end{cases} \quad (16)$$

式中 \underline{y}_j 与 \overline{y}_j 分别为对应于不确定输入 x_j^l 系统响应焦元区间的下界与上界。对应系统响应 y_j 和系统不确定输入 x^l 的敏感性系数定义为

$$SI(x_j^l) = \frac{\delta(y_j)}{\delta(x_j^l)} \times m_j^l \quad (17)$$

式中 SI 为系统不确定输入 x_j^l 相对于系统响应 y_j 的敏感性系数。系统输入 x^l 对于系统输出 y 的全局敏感性系数定义为

$$SI(x^l) = \frac{\sum_{j=1}^J SI(x_j^l)}{\sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J SI(x_j^l)} \quad (18)$$

式中 L 为不确定变量总数, J 为一个变量的焦元区间总数。通过上述推导可以看出,这种敏感性分析方法避免了文献[21, 23]中由于系统输入和输出之间的数量级差异而带来的计算误差。本文将在其后的算例中对该方法的适用性进行说明。

4 算例

如图 2 所示,27 杆平面桁架的杆件截面面积 $A_{0,i}$ 、杨氏模量 $E_{0,i}$ 、材料密度 $\rho_{0,i}$ 、节点集中质量 M_0 为不确定变量。4 个不确定变量的名义值分别为 $A_{0,i} = A_0 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $E_{0,i} = E_0 = 210 \text{ GPa}$, $\rho_{0,i} = \rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $M_{0,i} = 1000 \text{ kg}$ 。各变量的累积分布的证据理论表达如图 3 中 Case1 所示。

为对比不确定变量不同表达方式对结构特征值不确定量化的影响。对应于图 3 中所示的统计信息,不确定变量的区间表达可取各变量分布的上下边界。类似地,根据图 3 中统计信息,不确定变量的近似概率分布如表 1 所示。

表 1 不确定变量的区间和概率理论表达

Tab.1 Uncertain variables represented by interval and probability theory

不确定变量	区间理论	概率理论
E/GPa	[189, 231]	U(189, 231)
$A/(10^{-4} \text{ m}^2)$	[4.25, 5.75]	U(4.25, 5.75)
$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	[7020, 8050]	U(7020, 8050)
M_0/kg	[800, 1200]	U(800, 1200)

万方数据

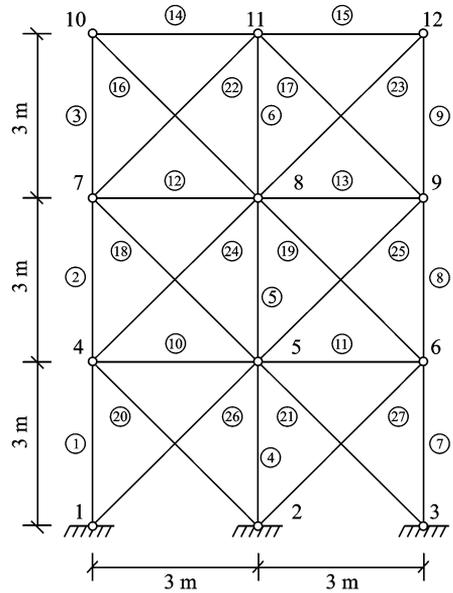


图 2 27 杆桁架示意图

Fig.2 Sketch of 27 bar truss

将图 3 所示的 4 个不确定变量的证据理论表达信息带入式(13),经微分演化区间优化算法进行不确定传播,求得该桁架系统第一阶固有频率的累积分布如图 4 中累积似然函数(CPF)曲线和累积信任函数(CBF)曲线。类似的,将各变量的区间表达的不确定信息进行传播得到如图 4 中所示第一阶固有频率的区间上下界。对应于表 1 中不确定参数的概率表达,取 10^4 次蒙特卡洛模拟得到结构第一阶固有频率的累积分布曲线如图 4 中 CDF 曲线。

对比图 4 中 3 种不确定理论的量化结果可以看出,区间分析得到结构特征值的上界和下界的包络区域要远大于证据理论和概率理论的量化结果。结合前述灵敏度分析中关于累积分布中认知不确定的表达,可以得到区间分析结果所包含的认知不确定大于证据理论和概率理论的量化结果。这说明认知不确定随着数据的收集会不断减小,当数据收集充分时证据理论的量化结果会趋于概率理论。

将上述认知不确定量化结果应用于结构设计时,区间分析得到的结果比证据理论和概率分析得到的结果保守,一定程度上会造成设计浪费。另一方面,图 4 中 CDF 曲线表征了结构不确定参数的统计信息完备情况下结构特征值的累积分布。概率理论量化结果 CDF 曲线不包含认知不确定,即概率理论量化结果是对实际不确定输入的理想化。而利用证据理论对认知不确定建模通过 CPF 和 CBF 曲线所包含的面积有效地表征了认知不确定对结构频率不确定的影响。

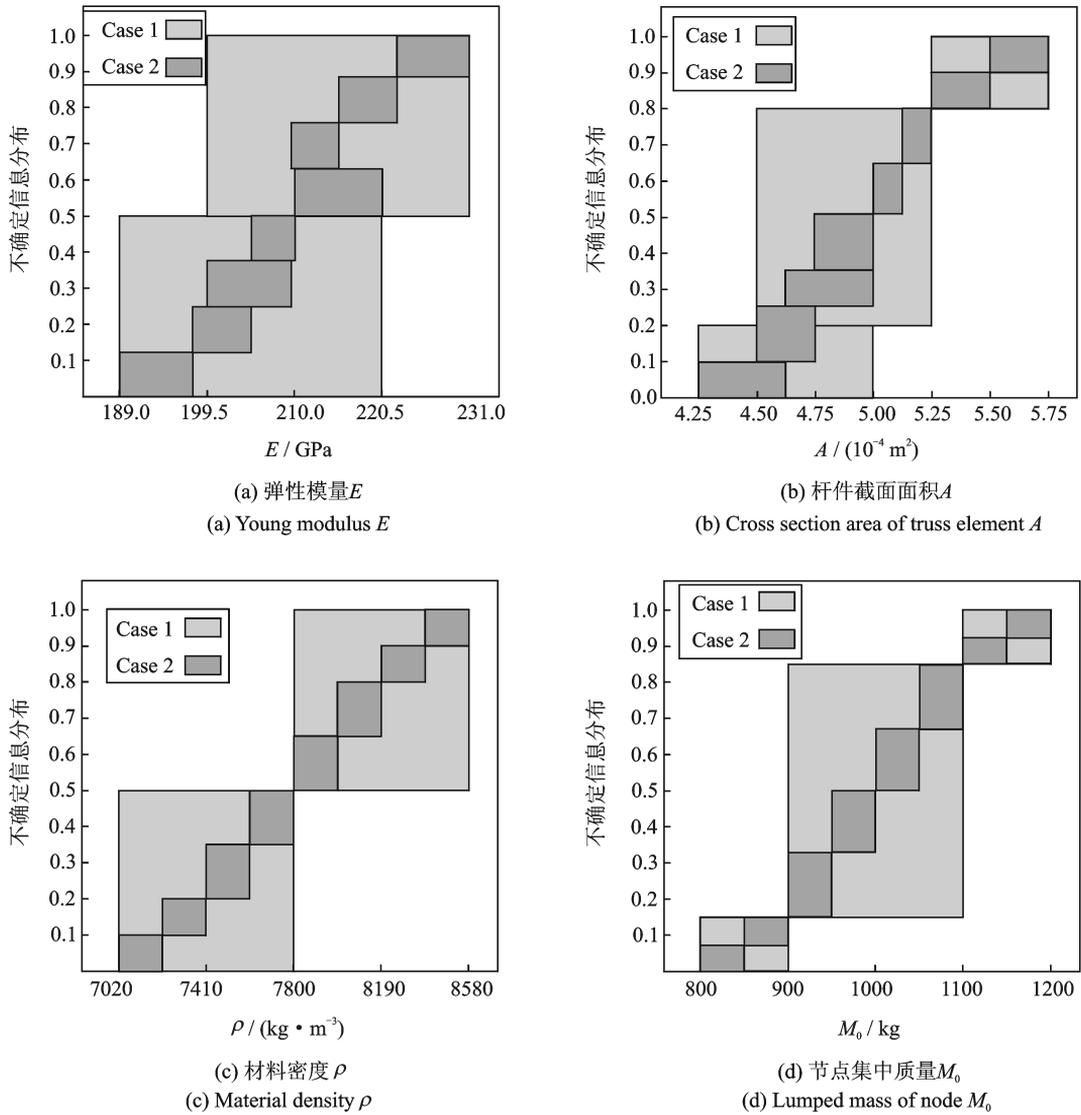


图 3 桁架不确定信息的证据理论表达

Fig.3 Evidential representation of the uncertainty of truss

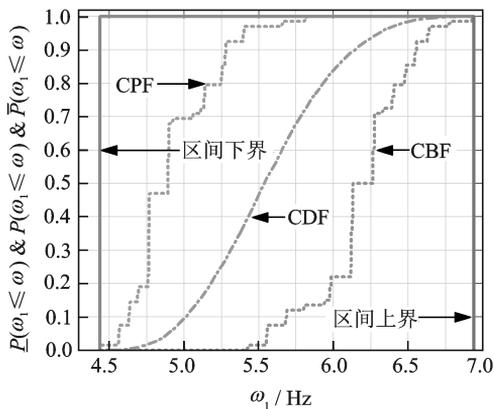


图 4 不同量化方法的 27 杆桁架第一阶固有频率分布对比
Fig.4 Comparison of distributions of first natural frequency of 27 bar truss with different quantification methods

为分析利用微分演化方法进行不确定传播分析的有效性、准确性,本文亦采用 $10^4, 10^5$ 次数蒙特卡洛抽样得到桁架一阶固有频率的证据理论量化结果如图 5 中角标为 MC1 和 MC2 的累积分布曲线。对应于上述 3 种计算策略,其计算耗时如表 2 所示。

表 2 不同方法计算耗时对比

Tab.2 Comparison of time cost of different computational methods

计算方法	计算耗时/s
DE	58.05
MC1	190.07
MC2	1847.39

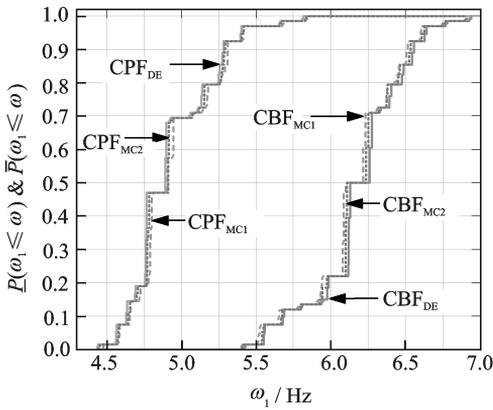


图 5 不同计算策略的 27 杆桁架第一阶固有频率分布对比

Fig.5 Comparison of distributions of first natural frequency of 27 bar truss with different computational methods

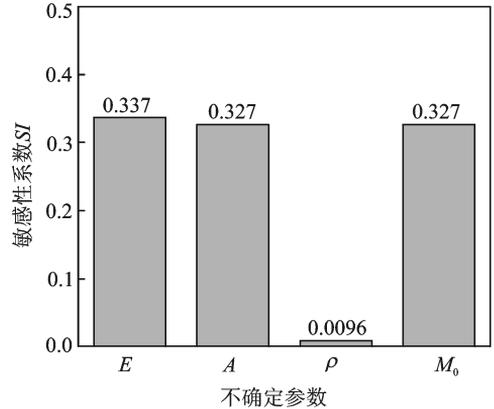


图 6 敏感性分析结果

Fig.6 The result of sensitivity analysis

对比图 5 中 3 种计算结果,可以看出, 10^5 抽样的蒙特卡洛模拟结果优于 10^4 抽样的结算结果。这也说明,蒙特卡洛方法计算精度随着采样数目的增加而提高。对比图 5 中微分演化区间优化方法得到结算结果曲线和两种蒙特卡洛抽样的结果曲线,可以看出相对于两种不同的采样精度蒙特卡洛结果,微分演化区间优化策略得的结果更健壮。

对比表 2 中 3 种计算策略的耗时,可以看出利用微分演化优化分析的耗时仅为 10^4 次蒙特卡洛抽样的 $1/3$,且远小于 10^5 次蒙特卡洛抽样耗时。综合图 5 和表 2 中结果,可以看出,利用微分演化算法进行证据理论不确定传播,在保证不确定分析结果精度的情况下大大减轻了不确定传播分析的计算负担。

为进一步探究 4 个不确定变量对于结构第一阶固有频率的影响程度,利用敏感性分析框架对 4 个不确定变量进行敏感性分析得到如图 6 所示的结果。对比图 6 中 4 个不确定变量的敏感性系数 SI ,可以看出杆件材料密度 ρ 认知不确定对于结构第一阶固有频率的影响要远远小于其他 3 个不确定变量。

结合文献[22]中敏感性分析方法,可以得出对结构固有频率敏感性较小的变量,其不确定信息完整性不会显著影响结构固有频率的分布范围。类似的,对结构固有频率敏感程度较大的变量,其不确定信息的完整程度能够显著改变结构固有频率的量化结果的分布范围。基于上述考虑,本文将通过输入变量不确定信息完整程度对结构固有频率分布范围

的影响来评价本文前述提出的敏感性分析方法的有效性。

当统计信息收集更加充分时,结构参数的证据理论表达如图 3 中 Case2 所示。保持其余变量的信任结构如图 3 中 Case1 所示,依次将 4 个变量的证据理论表达替换为 Case2 所示的信任结构,则该桁架的第一阶固有频率的累积似然分布如图 7(a)~(d)中 CPF1~CPF4 曲线所示,累积信任分布如 CBF1~CBF4 曲线所示。

对比这 4 种情况下可以看出,随着 E, A 和 M_0 的不确定信息的增加,桁架的第一阶固有频率的 CPF 与 CBF 两条累积曲线的间距显著减少;而当 ρ 的不确定信息增加时,桁架特征值的分布形式几乎没有影响,这也说明不确定参数 ρ 对桁架结构固有频率不确定的影响可以忽略不计。

将上述 4 个不确定变量的证据理论表达均替换为图 3 中 Case2 时,该桁架结构的第一阶固有频率的累积似然分布和累积信任曲线如图 7 中 CPF5 与 CBF5。对比当不确定参数的证据理论表达如 Case1 和 Case2 时结构第一阶固有频率的累积分布曲线,可以看出随着不确定信息的不断收集,认知不确定显著减小,证据理论的量化结果 CPF5 和 CBF5 曲线趋于概率理论量化结果 CDF 曲线。即随着 4 个变量不确定信息的不断完善,结构固有频率的认知不确定快速减小。这也说明利用证据理论进行不确定量化能够包容概率理论量化结果。

与上述分析类似,依次固定 4 个不确定参数的信任结构如图 3 中 Case1 所示,将其余变量更新为图 3 中 Case2 所示,结构第一阶固有频率的 CPF 曲

线如图8中(a)~(d)中 CPF6~CPF9 所示,CBF 曲线如图8中(a)~(d)中 CBF6~CBF9 所示。从图8(c)中可以看出当材料密度 ρ 的证据理论表达保持如图3中 Case1 不变时,CPF8 和 CPF5、和 CBF8 与 CBF5 重合,这说明材料密度 ρ 对结构第一阶固有

频率的认知不确定的影响不大。而图8(a),(b)和(d)的 CPF 曲线 CBF 曲线则表明 E, A 和 M_0 的对于结构第一阶固有频率认知不确定变化影响显著。综合图7和图8的分析说明本文所提基于输入输出变化比的灵敏度分析方法是有效的。

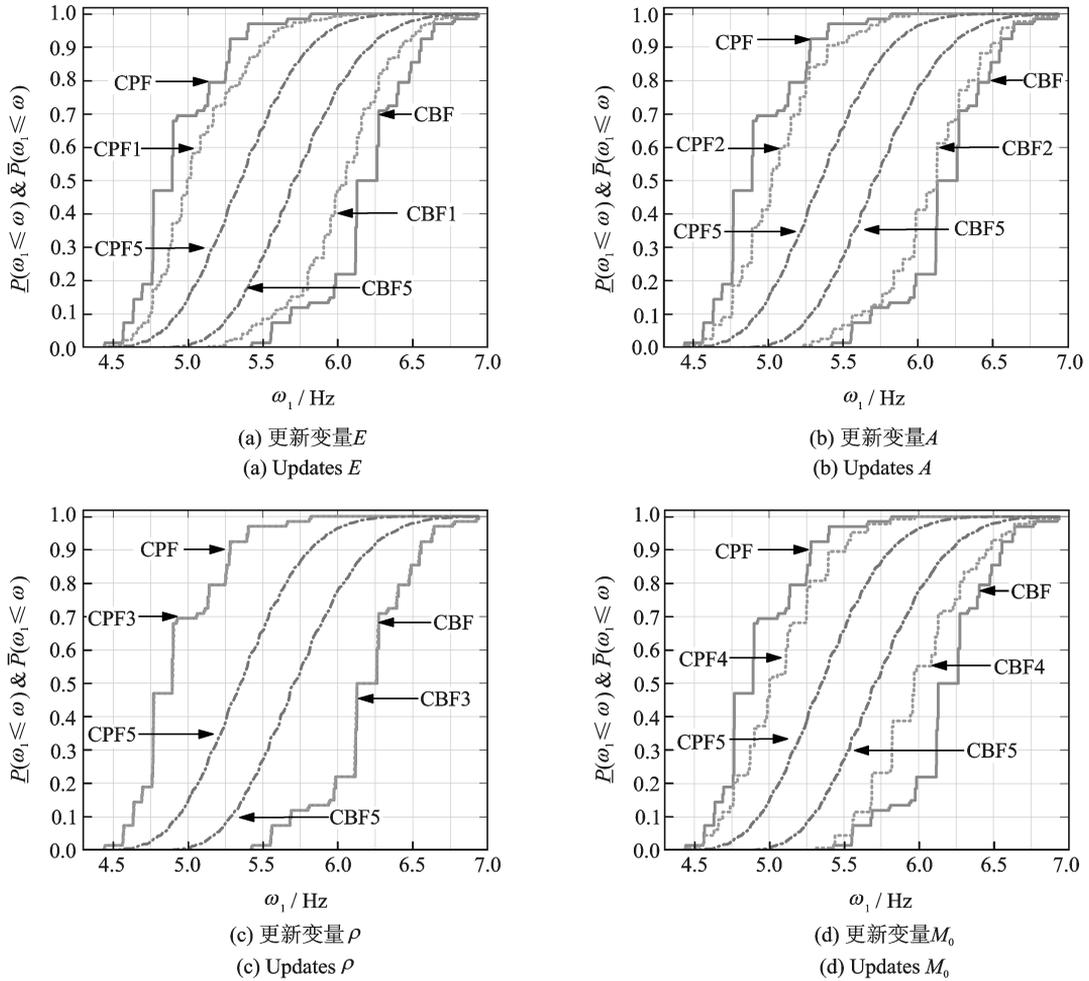


图7 27杆桁架第一阶固有频率分布

Fig.7 Distribution of first natural frequency of 27 bar truss

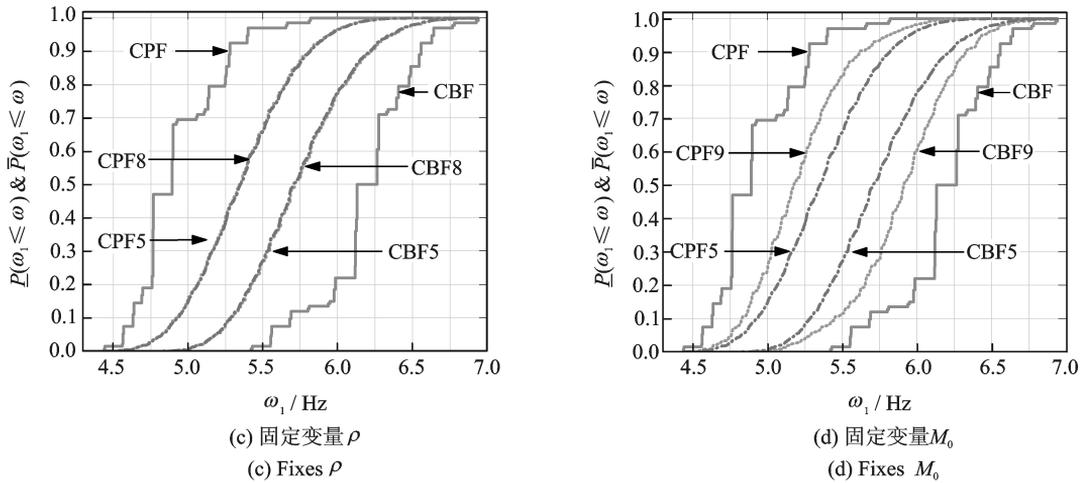


图 8 27 杆桁架第一阶固有频率分布

Fig.8 Distribution of first natural frequency of 27 bar truss

5 结 论

结构参数的不确定是影响结构动力特性的重要因素。针对实际工程中涉及到的认知不确定,本文提出了基于证据理论和微分演化的不确定量化方法,并将这种方法应用于结构的动力特性分析中。

利用证据理论刻画认知不确定,克服了区间分析过于保守的特点,又有效地避免了概率理论中人为假定概率分布模型或由不完全统计信息得到概率模型参数偏差对结构设计安全可靠性的影响。基于微分演化的区间寻优过程能够在整个搜索域内实现全局搜索并具有的快速收敛性能,在保证计算精度的情况下、有效地提升了证据理论不确定传播的效率。

本文提出的基于输入输出变化的敏感性分析方法不需要大量重复的分析,可以有效地减轻计算需求。另一方面,由于这种敏感性分析基于无量纲的不确定参数分析,避免了因为量纲上的差异而造成的敏感性分析结果失真。通过本文算例的相关探讨,可以看出基于证据理论和微分演化的不确定量化方法和基于输入输出的敏感性分析方法具有工程应用前景。

参考文献:

[1] Oberkampf W L, Helton J C, Sentz K. Mathematical representation of uncertainty [C]. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Seattle, WA; 2001.
 [2] Collins J D, Thomson W T. The eigenvalue problem for structural systems with statistical properties [J]. AIAA Journal, 1969, 7(4):642—648.
 [3] Shinozuka M, Astill C J. Random Eigenvalue problems in structural analysis [J]. AIAA Journal, 1972, 10(4):456—462.

[4] 吴祥法,杨国树.随机参数结构动特性的统计分析[J].北京理工大学学报,1996,16(01):43—47.
 Wu Xiang-fa, Yang Guo-shu. Statistical analysis of dynamic characteristics of structures including random parameter [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 1996, 16(01):43—47.
 [5] 陈建军,车建文,陈勇,等.基于概率的桁架结构动力分析[J].振动与冲击,2000,19(01):66—69.
 Chen Jian-jun, Che Jian-wen, Chen Yong, et al. Dynamic characteristic analysis of truss structures based on probability [J]. Journal of Vibration and Shock, 2000, 19(01):66—69.
 [6] 宋述芳,吕震宙,乔红威.随机结构动力特征的统计矩及灵敏度分析研究[J].振动工程学报,2011,24(02):133—138.
 Song Shu-fang, Lü Zhen-zhou, Qiao Hong-wei. Moment and sensitivity analysis for dynamic characteristic of stochastic structure [J]. Journal of Vibration Engineering, 2011, 24(02):133—138.
 [7] 万华平,任伟新,钟剑.桥梁结构固有频率不确定性量化的高斯过程模型方法[J].中国科学:技术科学,2016,46(9):919—925.
 Wan Hua-ping, Ren Wei-xin, Zhong Jian. Gaussian process model-based approach for uncertainty quantification of natural frequencies of bridge [J]. Science China: Technological Sciences, 2016, 16(9):919—925.
 [8] 程进,肖汝诚.轴向荷载作用下梁结构动力特性的随机分析[J].土木工程学报,2006,39(04):54—57.
 Cheng Jin, Xiao Ru-cheng. Stochastic analysis of the dynamic characteristics of beams subjected to axial loads [J]. China Civil Engineering Journal, 2006, 39(04):54—57.
 [9] Ben-Haim Y. A non-probabilistic concept of reliability [J]. Structural Safety, 1994, 14(4):227—245.
 [10] Qiu Z P, Chen S H, Elishakoff I. Natural frequencies of structures with uncertain but nonrandom parameters

- [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1995, 86(3):669—683.
- [11] 王登刚. 计算具有区间参数结构的固有频率的优化方法[J]. *力学学报*, 2004, 36(03):364—372.
Wang Deng-gang. Global optimization method for computing frequencies of structures with interval uncertain parameters[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 36(03):364—372.
- [12] Modares M, Mullen R L, Muhanna R L. Natural frequencies of a structure with bounded uncertainty [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2006, 132(12):1363—1371.
- [13] Wang C, Gao W, Song C, et al. Stochastic interval analysis of natural frequency and mode shape of structures with uncertainties [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(9):2483—2503.
- [14] 宋碧宏, 卢珂, 陈庆, 等. 区间参数结构的动力特性及静响应分析[J]. *重庆大学学报*, 2013, 36(12):57—63.
Song Bi-hong, Lu Ke, Chen Qing, et al. Dynamic characteristics and static response analysis of interval parameters structure [J]. *Journal of Chongqing University*, 2013, 36(12):57—63.
- [15] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping [J]. *Annals of Mathematical Statistics*, 1967, 38(2):325—339.
- [16] Shafer G. *A Mathematical Theory of Evidence* [M]. Princeton: Princeton University Press, 1976:297.
- [17] Klir G J, Smith R M. On measuring uncertainty and uncertainty-based information: recent developments [J]. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 2001, 32:5—33.
- [18] Bae H, Grandhi R V, Canfield R A. Epistemic uncertainty quantification techniques including evidence theory for large-scale structures [J]. *Computers & Structures*, 2004, 82(13):1101—1112.
- [19] 唐和生, 苏瑜, 薛松涛, 等. 结构可靠性优化设计的证据理论和微分演化方法 [J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2014, 41(4):33—38.
Tang He-sheng, Su Yu, Xue Song-tao, et al. A method of reliability design optimization using evidence theory and differential evolution [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2014, 41(04):33—38.
- [20] Sobol I M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2001, 55(1-3):271—280.
- [21] 邱志平, 王晓军. 结构灵敏度分析的区间方法 [J]. *兵工学报*, 2005, 26(06):80—84.
Qiu Zhi-ping, Wang Xiao-jun. An interval method for sensitivity analysis of structures [J]. *Acta Armamentarii*, 2005, 26(06):80—84.
- [22] Ferson S, Troy Tucker W. Sensitivity analysis using probability bounding [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2006, 91(10-11):1435—1442.
- [23] 骆勇鹏, 黄方林, 韩建平, 等. 灵敏度的模态区间分析方法及其在不确定性参数识别中的应用 [J]. *振动工程学报*, 2016, 29(04):577—584.
Luo Yong-peng, Huang Fang-lin, Han Jian-ping, et al. A sensitivity modal interval analysis method and its application to uncertain parameter identification [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2016, 29(04):577—584.
- [24] Price K, Storn R M, Lampinen J A. *Differential evolution: a practical approach to global optimization* [M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2006:538.

Uncertainty quantification of structural natural frequency using evidence theory

LI Da-wei¹, TANG He-sheng^{1,2}, YAO Wen¹, XUE Song-tao¹

(1. Research Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Tongji University, Shanghai 200092, China;
2. State Key Laboratory of Disaster Prevention in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Uncertainties in structural parameters lead to the uncertainty in natural frequencies of structure. Aiming at the epistemic uncertainties rooted in structural dynamic characteristics analysis, the evidence-theory-based uncertainty quantification and sensitivity analysis method are developed. The evidence theory is used to model the uncertainties of the structural parameters (e.g. material properties, geometric features, distribution of load). Then, the influence of epistemic uncertainty of structural parameters on structural natural frequency is quantified by employing optimization based interval analysis into the modal analysis of uncertain structure. The sensitivity analysis framework using variation ratio of focal element is presented to distinguish the degree of importance of each uncertain parameter. Finally, the dynamic characteristics analysis of a plane truss is presented to investigate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: structural dynamic characteristics; epistemic uncertainty; evidence theory; differential evolution algorithm; sensitivity analysis

作者简介: 李大伟(1990—)男, 博士研究生。电话: (021)65982390; E-mail: lidaweicc123@163.com

通讯作者: 唐和生(1973—)男, 博士。电话: (021)65982390; E-mail: thstj@tongji.edu.cn

万方数据